RELATIVIDAD GENERAL

O acerca de cómo incluir los efectos gravitatorios en el paradigma establecido por la Teoría de la Relatividad Especial

que hemos desarrollado en el Libro I. Así, tal y como hemos visto en las postrimerías de las secciones anteriores, la deformación del espaciotiempo que se percibe fundamentalmente en Sistemas de Referencia Inerciales que se desplazan a velocidades constantes cercanas a la velocidad de la luz, podría ser causada realmente por las aceleraciones a las que el cuerpo ha sido sometido para alcanzar dichas velocidades. En tal sentido podríamos considerar la atracción gravitatoria como una aceleración que se aplica sobre cualquier cuerpo o entidad, pues se incluye cualquier rayo de luz, que esté siendo sometido a la influencia de un campo gravitatorio. Para ello, el *quid* de la cuestión, estará en abandonar el espacio plano, cuasieuclídeo, de Minkowski e introducir el estudio de los espacios curvos según la geometría propuesta por Riemann. Así, y siguiendo el mismo esquema del Libro anterior, iremos desgranando, según vayan siendo necesarios, bien sea en notas o en secciones completas, los diferentes conceptos necesarios para poder alcanzar un grado de comprensión razonablemente claro de las leyes que gobiernan el cosmos, al menos, según han sido propuestas por los físicos de los siglos XIX, XX y XXI.

Vale.

LIBER SECVNDVS

Per JOHANNES SVLIS

S E V I L L A - TORRE - FUENTES

MMXVIII -MMXIX

SIN LICENCIA (ni falta) DE LA AUTORIDAD

-2.1-

La geometría de Riemann.

§

Ya sabemos qué tipo de deformaciones se producen en el espacio y el tiempo que mide un observador situado en un Sistema de Referencia Inercial que se desplaza, naturalmente a velocidad constante, respecto a otro Sistema de Referencia, también Inercial, que permanece en reposo respecto al primero. Para estudiar las transformaciones que dejaban invariante una magnitud hemos usado las Transformaciones de Lorentz y la métrica del espaciotiempo cuasieuclídeo de Minkowski.

En los últimos párrafos y notas del Libro anterior reflexionábamos acerca de si, acaso, las modificaciones que se producían en el espaciotiempo podrían ser causadas, realmente, por los procesos de aceleración a los que había sido sometido el cuerpo para llegar a tales velocidades. Algo así como que, al producirse una aceleración, el espaciotiempo se deforma. Posteriormente, mientras el cuerpo permanece con una velocidad constante, dicha deformación se mantendría constante para, de nuevo, modificarse ante la afectación de un cambio en la velocidad. Del mismo modo, y considerando que toda atracción gravitatoria podría ser estudiada como la aplicación de una aceleración cuyo rango de acción disminuye, según el paradigma clásico, de manera inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, ¿no podríamos estudiar el tipo de deformaciones que un campo gravitatorio provoca en el continuo espaciotemporal?

Justamente con tal fin, para pasar de estudiar una deformación lineal, tal y como veíamos en la Relatividad Especial, a estudiar una deformación con distribución radial, tendremos que estudiar los espacios no euclídeos bajo la óptica de la Geometría de Riemann.

En primer lugar recordemos los 5 postulados de la Geometría Euclídea.

1. Dos puntos cualesquiera determinan un segmento de recta.
2. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.
3. Se puede trazar una circunferencia dados un centro y un radio cualquiera.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Por un punto exterior a una recta sólo se puede trazar una única paralela.

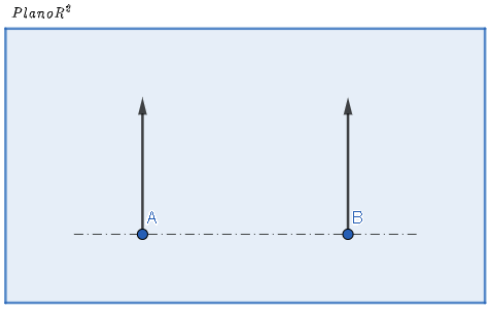
Los cuatro primeros postulados se consideraron, desde la antigüedad, como verdades axiomáticas, sin necesidad de demostración, a causa de la evidencia intuitiva que emanaba de ellos mismos. El 5º, sin embargo, siempre levantó suspicacias. No se supo muy bien

si dotarle, ciertamente, de categoría axiomática[1] o tratar de deducirlo como teorema a partir de los axiomas precedentes. Sea como fuere lo cierto es que durante siglos se aceptó, a regañadientes, como un axioma debido a los infructuosos intentos de demostrarlo como un teorema necesario.

Fue Johann Carl Friedrich Gauss (¡¿quién si no?!), en el siglo XVIII, el que por primera vez propuso que quizás, el 5º postulado de la Geometría Euclídea, solo fuera cierto para tipos muy concretos de espacios: espacios planos, efectivamente, euclídeos. Es decir, se planteó la posibilidad de que existiesen diferentes tipos de espacio, deformados. Por ejemplo: imaginemos que somos un punto y vivimos en un plano bidimensional. Supongamos ahora que nos desplazamos en nuestro plano a través de una trayectoria recta. ¿Tendrá, dicha trayectoria, el mismo comportamiento si la superficie es una hoja de papel plana sobre una mesa que si es la superficie de una esfera? Obviamente, no.

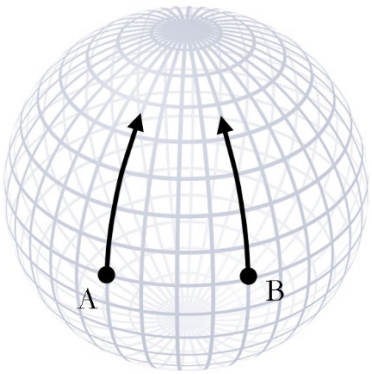
Imaginemos el siguiente experimento mental:

- Dos individuos, A y B, ubicados en una superficie plana euclídea, parten, en paralelo hacia el "norte". ¿Qué les sucederá?



  Sucederá que tanto A como B, efectivamente, realizarán trayectorias paralelas, sin encontrarse y, llegados al final del plan, o frenan o se caerán por el borde del papel con la consiguiente épica ostia.

- Dos individuos, A y B, ubicados en la superficie de una esfera, por ejemplo, el planeta tierra y que, desde el ecuador, parten en paralelo hacia el norte. ¿Qué les sucederá?



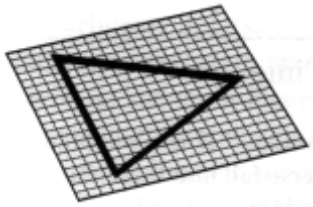
[1] ¿De verdad podemos estar seguros de que una recta es paralela a otra 'por siempre'? ¿La hemos recorrido hasta el infinito para saber lo que pasa allí?

Sucederá que ambos individuos, a pesar de haber caminado en paralelo todo el tiempo hacia el norte, se acabarán encontrando en el polo.

Es decir, que si bien la geometría de una superficie esférica es perfectamente compatible con los cuatro primeros axiomas de la Geometría Euclídea, no lo es, sin embargo, con el 5º postulado.

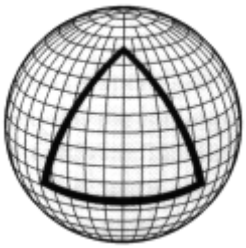
Así, a partir de la negación definitiva de este 5º postulado euclídeo, se empezaron a desarrollar nuevas geometrías, denominadas no euclídeas que, efectivamente, partiendo la trasgresión del principio de las paralelas, permitieron explorar numerosas posibilidades espaciales. Entre las diferentes generalizaciones de espacios no euclídeos que se abordaron cabe destacar, por el uso que vamos a realizar a lo largo de este libro segundo, la Geometría Elíptica de Bernhard Riemann.

Si bien antes, en la Geometría Euclídea, estábamos ante un espacio plano:

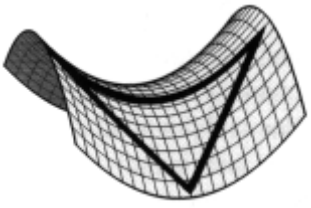


Ahora, en la Geometría de Riemann los espacios podrán ser[2]:

A. de curvatura positiva dando lugar a un espacio esférico[3] y, por ello, cerrado:



B. de curvatura negativa dando lugar a un espacio tipo "silla de montar" y, por ello abierto:

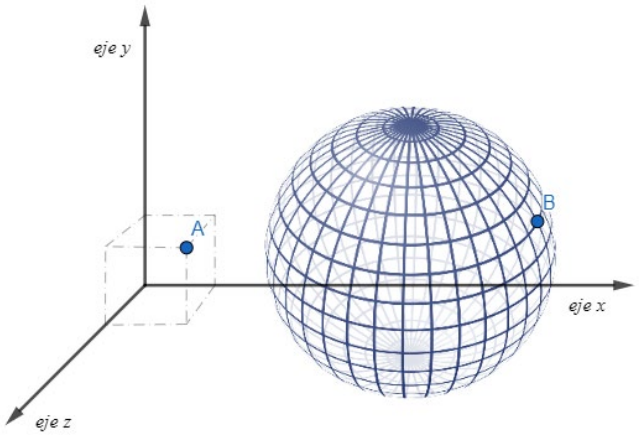


[2] Aún no sabemos qué forma tiene el espacio de nuestro Universo.

[3] Obsérvese que en este tipo de espacios, el Teorema de Pitágoras también tiene que ser redefinido pues la suma de los ángulos de un triángulo suman más de 180º. Obsérvese el caso de la esfera, ya, de momento, en la zona del 'ecuador' nos encontramos con dos ángulos de 90º… más el del polo… Ea, ya la hemos liado.

La Geometría de Euclides, en definitiva, nos ha servido (y sigue siendo perfectamente válida) en nuestro mundo cotidiano, don de las distancias habitualmente se han medido en miles de kilómetros[4] pero, sin embargo, cuando abordamos distancias cósmicas, el espacio puede presentar una serie de deformaciones que pueden afectar a nuestras medidas. Por ejemplo: sabemos que dos rayos de luz que discurren en paralelo no se cruzarán bajo nuestra mirada pero… ¿qué sucederá a miles de millones de UA[5] o, por ejemplo, en las cercanías de un agujero negro donde el comportamiento del espacio no será precisamente plano?

Profundicemos un poco en este asunto. Imaginemos el siguiente escenario con dos observadores A y B:



- El observador A está situado en un espacio tridimensional y es capaz de observar la esfera.
- El observador B está situado *en* (no *sobre*, sino *en*) la superficie de la esfera, al modo de un habitante de Planilandia.

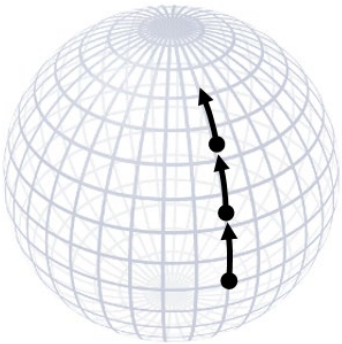
Realmente en este esquema hemos introducido una pequeña trampa pues, si bien el observador B está situado *en* una superficie de 2 dimensiones, ésta está curvada en la dirección de una tercera dimensión que él, como un habitante de Planilandia, no es capaz de percibir, al menos, en distancias cortas (al igual que sucede con nosotros). El observador A, en cambio, plenamente consciente de su mundo de tres dimensiones, es capaz de visualizar la ***variedad*** [6] esférica inserta en su mundo tridimensional.

Supongamos ahora que el observador B, en un hipotético viaje hacia el norte de su 'mundo', a lo largo de la superficie de su variedad, va trazando vectores que apuntan hacia el polo al que se dirige. Algo parecido a lo que se recoge en el siguiente esquema:

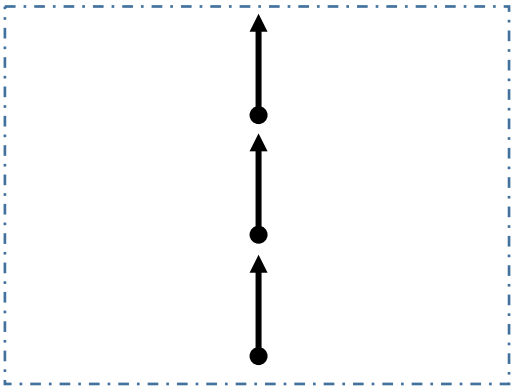
[4] Aunque ya en los vuelos intercontinentales o en la gestión de la red de satélites, para trabajar con precisión, hay que manejar geometrías no euclídeas.

[5] UA es la Unidad astronómica de longitud. Es una unidad de longitud igual por definición a 149.597.870.700 m. y equivale a la distancia media, aproximada, entre la Tierra y el Sol

[6] A los cuerpos curvos continuos que tienen una forma, digamos, *suave*, sin interrupciones o ángulos, se le llama ***variedad***. Cuando decimos que es suave nos referimos a que si hacemos un corte, en cualquier dirección de la misma, el perfil presentará una línea continua que es derivable en todos sus puntos.

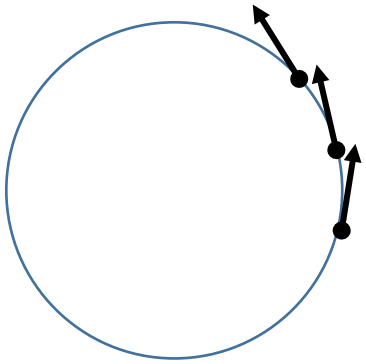


¿Qué vería el observador B si va mirando al suelo? Algo parecido a esto:



Donde, efectivamente, podríamos decir que los vectores (parece obvio) son linealmente dependientes pues apuntan, todos, en la misma dirección.

Sin embargo, ¿qué verá el observador A desde su situación privilegiada externa a la superficie de la variedad? Pues algo similar a esto[7] (presentamos sólo el perfil de la esfera para que se perciba mejor el efecto que deseamos mostrar):



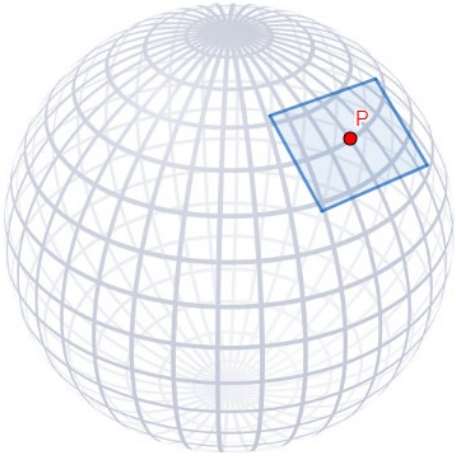
[7] Obsérvese que los vectores (tal y como comentamos en el Libro I) son 'unidades compactas, indisolubles, de información'. El vector, para ser considerado como tal, debe tener magnitud, dirección y sentido como un paquete único. Así, si tomamos una parte suficientemente pequeña, diferencial, de una variedad curva, podremos ver que el comportamiento de ese fragmento de superficie tendrá un comportamiento prácticamente euclídeo de manera que podemos trabajar, en esas zonas diferenciales, con los vectores tal y como los conocemos de toda la vida. Es importante: no existe el *vector curvo*, sino vectores 'rectos', los normales de toda la vida, que se insertan en un plano tangente a una zona diferencial (un punto) de la variedad.

Es decir, vería vectores que apuntan en direcciones diferentes: vectores linealmente independientes. Vectores que, de ninguna manera, son paralelos (en el caso de que se desplazaran, conservando su dirección, para ponerlos unos junto a los otros). Para que el observador A (y el B, claro) pueda considerar que dos vectores con paralelos, es necesario que, por ejemplo, los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ sean proporcionales ($\vec{v} \propto \vec{u}$) de manera que se cumpla que uno de ellos sea igual al otro multiplicado por un escalar: $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

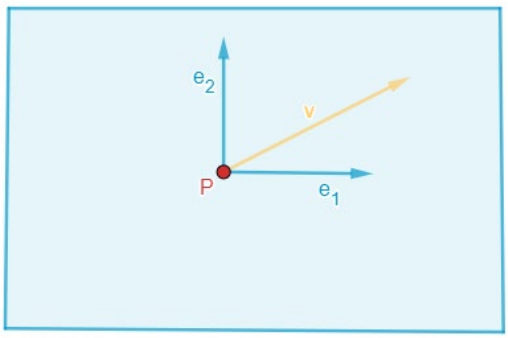
Sin embargo, para que A pueda interpretar y comprender por qué B dice que sus vectores son paralelos, habrá que recurrir a algún artificio, alguna convención: al concepto de ***conexión, geodésicas, etc…***[8]

De momento, lo primero que tendremos que hacer es reinterpretar lo que es la dependencia y la independencia lineal[9] de vectores en el marco de una superficie curva (***una variedad***).

Supongamos el siguiente escenario en el que trazamos el plano tangente a un punto P de la variedad esférica que ya hemos manejado previamente:



En dicho plano, muy cerca, infinitamente cerca del punto P, podremos definir un vector $\vec{v}$ contenido en el plano tangente utilizando la base vectorial que, necesariamente, define dicho plano, es decir:



Donde podremos decir que $\vec{v}$:

$$\vec{v} = xe_1 + ye_2$$

[8] En breve profundizaremos en él.

[9] Véase nota XXX.

El problema es que si tomamos cualquier otro plano, éste, tendrá, efectivamente su propia base $\{e_1, e_2\}$ pero, como ya podemos imaginar, ***no será la misma*** pues, como mínimo, apunta en otra dirección. Naturalmente, vamos a tener que estudiar cómo van cambiando esas bases según los planos se vayan desplazando por la variedad[10] y, por lo tanto, rotando y trasladando.

Para abordar la solución a estos problemas vamos a desarrollar una serie de herramientas:

- Gradiente.
- Coexistencia de más de una Base.
- Base Dual.
- Coordenadas Contravariantes y Coordenadas Covariantes
- Bases Coordenadas.
- Tensores.

(OBSERVACIÓN. En los epígrafes acerca de la Base Dual y las Coordenadas Contravariantes/Covariantes vamos a dar algún rodeo para poder construir dichos conceptos abordando y accediendo a una serie de conceptos que van a ser muy útiles)

[10] Por definición, siendo la variedad una '*curva continua*' (*suave*), se podrán adjuntar infinitos planos tangentes (uno para cada uno de los infinitos puntos de la variedad). A la suma total de todos esos planos posibles se le denomina ***Fibrado Tangente***. En todo caso, podemos ir identificando, catalogando, los diferentes planos tangentes que se pueden '*adjuntar*' a una variedad (algo así como '*empapelar*' una variedad). La terminología que se emplea para definir cada plano es:

$$T_P M$$

Donde:

T es el plano Tangente que contiene al punto P de la variedad M

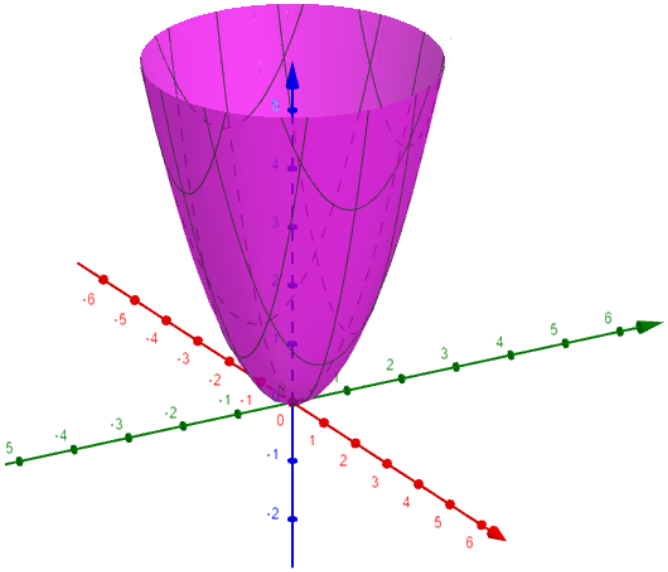
Y donde, al conjunto de todos los planos posibles de una variedad (ya lo hemos dicho en la nota X) se le denomina:

$$\{T_P M\} = Fibrado\ Tangente$$

2.1.1. Gradiente.

Imaginemos la representación gráfica de una función:

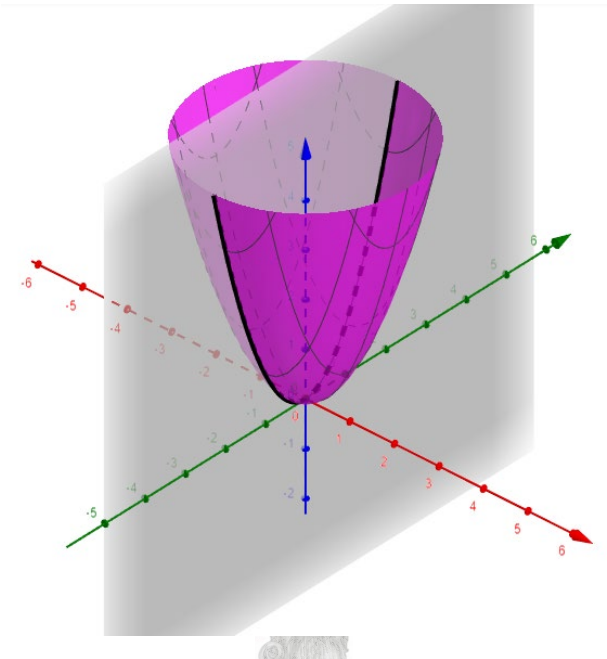
$$f_{(x,y)} = x^2 + y^2$$



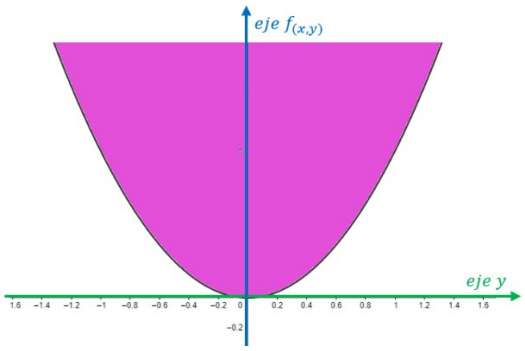
Efectivamente, podríamos decir que:

- En el eje x (el rojo) recogemos los valores de la variable independiente x.
- En el eje y (el verde) recogemos los valores de la variable independiente y.
- El eje f (el azul) recogemos los valores de $f_{(x,y)}$, es decir, la variable dependiente (dependiente de x e y) que, ciertamente, tendrá un valor según sean de las oscilaciones que se produzcan en x e y.

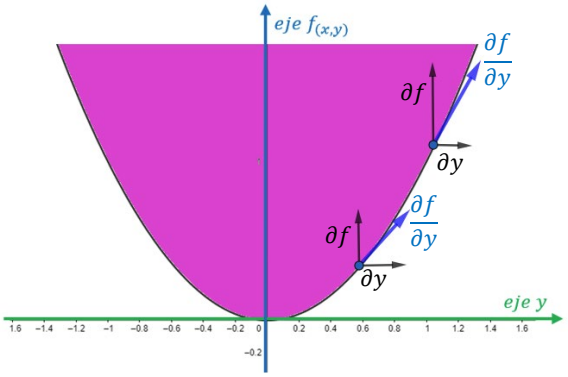
Imaginemos ahora que fijamos un punto cualquiera del eje x, por ejemplo $x = 0$, desde el que lanzamos un plano que interseccionа la figura/variedad que hemos representado:



Dicha intersección, vista frontalmente, sería algo como:



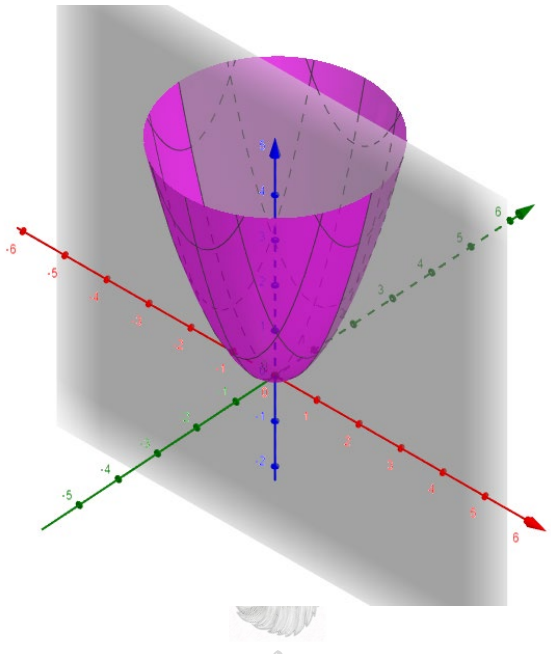
Donde, si analizamos el comportamiento de la pendiente de la figura/variedad, es decir, la derivada parcial de la función $f_{(x,y)}$ en un punto diferencial del eje y, veríamos algo así:



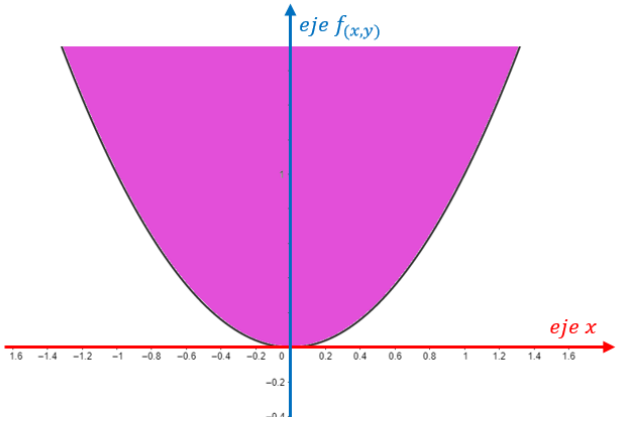
Donde el vector pendiente de la curva en cada punto viene dado por:

$$\vec{\nabla} f_y = \frac{\partial f}{\partial y} e_y$$

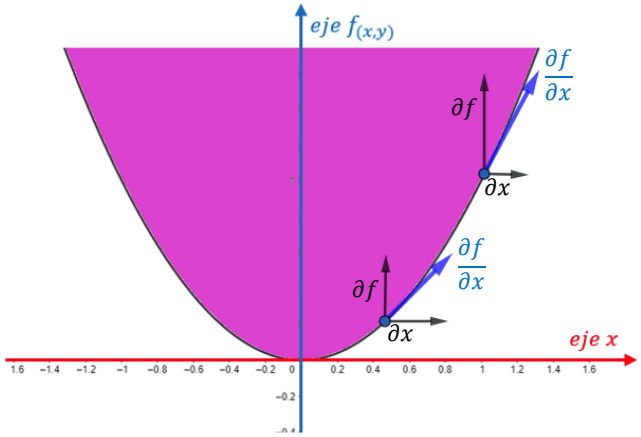
Por otro lado, si procedemos igualmente pero fijando un punto en el eje y, tendríamos:



Que visto frontalmente sería algo parecido a esto:



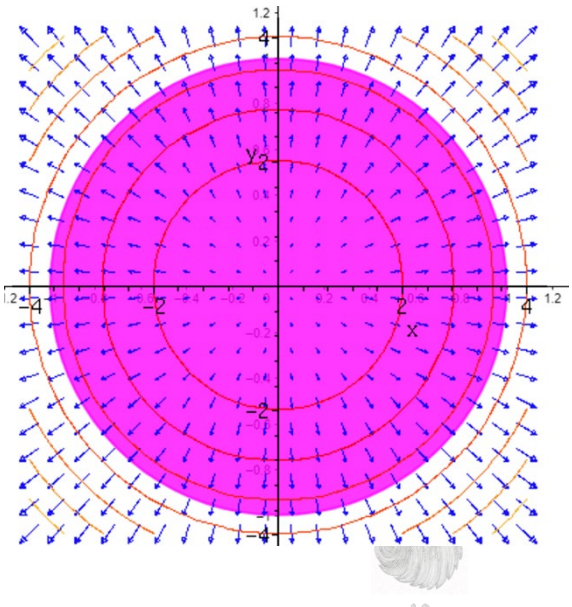
Donde, del mismo modo que hicimos anteriormente:



Por lo que:

$$\vec{\nabla} f_x = \frac{\partial f}{\partial x} e_x$$

Ahora, si mirásemos nuestra figura desde arriba, cenitalmente, de manera que el eje al que hemos llamado f apunte hacia nosotros, y, a su vez, recogiésemos todos los vectores que hemos construido, veríamos algo a lo que denominaríamos ***Campo Gradiente***:



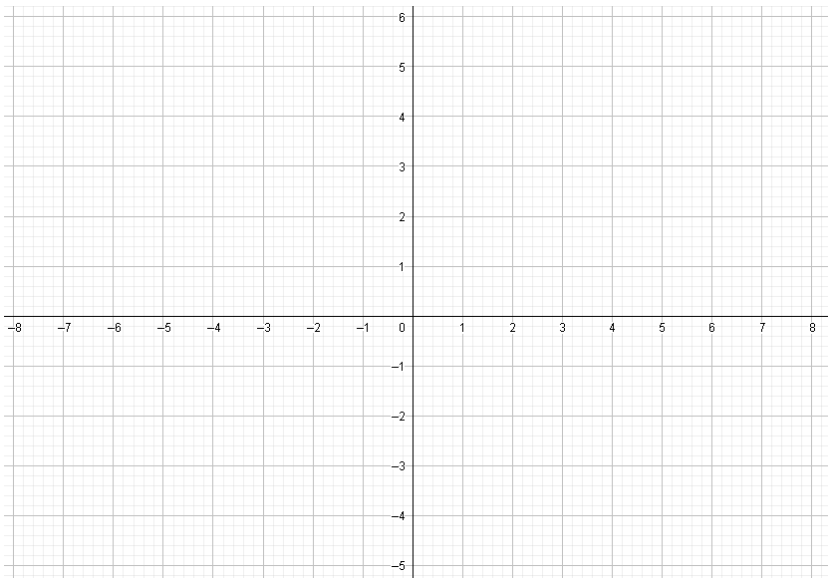
Donde cada vector es:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} e_x + \frac{\partial f}{\partial y} e_y$$

2.1.2. Coexistencia de más de una Base.

Supongamos ahora un espacio en el que trabajamos con dos bases y las respectivas cuadrículas de coordenadas que se generaron con cada una de ellas. ¿Con qué finalidad hemos creado dos bases? Simplemente, imaginemos que en dicho espacio bidimensional se encuentran dos tipos de moléculas: las que tienen una orientación de 60º y las que tienen orientación de 45º. Mediante el uso de dos bases podremos facilitar mucho el manejo de magnitudes según estemos estudiando una u otra molécula. Por otro lado, a la hora de preparar los dos espacios, como de fondo vamos a tener siempre la cuadrícula madre (la cartesiana) que se usará de referencia entre los dos mundos (pues cada uno tendrá su propia base)[11], vamos a poder garantizar el contacto inteligible entre ambos mundos. Digamos que la cuadrícula cartesiana va a ejercer un poco como la máquina Bomba de Touring frente a las códigos Enigma Nazis de cada mundo.

De entrada, pongamos sobre la mesa la Cuadrícula Base Cartesiana A, nuestra traductora universal.



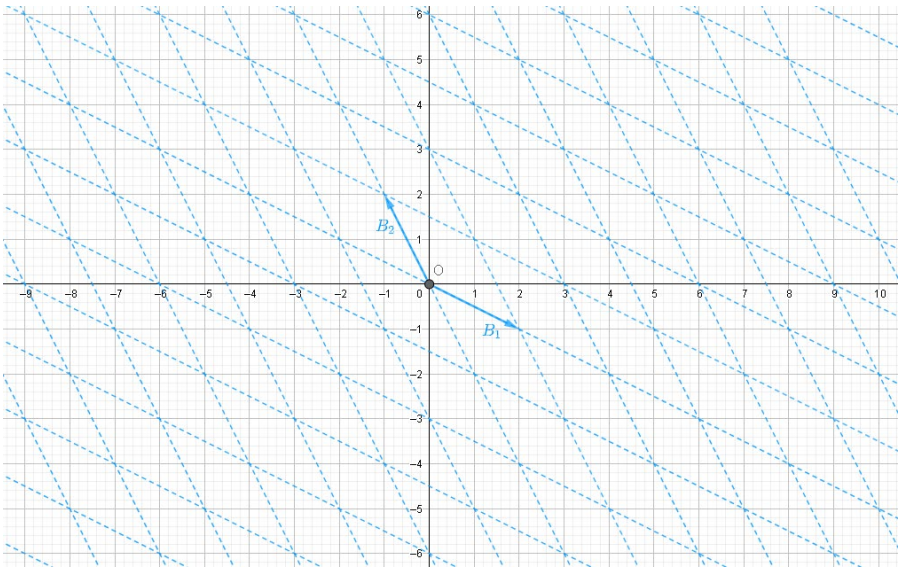
Ahora supongamos un Espacio Bidimensional B, que añadimos como una **Capa** semitransparente sobre la Capa A, y cuya base (conformada por dos vectores linealmente independientes B_1 y B_2) está definida del siguiente modo (nótese que tenemos que usar las x e y de nuestra traductora universal):

$$B_1 = (2x, -1y)$$

$$B_2 = (-1x, 2y)$$

[11] En propiedad no serán dos espacios, sino que será un Espacio Dual, un espacio que puede verse desde dos puntos de vista diferentes. Mejor usaremos la expresión capas.

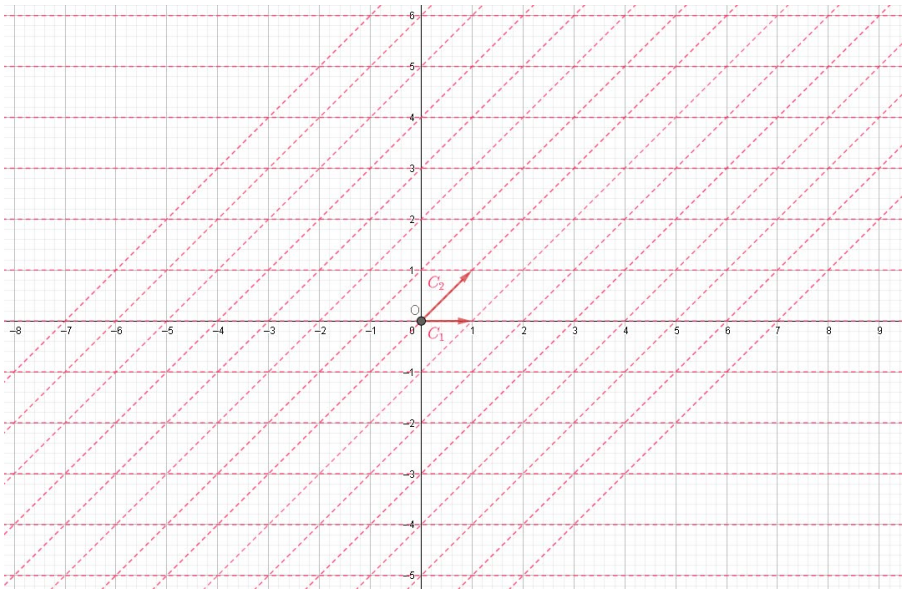
Que gráficamente sería (aprovechamos para generar la cuadrícula de coordenadas vinculadas a dicha Base azul):



Ahora, olvidémonos momentáneamente de la Capa B y supongamos que al mismo Espacio Bidimensional (Capa A) le añadimos una Capa C, semitransparente, cuya base (conformada por dos vectores linealmente independientes C_1 y C_2) está definida del siguiente modo (nótese que volvemos a usar las x e y de nuestra traductora universal):

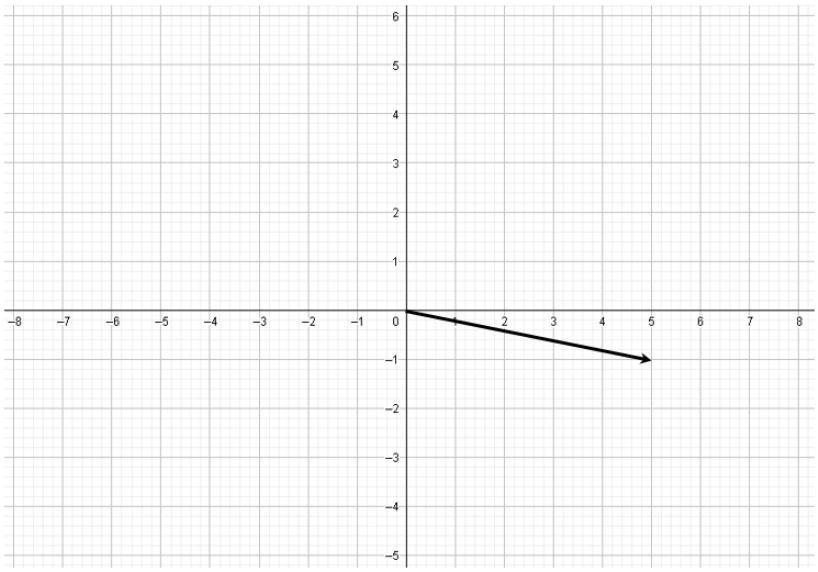
$$C_1 = (1x, 0y)$$

$$C_2 = (1x, 1y)$$



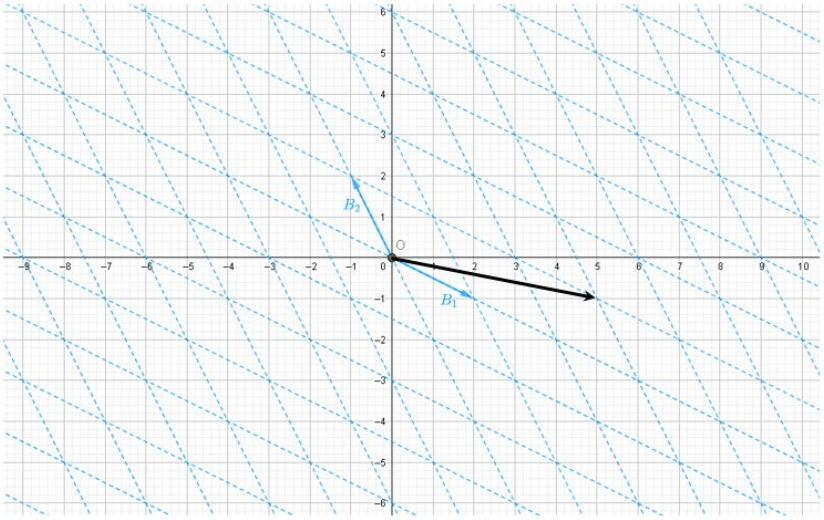
Ahora si trazamos un vector $\vec{v}$ cualquiera, por ejemplo: (5,-1) en la Capa Cartesiana A que sirve de referencia común a todas las demás… ¿Cómo se vería desde el punto de vista de cada capa? En primer lugar, y aunque esto pueda parecer baladí, es muy importante resaltar que el vector, se mire desde la capa que se mire, seguirá siendo el mismo. No cambiará ni su longitud, ni su dirección, ni su naturaleza, … Sencillamente lo estaremos expresando desde, digamos, *idiomas* diferentes.

Miremos primero, efectivamente, en la Capa Cartesiana A:



Ciertamente es (5,-1). Nada que objetar.

Miremos ahora en la Capa B:



Si seguimos las líneas vemos que es 3 saltos de coordenadas en el pseudo-eje B_1 y 1 salto de coordenada en el pseudo-eje B_2.

Como conocemos la relación que hay entre las capas A y B, podríamos hablar del vector $\vec{v}$ desde el idioma de la Capa B y traducirlo al idioma de la Capa A del siguiente modo:

Sabemos que desde la Capa B el vector $\vec{v}$ es:

$$\vec{v} = 3B_1 + 1B_2$$

Y como sabemos que en lenguaje de la Capa A la Base de la Capa B se define como:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Podremos 'traducir':

$$\vec{v} = 3\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$$

Que es justo el modo en que se definía el vector $\vec{v}$ desde el idioma de la Capa A.

Igualmente, si ahora quisiéramos volver desde el 'idioma' de la Capa A al 'idioma' de la Capa B, habría que, sencillamente, deshacer lo que hemos hecho. Siendo la multiplicación matricial una transformación lineal, lo que tendremos que hacer es realizar la transformación inversa.

Así, para deshacer la transformación $B \rightarrow A$ tendremos que multiplicar por la matriz inversa y hacer $B \leftarrow A$. Esto requiere plantear el asunto de un modo ligeramente diferente. Para ello, expresemos los vectores de la base transformadora[12] como una matriz para enfocar el asunto como una transformación lineal, como un producto entre matrices. Es decir, podríamos replantear la expresión de antes como:

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$$

Es decir:

$$(\beta_B)(\vec{V}_B) = (\vec{V}_A)$$

Que podemos despejar como (ahora la incógnita es $\vec{V}_B$, las coordenadas del vector visto desde el idioma de la capa B):

$$(\beta_B{}^{-1})(\beta_B)(\vec{V}_B) = (\beta_B{}^{-1})(\vec{V}_A)$$

$$I \cdot (\vec{V}_B) = (\beta_B{}^{-1})(\vec{V}_A)$$

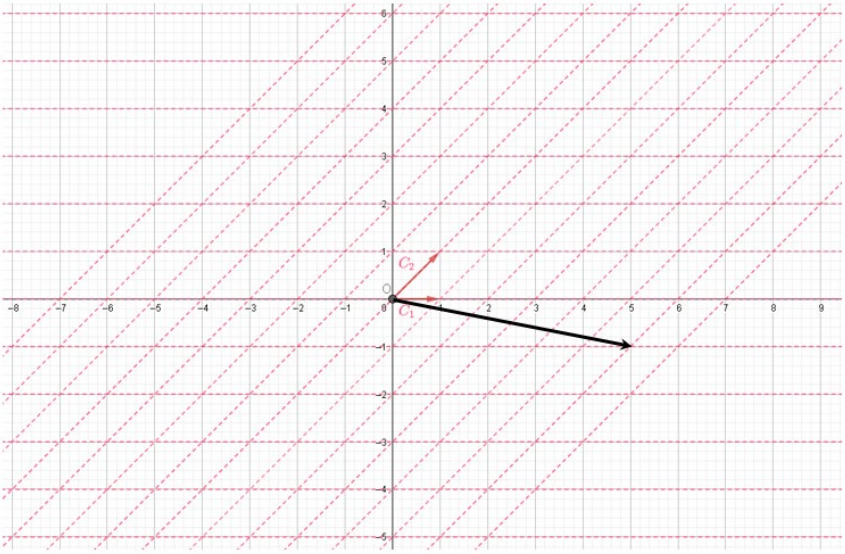
Es decir:

$$(\vec{V}_B) = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$$

$$(\vec{V}_B) = \begin{pmatrix}2/3 & 1/3\\1/3 & 2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

[12] Podríamos haberlo hecho desde el principio, pero para que el procedimiento se viera claramente, hemos declinado hasta este momento.

Por otro lado, con el vector $\vec{v}$ visto desde la Capa C, procederíamos de manera análoga:



Vemos que es 6 *saltos* en el pseudo-eje C_1 y (-1) en el pseudo-eje C_2, es decir:

$$\vec{v} = 6C_1 - 1C_2$$

Y como sabemos que la base de la Capa C, en idioma de la Capa A, es:

$$C_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Podemos traducir como:

$$\vec{v} = 6\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$$

Transformación que podríamos deshacer como ya hicimos con la Capa B, del siguiente modo:

$$(\beta_C{}^{-1})(\beta_C)(\vec{V}_C) = (\beta_C{}^{-1})(\vec{V}_A)$$

$$I \cdot (\vec{V}_C) = (\beta_C{}^{-1})(\vec{V}_A)$$

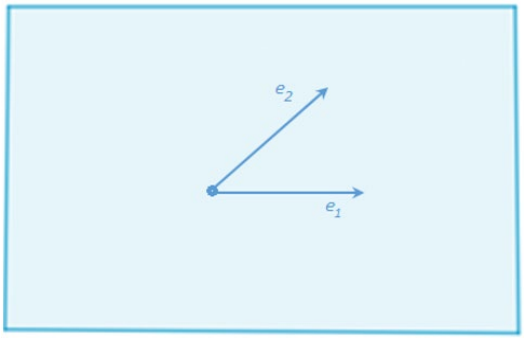
Es decir:

$$(\vec{V}_C) = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$$

2.1.3. Base Dual.

Ahora, para poder seguir avanzando vamos a introducir a continuación el concepto de Base Dual o Biortogonal. Esto no es otra cosa que manejar, dentro de un mismo espacio vectorial dos bases diferentes estableciendo, a priori, una relación determinada entre ambas: que los vectores que las conforman sean mutuamente perpendiculares. Desde el momento en que se introducen dos bases con una relación Dual (perpendicular) el espacio pasara llamarse Espacio Vectorial Dual.

Supongamos que tenemos un espacio vectorial con una Base Natural $\{e_1, e_2\}$. Observemos que esta base ya no es un espacio cartesiano de ejes ortogonales, sino un espacio más 'extraño':



Ahora establecemos, como hemos dicho, a priori, una condición a partir de la cual vamos a construir una Base Dual para dicho espacio. Es decir, siendo la Base Dual: $\{e^1, e^2\}$, obligamos a que se cumpla que:

$$e^1 \cdot e_1 = 1$$

$$e^2 \cdot e_2 = 1$$

$$e^1 \cdot e_2 = 0$$

$$e^2 \cdot e_1 = 0$$

Es decir que tanto el vector de la Base Dual e^1 como el e^2 deben adoptar un valor que facilite el cumplimiento de:

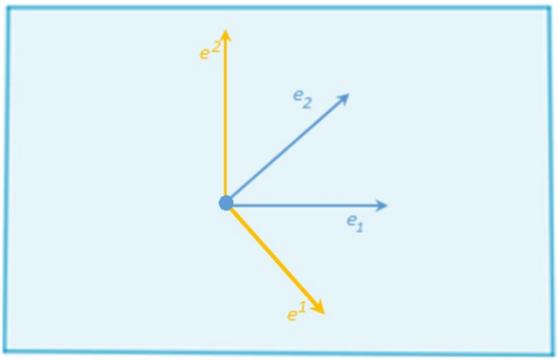
$$e^i \cdot e_j = \begin{cases} 1, si\ i = j \\ 0, si\ i \neq j \end{cases} \quad [13]$$

Y, muy importante: esta condición debe cumplirse siempre, con total independencia de la métrica que se esté aplicando.

---

[13] ***Muy importante***: obligando a que esta condición se cumpla, estamos garantizando la ***perpendicularidad*** *(al menos según nuestro punto de vista)* de los vectores de la nueva base vectorial respecto a sus 'anti'homólogos en la base canónica. Esta condición de la Base Dual es absolutamente necesaria para que podamos trabajar con ***Componentes Contravariantes y Covariantes***, como veremos en el siguiente epígrafe.

Es decir, en el siguiente esquema aproximado: ¿cómo deben ser los vectores 'amarillos' de la Base Dual para que nuestra condición se conserve?



Desarrollémoslo a ver qué sucede.

Sabemos que tanto e^1 como e^2 deben ser vectores insertos en el plano tangente que estamos estudiando. Por ello, deben ser expresables como una combinación lineal de los dos vectores que conforman la Base Natural (la 'original') que ya tenemos, es decir que:

$$e^1 = a \cdot e_1 + b \cdot e_2$$

$$e^2 = c \cdot e_1 + d \cdot e_2$$

Donde a, b, c, d son, precisamente, las magnitudes, la proporción, en que los vectores que conforman la Base Natural definen los nuevos vectores de la Base Dual. Es decir, que calcular la Base Dual es encontrar los valores de los coeficientes (coordenadas)[14] a, b, c, d.

Recordemos ahora cómo definíamos la métrica en la sección 1.6 del Libro I mediante las diferentes combinaciones del delta de Kronecker:

$$\eta = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}$$

Recordemos también que los vectores de la Base Natural, obligatoriamente, son linealmente independientes entre sí, de manera que:

$$\delta_{ij} = \vec{e_i} \cdot \vec{e_j} \begin{cases} 1, si\ i = j \\ 0, si\ i \neq j \end{cases}$$

Así, si nos retrotraemos a nuestra condición apriorística para construir la Base Dual:

$$e^1 \cdot e_1 = 1$$

$$e^2 \cdot e_2 = 1$$

$$e^1 \cdot e_2 = 0$$

$$e^2 \cdot e_1 = 0$$

Y contrastamos con nuestra definición provisional de la Base Dual:

[14] Coordenada pues este escalar no es otra cosa que hasta qué punto hay que alejarse del origen aplicando el vector, la unidad en este caso, de la Base Natural.

$$e^1 = a \cdot e_1 + b \cdot e_2$$

$$e^2 = c \cdot e_1 + d \cdot e_2$$

Podemos sustituir:

$$e^1 \cdot e_1 = 1 \rightarrow (a \cdot e_1 + b \cdot e_2) \cdot e_1 = 1$$

$$a \cdot e_1 \cdot e_1 + b \cdot e_2 \cdot e_1 = 1$$

Que, bajo el patrón de nuestra métrica[15], es:

$$a \cdot \delta_{11} + b \cdot \delta_{21} = 1$$

Si procedemos del mismo modo con todas las combinaciones, finalmente, obtendremos que:

$$a \cdot \delta_{11} + b \cdot \delta_{21} = 1$$

$$a \cdot \delta_{12} + b \cdot \delta_{22} = 0$$

$$c \cdot \delta_{12} + d \cdot \delta_{22} = 1$$

$$c \cdot \delta_{11} + d \cdot \delta_{21} = 0$$

Ciertamente ya nos habremos fijado en que los términos a y b están vinculados a la definición del vector e^1 de la Base Dual y los términos c y d están vinculados a la definición del vector e^2, también, de la Base Dual. Analicemos e^1, es decir: a y b.

Para despejar a y b, y barriendo para casa[16], vamos a proceder a:

- Multiplicar $a \cdot \delta_{11} + b \cdot \delta_{21} = 1$, en ambos lados, por δ_{12}:

$$a \cdot \delta_{11} \cdot \delta_{12} + b \cdot \delta_{21} \cdot \delta_{12} = \delta_{12}$$

- Multiplicar $a \cdot \delta_{12} + b \cdot \delta_{22} = 0$, en ambos lados, por δ_{11}:

$$a \cdot \delta_{12} \cdot \delta_{11} + b \cdot \delta_{22} \cdot \delta_{11} = 0$$

Ahora, si restamos ambas expresiones:

$$\begin{array}{r} a \cdot \delta_{11} \cdot \delta_{12} + b \cdot \delta_{21} \cdot \delta_{12} = \delta_{12} \\ - \; a \cdot \delta_{12} \cdot \delta_{11} + b \cdot \delta_{22} \cdot \delta_{11} = 0 \\ \hline b(\delta_{21} \cdot \delta_{12} - \delta_{22} \cdot \delta_{11}) = \delta_{12} \end{array}$$

De donde podremos despejar b como:

$$b = \frac{\delta_{12}}{(\delta_{21} \cdot \delta_{12} - \delta_{22} \cdot \delta_{11})}$$

[15] Obsérvese que aún no hemos definido numéricamente el contenido de las deltas de Kronecker de nuestra métrica, es decir, si seguimos así será válido para cualquier métrica.

[16] Multiplicamos por las deltas que nos interesan porque estamos buscando poder anular uno de los coeficientes, en concreto, a, para, finalmente, poder despejar el coeficiente que nos queda: b.

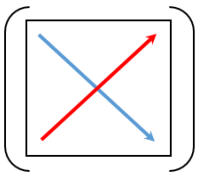
Pero, fijémonos por un momento en esta expresión y comparémosla con la matriz de la métrica:

$$\eta = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}$$

Lo que tenemos en el denominador de nuestra expresión…¿no se parece mucho a la definición de determinante de una matriz de $2x2$ (en realidad, a su opuesto)? Siendo así, podremos decir que (leer la siguiente nota)[17]:

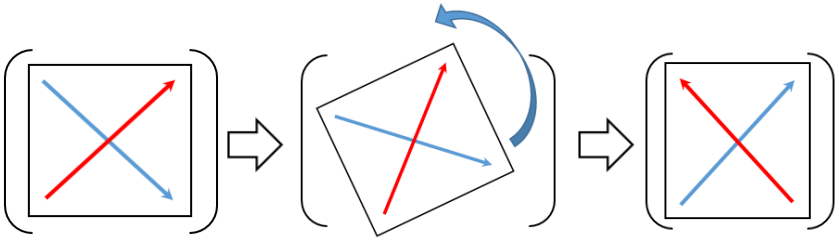
---

[17] Para *compensar* el opuesto del determinante, cambiamos de signo el numerador. Pero ***ojo*** a esto que hemos hecho porque no es tan baladí como pudiera parecer en un principio. Esto nos ha generado muchísimos quebraderos de cabeza. Este signo, sólo este cambio de signo. Ello es debido a que, ciertamente, a pesar de que en los ejemplos que hemos seguido este tema se trata muy superficialmente y, además, debido a la simetría de los casos, este cambio de signo apenas tiene efectos, a nada que reflexionemos sobre el asunto veremos la profundidad del cambio que este signo implica.
En primer lugar recordemos, cómo se calculaba el determinante en una matriz de 2x2 (vamos a seguir un procedimiento puramente visual):



Es decir, el determinante se calculaba multiplicando los elementos de la diagonal (signo positivo) y restándole el producto de los elementos de la antidiagonal (signo negativo): *diagonal-antidiagonal*

Pero, claro, nosotros hemos visto que lo que tenemos es justamente lo contrario: que la *antidiagonal* es positiva y la *diagonal* negativa. Hemos incluido un [·(-1)] y nos hemos quedado tan panchos… Sin embargo, ¿no es más bien que la antidiagonal está ejerciendo de diagonal y la antidiagonal de diagonal? Es decir, ¿no parece más bien que la matriz de referencia ha girado 90º?



Es decir, que lo que realmente estamos calculando es ¡*la inversa de la matriz rotada 90º*! Esto que a priori creemos que sólo nos va a suponer un cambio de signo, realmente, según el modo visual en que vamos a desarrollar nuestros ejemplos geométricos supondrá que una vez que estemos aplicando la matriz inversa, tendremos que, o girarla 90º para deshacer el cambio que hemos realizado o, casi mejor, tomar los vectores base en vez de verticalmente, horizontalmente. Puede que, ahora mismo, esto no nos suene mucho pero cuando estemos viendo las coordenadas contravariantes y covariantes tendrá mucho más sentido y, si es necesario, podremos volver a esta nota para recordar la justificación de por qué cambiamos la orientación a la hora de tomar vectores base de una matriz.
Insistimos, esto tiene implicaciones visuales que van mucho más allá del mero cambio de un signo y como, además, el enfoque que estamos haciendo queremos que vaya aparejado de

$$b = \frac{-\delta_{12}}{det\,\eta}$$

Ahora podemos despejar fácilmente a. Para ello tomemos la expresión que nos es más cómoda:

$$a \cdot \delta_{12} + b \cdot \delta_{22} = 0$$

Así ahora:

$$a \cdot \delta_{12} + \left(\frac{-\delta_{12}}{det\,\eta}\right) \cdot \delta_{22} = 0$$

Es decir:

$$a \cdot \delta_{12} - \frac{\delta_{12} \cdot \delta_{22}}{det\,\eta} = 0$$

$$a \cdot \delta_{12} = \frac{\delta_{12} \cdot \delta_{22}}{det\,\eta}$$

$$a = \frac{\delta_{22}}{det\,\eta}$$

Hagamos ahora lo mismo para buscar los coeficientes (coordenadas) c y d que definen e^2:

$$\begin{array}{r} c \cdot \delta_{12} \cdot \delta_{11} + d \cdot \delta_{22} \cdot \delta_{11} = \delta_{11} \\ -\ c \cdot \delta_{11} \cdot \delta_{12} + d \cdot \delta_{21} \cdot \delta_{12} = 0 \\ \hline d(\delta_{22} \cdot \delta_{11} - \delta_{21} \cdot \delta_{12}) = \delta_{11} \end{array}$$

$$d = \frac{\delta_{11}}{det\,\eta}$$

Y sustituyendo podremos despejar también c de manera que:

$$c = \frac{-\delta_{21}}{det\,\eta}$$

Ahora, si disponemos a, b, c, d de manera matricial, tendríamos que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{det\,\eta}\begin{pmatrix} \delta_{22} & -\delta_{12} \\ -\delta_{21} & \delta_{11} \end{pmatrix}$$

Y, ¡oh! ¡maravillosa sorpresa!, resulta que con a, b, c, d podemos construir la matriz inversa de nuestra métrica η, pues:

$$\frac{1}{det\,\eta}\begin{pmatrix} \delta_{22} & -\delta_{12} \\ -\delta_{21} & \delta_{11} \end{pmatrix} = \eta^{-1}$$

---

exposiciones intuitivas de las transformaciones que estamos haciendo, creemos más que oportuno tener muy en consideración esta nota.

Sin embargo, como el hecho de que el primer término sea un δ_{22} en vez del esperado δ_{11}, puede confundirnos se procede, mediante convención, a poner el subíndice como superíndice y volver a presentar la matriz así:

$$\eta^{-1} = \frac{1}{det\,\eta}\begin{pmatrix} \delta_{22} & -\delta_{12} \\ -\delta_{21} & \delta_{11} \end{pmatrix} \rightarrow \eta^{ij} = \frac{1}{det\,\eta}\begin{pmatrix} \delta^{11} & \delta^{12} \\ \delta^{21} & \delta^{22} \end{pmatrix}$$

Donde[18]:

$$\delta^{11} = \delta_{22}(\text{matriz original})$$

$$\delta^{12} = -\delta_{12}(\text{matriz original})$$

$$\delta^{21} = -\delta_{21}(\text{matriz original})$$

$$\delta^{22} = \delta_{11}(\text{matriz original})$$

Así, ahora, podemos reescribir nuestra definición provisional de la Base Dual:

$$e^1 = a \cdot e_1 + b \cdot e_2$$

$$e^2 = c \cdot e_1 + d \cdot e_2$$

Como:

$$e^1 = \delta^{11} \cdot e_1 + \delta^{12} \cdot e_2$$

$$e^2 = \delta^{21} \cdot e_1 + \delta^{22} \cdot e_2$$

Que podemos reescribir de una manera más general como[19]:

$$e^i = \sum_{j=1}^{n} \delta^{ij} \cdot e_j$$

Y así, ya habríamos conseguido definir nuestra Base Dual independientemente de cuál sea la métrica y en 'función' de la 'Base Natural' y la inversa de la métrica (por supuesto, que cumple las condiciones apriorísticas que establecimos[20]):

---

[18] Importantísimo: comprobar siempre si los índices están arriba o abajo.

[19] Einstein, para ahorrase tinta, papel y esfuerzo escribiendo tantísimas veces como va a hacer falta el símbolo de sumatorio inventó una notación que permitía identificar cuándo había sumas sin necesidad de poner la sigma griega. Se fijó en que cuando uno se encuentra una expresión con un producto entre factores de los cuales uno tiene un superíndice que coincide con el subíndice del siguiente factor era porque, seguro, se trataba de una suma por lo que pudo resumir una expresión como:

$$e^i = \sum_{j=1}^{n} \delta^{ij} \cdot e_j$$

En:

$$e^i = \delta^{ij} \cdot e_j$$

A esto se le llama "*criterio de sumación de Einstein*".

[20] $e^i \cdot e_j = \delta^i_j = \begin{cases} 1, si\ i = j \\ 0. si\ i \neq j \end{cases}$

$$e^i = \delta^{ij} \cdot e_j$$

Por otro lado, si la notación que estamos empleando se ha construido con coherencia interna (y ya adelantamos que es coherente), podremos transformar la expresión anterior en su análoga con los índices cambiados de arriba a abajo y viceversa sin que su certeza sufra menoscabo alguno:

$$e_i = \delta_{ij} \cdot e^j$$

Veamos un ejemplo de cómo construir una Base Dual para un espacio bidimensional dada una métrica:

Supongamos un espacio bidimensional definido mediante la siguiente métrica:

$$\eta = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Que tiene definida una Base Natural con los vectores:

$$\{e_1, e_2\}$$

En el que se define un vector $\vec{v}$ cualquiera como, por ejemplo:

$$\vec{v} = 5e_1 + 7e_2$$

Como sabemos que[21]:

$$e_1 = \delta_{11} \cdot e^1 + \delta_{12} \cdot e^2$$

---

[21] Insistimos: ojo a si los índices de las coordenadas están arriba o abajo. En este caso, las deltas tienen subíndice, por lo debe acompañar a una Base Dual. De hecho, como vamos a pasar de la Base Natural a la Base Dual es necesario que partamos de esta igualdad en la que la Base Natural queda definida 'en función' de la Base Dual.

Si las coordenadas (en realidad las deltas, claro) estuvieran acompañadas de superíndices, la cosa cambiaría. Según hemos visto en los desarrollos anteriores, la matriz métrica inversa a partir de la cual podremos construir la Base Dual será:

$$\eta^{-1} = \frac{1}{det\,\eta}\begin{pmatrix} \delta_{22} & -\delta_{12} \\ -\delta_{21} & \delta_{11} \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$\eta = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \eta^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 & -1/8 \\ -1/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

Por lo que, según hemos definido:

$$e^1 = \delta^{11} \cdot e_1 + \delta^{12} \cdot e_2 = 3/8 \cdot e_1 - 1/8 \cdot e_2 \quad /// \quad e^2 = \delta^{21} \cdot e_1 + \delta^{22} \cdot e_2 = -1/8 \cdot e_1 + 3/8 \cdot e_2$$

Obsérvese que tomamos los 'vectores' de manera horizontal. Esto está relacionado con la nota 16 y, cuando veamos los desarrollos geométricos de las coordenadas contravariantes y covariantes tendrá aún más sentido. En realidad, puesto que esta matriz métrica es perfectamente simétrica, da igual la orientación… pero ojo, que aquí hay algún giro raro… hay que estar atento y revisar si es necesario…

$$e_2 = \delta_{21} \cdot e^1 + \delta_{22} \cdot e^2$$

Podemos sustituir para llegar desde:

$$\vec{v} = 5e_1 + 7e_2$$

Hasta:

$$\vec{v} = 5(\delta_{11} \cdot e^1 + \delta_{12} \cdot e^2) + 7(\delta_{21} \cdot e^1 + \delta_{22} \cdot e^2)$$

$$\vec{v} = 5\delta_{11}e^1 + 5\delta_{12}e^2 + 7\delta_{21}e^1 + 7\delta_{22}e^2$$

$$\vec{v} = (5\delta_{11} + 7\delta_{21})e^1 + (5\delta_{12} + 7\delta_{22})e^2$$

$$\vec{v} = (5 \cdot 3 + 7 \cdot 1)e^1 + (5 \cdot 1 + 7 \cdot 3)e^2$$

$$\vec{v} = 22e^1 + 26e^2$$

Es decir, que el vector (ojo, es el mismo, no ha cambiado absolutamente en nada) visto desde el punto de vista de la Base Natural es:

$$\vec{v} = 5e_1 + 7e_2$$

Y desde el punto de vista de la Base Dual es:

$$\vec{v} = 22e^1 + 26e^2$$

Esto nos va a ser de vital importancia para poder desarrollar los nuevos tipos de transformaciones lineales que vamos a necesitar para trabajar en espacios de morfología curva, cambiante, no planos, pues vamos a tener que trabajar en espacios con bases diferentes.

Además, y esto es fundamental, esta ley general que hemos usado para transformar los vectores de la Base nos servirá igualmente para transformar las Coordenadas de 'Naturales' a 'Duales' (en realidad de Contravariantes a Covariantes, ya lo veremos).

En este contexto, vamos a forzar una igualdad de manera que, para un vector cualquiera, se cumpla que:

$$\vec{v} = C^1e_1 + C^2e_2 = C_1e^1 + C_2e^2$$

Ahora, recordemos la norma mediante la que transformamos los vectores de Naturales a Duales y viceversa:

$$e_1 = \delta_{11} \cdot e^1 + \delta_{12} \cdot e^2$$

$$e_2 = \delta_{21} \cdot e^1 + \delta_{22} \cdot e^2$$

Según el criterio de sumación de Einstein: $e_i = \delta_{ij} \cdot e^j$

$$e^1 = \delta^{11} \cdot e_1 + \delta^{12} \cdot e_2$$

$$e^2 = \delta^{21} \cdot e_1 + \delta^{22} \cdot e_2$$

Según el criterio de sumación de Einstein: $e^i = \delta^{ij} \cdot e_j$

Entonces, para las Coordenadas, también diremos (recordemos, estamos hablando de las coordenadas) que:

$$C_1 = \delta_{11} \cdot C^1 + \delta_{12} \cdot C^2$$

$$C_2 = \delta_{21} \cdot C^1 + \delta_{22} \cdot C^2$$

Según el criterio de sumación de Einstein: $C_i = \delta_{ij} \cdot C^j$

$$C^1 = \delta^{11} \cdot C_1 + \delta^{12} \cdot C_2$$

$$C^2 = \delta^{21} \cdot C_1 + \delta^{22} \cdot C_2$$

Según el criterio de sumación de Einstein: $C^i = \delta^{ij} \cdot C_j$

Para proceder a hacer una comprobación de que esto funciona perfectamente, recordemos la métrica y su inversa:

$$\eta = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \eta^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 & -1/8 \\ -1/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

Imaginemos ahora un vector cualquiera, por ejemplo, el mismo con el que trabajábamos antes:

$$\vec{v} = 5e_1 + 7e_2$$

Tenemos que:

$$C^1 = 5$$

$$C^2 = 7$$

Apliquemos la fórmula que hemos propuesto para la transformación de Coordenadas

$$C_1 = \delta_{11} \cdot C^1 + \delta_{12} \cdot C^2$$

$$C_2 = \delta_{21} \cdot C^1 + \delta_{22} \cdot C^2$$

Según el criterio de sumación de Einstein: $C_i = \delta_{ij} \cdot C^j$

Es decir:

$$C_1 = 3 \cdot C^1 + 1 \cdot C^2 = 3 \cdot 5 + 1 \cdot 7 = 22$$

$$C_2 = 1 \cdot C^1 + 3 \cdot C^2 = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 26$$

Que, si recordamos, coincide perfectamente con lo que teníamos:

$$\vec{v} = 22e^1 + 26e^2$$

Es decir, que dicho vector resulta que es invariante bajo estas configuraciones:

$$\vec{v} = 5e_1 + 7e_2 = 22e^1 + 26e^2$$

Por supuesto, también podemos hacerlo en sentido contrario:

$$C^1 = \delta^{11} \cdot C_1 + \delta^{12} \cdot C_2$$

$$C^2 = \delta^{21} \cdot C_1 + \delta^{22} \cdot C_2$$

Según el criterio de sumación de Einstein: $C^i = \delta^{ij} \cdot C_j$

Es decir:

$$C^1 = \left(\frac{3}{8}\right) \cdot 22 + \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot 26 = 5$$

$$C^2 = \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot 22 + \left(\frac{3}{8}\right) \cdot 26 = 7$$

Q.E.D.

Este tema suele presentarse de una manera muy confusa en todos los manuales y referencias que hemos consultado. Creemos que a lo largo del desarrollo de los siguientes conceptos, toda duda va a quedar perfectamente aclarada. Es más, lo aseguramos.

2.1.4. Coordenadas Contravariantes y Coordenadas Covariantes.

En este epígrafe vamos a tratar de evitar y, en su caso, aclarar una serie de confusiones terminológicas que podrían retrasar enormemente el avance de nuestro proyecto. El tema que vamos a abordar ahora es tan simple que, precisamente por eso, acaba enredándose, no por la dificultad del contenido, sino por la inespecificidad de la terminología empleada que es absolutamente errática y cambiante.

Lo primero que vamos a hacer, para desarrollar este epígrafe, es reflexionar acerca de la idea que seguramente tengamos en la cabeza de lo que es un vector. Un vector no es, sólo, una especie de flecha que podamos asociar a una magnitud física como una fuerza, una aceleración, una velocidad, etc… En todo caso podríamos decir que una magnitud como aquellas que hemos mencionado se pueden representar matemáticamente como un vector pero hay que tener claro que la viceversa no agotaría la definición de vector. El vector es mucho más que una "flecha". El vector es una entidad matemática, un paquete de información compacto, que puede desempeñar numerosos roles.

Si profundizamos un poco a la hora de definir rigurosamente un vector (especialmente en espacios no euclídeos), tendremos que hacer referencia al modo en que se ha construido, es decir, analizar si está conformado de una manera ***contravariante*** o ***covariante***. Este concepto va a ser fundamental para poder comprender lo que es un ***Tensor***.

En muchísimos sitios vemos (y seguiremos viendo) utilizar la expresión "vectores contravariantes" o "vectores covariantes" pero, bajo nuestro punto de vista, esto es un mal uso de las expresiones contra/co-variante. Los vectores no son ni contravariantes ni covariantes. Los vectores son entidades autónomas, sujetos de los que no se pueden predicar tales expresiones. Lo que es contravariante o covariante son las coordenadas desde las que se conforma el vector, pero no el vector. El vector es, digamos, una realidad externa que expresamos mediante un ***idioma*** que puede ser contravariante o co-variante. La expresión que damos del mismo es lo que es 'contra/co.'; el modo en que lo expresamos es lo que es 'contra/co.' pero, en ningún caso, el vector en sí mismo. Como decimos, es muy importante tener claro que no es un predicado que podamos referir al sujeto vector, sino a sus coordenadas (la literatura que existe se empeñará continuamente en confundir las cosas).

Por otro lado, antes de proceder a desarrollar el concepto de Coordenada Contravariante/Covariante, es interesante estar alertado de que se presenta de una manera muy confusa en prácticamente la totalidad de referencias que hemos manejado. Esto es algo bastante irritante a la hora de comprender los fundamentos básicos de la Teoría de la Relatividad General pues la comprensión de estos conceptos es fundamental para alcanzar con éxito nuestro objetivo principal. Para tratar de manejar todas las dimensiones posibles del concepto vamos a realizar, en primer lugar, una exposición tal y como se suele recoger en los manuales más claros que hemos consultado y, posteriormente, haremos unas aclaraciones por nuestra propia cuenta que nos permitirán contextualizar lo expuesto y, así, poder manejar intuitivamente los nuevos conceptos. Por otro lado, es posible que en ocasiones veamos, en diferentes manuales, un uso semánticamente idéntico de la palabra "coordenadas" y la palabra "componentes". Es posible que, en ocasiones puntuales, lo hagamos también nosotros si favorece al carácter intuitivo de nuestra exposición, aunque

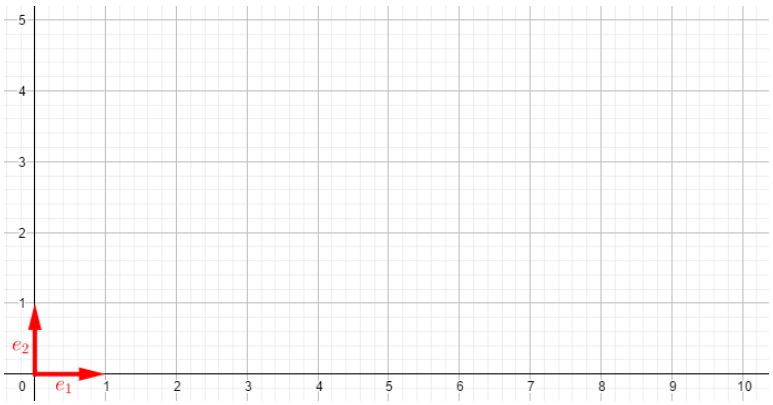
trataremos de usar siempre la palabra "coordenadas" porque no compartimos que sea exactamente un sinónimo de la palabra "componente"[22].

A pesar de que en el tipo de esquemas que vamos a usar a continuación suele subyacer la mayoría de las malinterpretaciones que hemos encontrado a lo largo de nuestro estudio, vamos a mantenerlo en vez de 'corregirlo' para familiarizarnos con la metodología que vamos a encontrar en los manuales al uso.

Ahora, para comprender la diferencia que existe entre los dos tipos de Coordenadas es fundamental analizar el modo en que se usan. Para ello, momentáneamente, es necesario que nos olvidemos de las diferencias que ya conocemos entre Base Natural y Base Dual. Cuando a continuación usemos la expresión Base, pensemos en ella en términos genéricos: una base cualquiera.

A- Veamos cómo se define una '***Coordenada Contravariante***' (y por qué se le llama '***contra***-variante'). Esto está estrechamente ligado a la construcción de un vector mediante una ***Combinación lineal*** de otros vectores que conforman la base.

Para empezar recordemos por un momento el siguiente escenario de un plano bidimensional cartesiano en el que, según la propia naturaleza del espacio, los **ejes son perpendiculares** entre sí y en el que, por lo tanto, se define una base cuyos vectores son, obviamente, linealmente independientes $\{e1, e2\}$ (nótese que no ponemos ni subíndices ni superíndices) y, debido a la naturaleza del espacio, **los vectores de la base son, además, perpendiculares** entre sí:

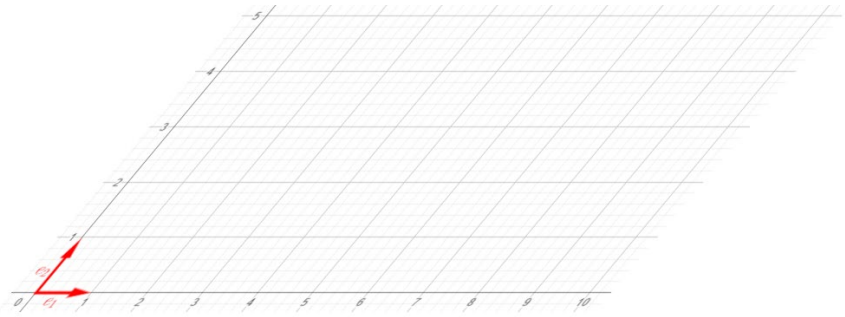


Hasta aquí no nos encontramos con nada que no hayamos visto ya miles de veces anteriormente.

Sin embargo, modifiquemos un poco el escenario. Hagámoslo un poco más 'raro'. Supongamos que el espacio que tenemos (ya hemos visto alguna cosa parecida) es, en cierto modo, 'oblicuo' y 'el *ángulo ortogonal* más amplio posible' entre dos vectores

[22] Bajo nuestro punto de vista, si bien la palabra 'coordenada' tiene una vinculación semántica inequívoca con la cuadrícula, rejilla, que da soporte a nuestras estimaciones geométricas, la palabra "´componente" tiene mayor cercanía semántica al concepto de vector.

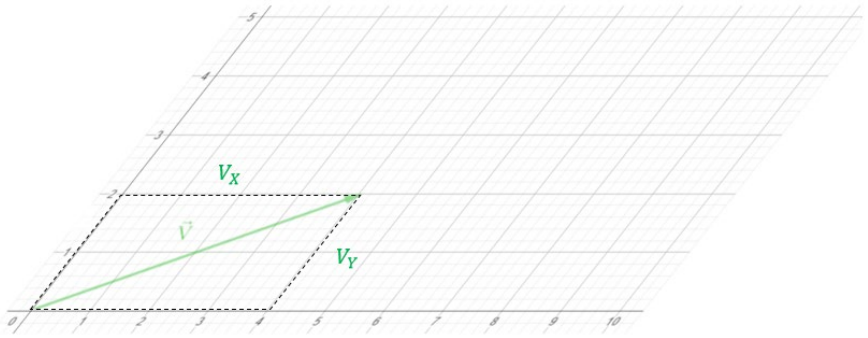
no llega a los 90º sino que es menor. Algo así como que el espacio está 'como doblado hacia la derecha':



(OBSERVACIÓN 1. La no ortogonalidad de los ejes x *e* y ***no*** *es debido a una simulación de perspectiva sino que, recordemos, en este caso, el eje* x *e* y *no forman un ángulo de 90º grados)*

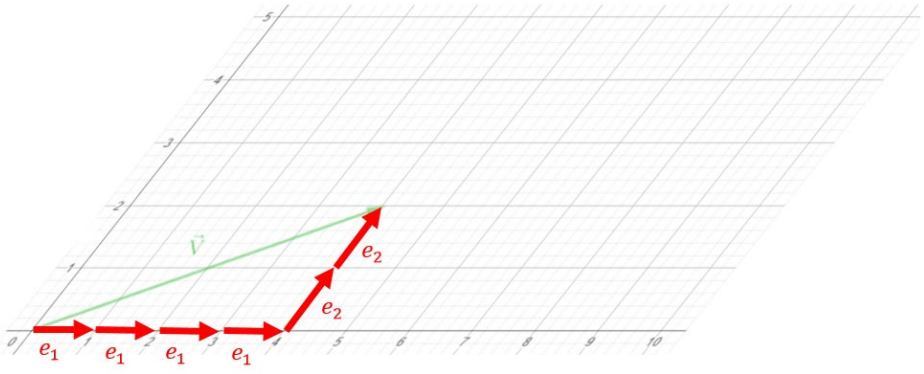
(OBSERVACIÓN 2. Supongamos que el máximo grado ortogonal en este espacio sean, por ejemplo, 60 º. Sería erróneo pensar que el ángulo suplementario (para cubrir dos cuartos de giro de circunferencia) al de 60ºque hacen los vectores base $\{e1, e2\}$ *es de 120º, pues en dicho caso, realmente, el espacio sería un espacio cartesiano normal y corriente. El ángulo suplementario al que forman los vectores base sería el resultante de, imaginemos, 'agarrar' la base* $e2$ *y rotarla hasta generar otro ángulo de 60º, ése es el suplementario. Claro, en un espacio así, si volvemos a repetir la operación con el nuevo ángulo para conseguir, ahora, su suplementario y así sucesivamente, tendríamos que su 'circunferencia' (si se define como 4/4 de giro) mediría menos de 360º, concretamente: 240º. Si girásemos hasta que el vector* $e1$ *estuviera superpuesto a su posición inicial de partida, antes de comenzar con las rotaciones, resulta que habríamos hecho más de una circunferencia normal. En este caso la circunferencia requiere 5/5 de giro ortogonal. Efectivamente, es un mundo muy raro)*

En este nuevo 'escenario deformado' no nos encontramos con los cómodos ángulos rectos de 90º que tan útiles nos suelen ser (y que tanto tiempo nos ahorran) en el plano cartesiano. Así, adquiriendo un compromiso con este nuevo escenario, nos preparamos para trabajar en él según sus propias normas internas y que nos son un poco extrañas. Si quisiéramos '*proyectar*' un vector sobre los ejes del sistema, tendríamos que hacerlo usando las normas internas de esta nueva 'República Oblicua', es decir, mediante proyecciones ***paralelas*** a los ejes que conforman el espacio de manera que, mediante la regla del paralelogramo, se conservarían los *ángulos maestros* del espacio (los que establecen los ejes) y obtendríamos algo parecido a esto:



(OBSERVACIÓN. Téngase en cuenta que nosotros, observadores privilegiados, observamos que la proyección no es perpendicular, al menos, para nosotros. Los habitantes de ese espacio oblicuo, sin embargo, no observarán nada raro pues para ellos, dicho ángulo, significa 'ortogonalidad'. Nosotros desde fuera hablaremos de una proyección paralela y no perpendicular, mientras que ellos hablarán a la vez de proyección paralela y perpendicular pues, insistimos, para ellos tal ángulo supone la ortogonalidad… eso está muy bien para ellos, pero nosotros tendremos que hacer algunas conversiones para que, a nuestros ojos, todo sea coherente…ya lo veremos en las aclaraciones))

Ahora, para hallar las proyecciones axiales V_x y V_y del vector $\vec{V}$ deberíamos "acumular", ***sumar***, los vectores de la Base (recordemos, 'base en general') que tenemos para cada dimensión hasta alcanzar el punto que queremos medir, es decir, la *cabeza* del vector bajo estudio y, siempre, siguiendo los *ángulos maestros* que han predefinido los ejes del espacio:



Así, podemos expresar el vector $\vec{V}$ mediante una ***combinación lineal***, la suma, de los vectores de la Base según la siguiente expresión:

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$$

(OBSERVACIÓN: efectivamente el vector $\vec{V}$ será el resultado de una operación de suma vectorial, una combinación lineal de dos vectores que se suman (V_x cabeza ↔ cola V_y) para dar como resultado el propio vector $\vec{V}$)

Que, ahora, expresando el vector como una combinación lineal de vectores tendríamos que:

$$\vec{V} = Xe1 + Ye2, \quad \textit{donde:} \quad \begin{Bmatrix} X = 4 \\ Y = 2 \end{Bmatrix}$$

$$V_x = e1 + e1 + e1 + e1 = 4e1$$

$$V_y = e2 + e2 = 2e2$$

El vector $\vec{V}$, ya lo hemos dicho, es una entidad propia, una entidad con existencia al margen de Sistemas de Referencia, Coordenadas, etc… por lo que vamos a considerar que es constante. Y, del mismo modo, lo deberán ser sus proyecciones sobre los ejes.

Vamos a centrarnos ahora sólo en la proyección en el eje x ($\vec{V}_x$) para ver internamente cómo la hemos construido. Sabemos que la proyección $\vec{V}_x$ será un '*algo*', '*un número de coordenadas*', '*un número de veces*' el vector de la base $e1$, es decir:

$$\vec{V}_x = Xe1$$

Luego, despejando, observamos que la Coordenada (Componente) X es:

$$X = \frac{\vec{V}_x}{e1}$$

Es decir (esto es muy importante):

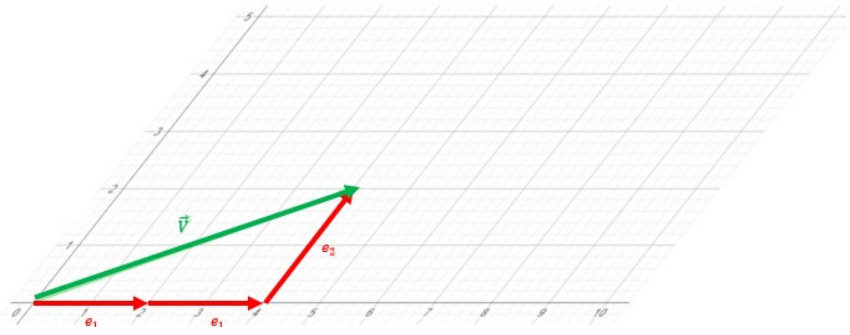
la coordenada (componente) X ***es inversamente proporcional*** *a la base* $e1$

Y justamente por esa proporcionalidad inversa, contraria, se le llama ***contra***-variante.

Esto quiere decir que, puesto que la proyección $\vec{V}_x$ debe permanecer invariable, en caso de que la Base $e1$ aumente, X debe decrecer proporcionalmente, para lograr que la proyección $\vec{V}_x$ permanezca invariante en su magnitud.

Vamos a verlo.

Habitualmente, para facilitar los cálculos, las bases suelen ser unitarias pero, ¿y si, por los motivos que fueran, nos conviene que el vector base mida, por ejemplo, dos unidades en vez de una?:



Ahora expresaríamos el vector según sus coordenadas contravariantes como:

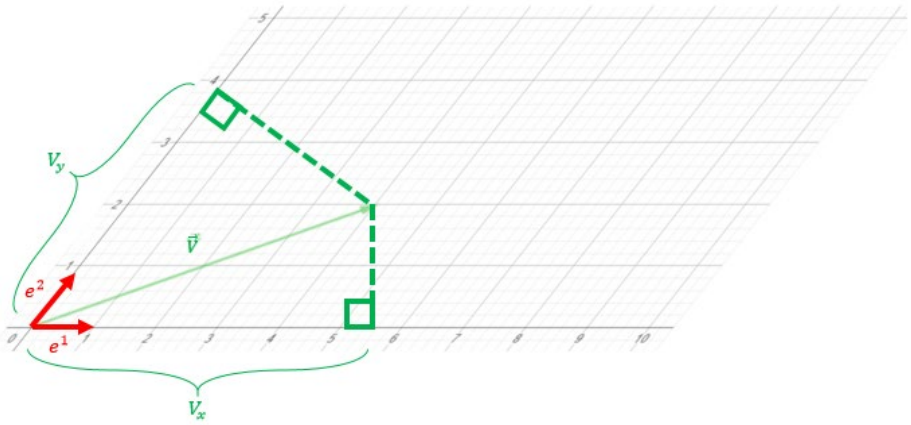
$$\vec{V} = Xe1 + Ye2, \quad \textit{donde:} \quad \begin{Bmatrix} X = 2 \\ Y = 1 \end{Bmatrix}$$

Donde, efectivamente, observamos que la magnitud tanto la coordenada X como la Y ha decrecido (como era de esperar si aumentaba el tamaño de los vectores de la

base). Así, cuando el tamaño del vector de la base aumenta, el número de veces que hace falta para que cumpla su objetivo (medir la magnitud de la proyección), el número de coordenadas que hay que acumularlo, decrece. Repetimos: cuando la base ***crece***, la Coordenada Contravariante ***decrece***. Base y Coordenada van al ***contrario***. Por eso, vamos a llamar a las Coordenadas empleadas según este procedimiento: ***Coordenadas Contravariantes***.

B- Veamos ahora, por otro lado, cómo se define una '***Coordenada Covariante***' (y por qué se le llama '***co***-variante'). Esto está estrechamente ligado a la construcción de un vector mediante una ***Transformación lineal*** de otro vector[23].

En este caso vamos a 'forzar' que la proyección de nuestro vector $\vec{V}$ sea verdaderamente perpendicular (al menos según nuestro punto de vista) a su eje de proyección correspondiente (en realidad no se proyectaría sobre el eje, sino sobre la línea por la que discurre el vector de la base que, a excepción de un sistema cartesiano, nunca coincide entre Bases Naturales y Bases Duales… pero no nos anticipemos… que si no el asunto se embrolla… esperemos a las aclaraciones). Es decir, vamos a imponer que se proyecte según los 90º de 'nuestro mundo' a pesar de que el mundo donde está el vector sea oblicuo:



Es evidente que estas proyecciones, V_x y V_y, del vector $\vec{V}$, se han definido de manera diferente a las proyecciones del caso de las Coordenadas Contravariantes y, por lo tanto, dichas proyecciones (si es que la base de ahora coincidiera en su orientación con la base anterior, cosa que ***sólo sucede en espacios de tipo cartesiano… esto puede parecer baladí pero ahora veremos en las aclaraciones que, precisamente, es parte de la madre del cordero…***) tendrían distintas medidas, *caerían en puntos diferentes, en coordenadas diferentes*. Veamos cómo se han definido. Al

[23] Si bien anteriormente construíamos un vector mediante una combinación lineal (lineal en el sentido de que conservaba, digamos, las proporciones del espacio, que no lo deformaba de manera curva o 'acelerada', sino de igual manera en todas partes), ahora un vector se transforma en otro mediante la aplicación de una transformación como, por ejemplo, un producto escalar o otra función lineal cualquiera que mantenga paralelas y distancias constantes en todo el espacio.

igual que hicimos antes, nos vamos a centrar en la proyección V_x para analizar su definición.

En primer lugar, al tratarse de una proyección verdaderamente ***perpendicular*** (al menos a nuestros ojos), estamos ante una proyección, digamos, de las de toda la vida. No es que construyamos el vector mediante la combinación de otros vectores sino que estamos, directamente, transformando el vector en otros dos vectores diferentes (uno por cada proyección). Si bien antes, con las coordenadas contravariantes, teníamos que recurrir a la suma de vectores de la base para medir las proyecciones; ahora, en este tipo de proyecciones, verdaderamente perpendiculares, sabemos que podemos realizarlas mediante la aplicación del ***Producto Escalar***.

$$V_x = |\vec{V}| \cdot cos\ \alpha$$

Es decir, la proyección en el *eje* x (V_x) de un vector $\vec{V}$ es igual al módulo del vector ($|\vec{V}|$) por el coseno del ángulo que forma con el eje sobre el que se proyecta.

Para visualizar esto piénsese en que, por ejemplo, cuando el ángulo $\alpha \to 0$º, la proyección $|V_x| \to |\vec{V}|$.

Es decir, que tenemos ya el ***escalar*** de la magnitud de la proyección V_x (efectivamente, el producto escalar arroja un resultado escalar): el escalar de la coordenada. Digamos que ya lo conocemos, que ya lo hemos fijado. Sin embargo, es un escalar, y nosotros necesitamos que tenga carácter vectorial (dirección, sentido, etc…).

Recordemos que antes, en el caso de las coordenadas contravariantes, cuando construíamos la proyección V_x ya traía, digámoslo así, un carácter vectorial, pues se había construido mediante la suma de los vectores de la base y, por lo tanto, la naturaleza vectorial ya estaba incorporada desde el mismo momento de su construcción. Ahora, en cambio, como decimos, la cuestión es que V_x, tal y como lo hemos calculado, es *sólo* un escalar, es decir, aún habría que dotarlo de un carácter vectorial. Y claro, ¿'hacia dónde va una vez proyectado'? en que nuevo vector se ha ***transformado***? Pues lo identificamos multiplicándolo por el vector unitario de la base, es decir:

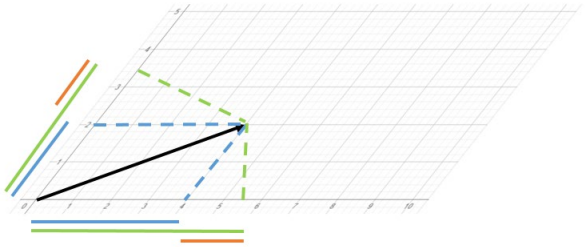
$$V_x e1$$

Entonces lo que sucede es que la magnitud de la proyección es directamente la componente (coordenada) covariante: $X \to V_x$. Digámoslo de una manera un poco informal: antes $V_x = Xe1$. Ahora, en cambio, V_x está 'en el mismo lado' de la ecuación que el vector de la base (recordemos $V_x e1$). Es decir, es ***directamente proporcional***. Cuando el vector de la base crezca, la coordenada (ya la llamamos X) también crece.

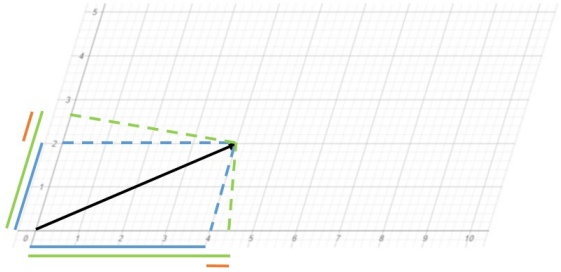
Imaginemos que el vector de la base mide 2 uds; como la coordenada es directamente la proyección sobre el eje en que está el 'vector base medidor', aquella, la propia proyección, tendrá la medida que, digamos, le toque según donde caiga el punto de corte perpendicular. Es decir (muy importante) en este caso la componente es ***directamente proporcional*** al vector de la base. Ahora, si la magnitud de los vectores de la base crece, la coordenada crece y viceversa. Por eso, por esa **co**varianza ***directamente proporcional***, a la coordenada (componente) se le llama ***coordenada covariante***.

Veamos una peculiaridad al contrastar, para un mismo vector, las proyecciones analizadas desde un punto de vista de Coordenadas Contravariantes y Coordenadas Covariantes. Para resaltar las diferencias vamos a marcar en azul las proyecciones vistas desde una perspectiva de Coordenadas Contravariantes, en verde las proyecciones desde una perspectiva de Coordenadas Covariantes y en rojo su diferencia:

Espacio Oblicuo + +:

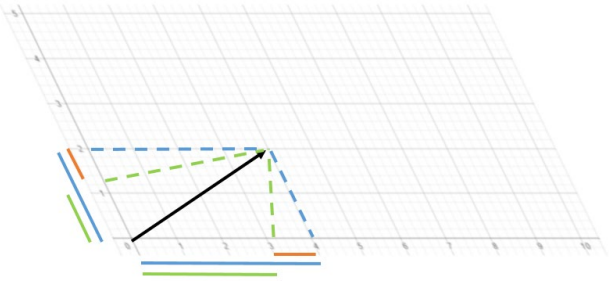


Espacio Oblicuo +:

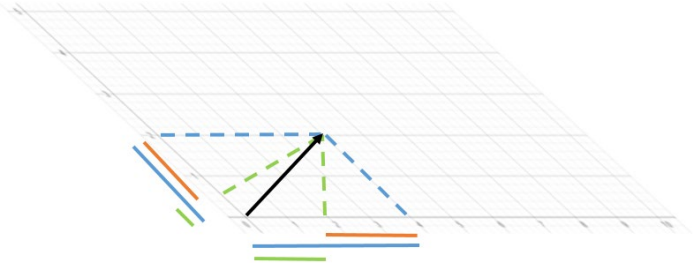


Espacio Oblicuo −:

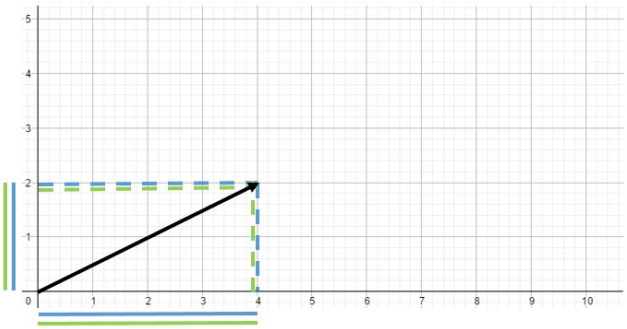
(OBSERVACIÓN: a partir de ahora, a diferencia de antes, el segmento azul es siempre más largo que el verde)



Espacio Oblicuo − −:



Como se habrá notado, nos hemos saltado el paso que hay entre los 'espacios oblicuos hacia la derecha (+)' y los 'espacios oblicuos hacia la izquierda (-)', es decir, nos hemos saltado el espacio cartesiano porque…:



… efectivamente, en este tipo de espacios, ambas componentes coinciden, por lo que no tiene sentido hacer distinciones entre Coordenadas Contravariantes y Covariantes (ni entre Bases Naturales o Bases Duales).

(OBSERVACIÓN. Es muy importante reflexionar sobre esto. En la siguiente página de aclaraciones vamos a contextualizar todo lo que hemos comentado sobre las Coordenadas pues habitualmente se presenta de un manera muy confusa. Pensemos en el modo en que se construyen, en espacios de ejes no ortogonales, las cuadrículas de coordenadas contra/covariantes y cómo se construyen las Bases Naturales y las Bases Duales. Las Bases Duales son algo así como la inversión de la Base Natural (recordemos la matriz transformadora) y, por lo tanto, deben ir acompañadas (por coherencia geométrica) de las coordenadas que permiten una proyección paralela. En espacios oblicuos, paralelismo y perpendicularidad son concepciones que presentan dificultades)

ADENDA FINAL SOBRE LOS EPÍGRAFES 2.1.3. Y 2.1.4.

Para terminar de dejar claros los conceptos de Base Natural y Base Dual, así como los conceptos de Coordenadas Contravariantes y Coordenadas Covariantes y los de métrica y transformación lineal vamos a presentar una serie de esquemas geométricos que ayuden a dejar claras tanto la relación como las diferencias que existe entre ellos.

En primer lugar, recopilemos de manera clara y distinta los elementos que vamos a considerar en esta adenda:

- ***Transformación lineal***. El producto de un vector o una matriz por otra matriz podemos visualizarlo como una deformación del vector o espacio (si es una matriz) según los parámetros que establece la matriz por la que se multiplica.
- ***Métrica***. Definición del producto escalar interno, entre los vectores de una base, de un espacio.
- ***Bases***:
    - *Natural*: aquella que está definida de manera, digamos, proporcional, directamente desde la métrica del espacio.
    - *Dual*: una base alternativa a la natural que debe cumplir que sus vectores son perpendiculares a los de la Base Natural, es decir, que se relacionen con éstos mediante la inversa de la métrica, digamos, natural del espacio.
    - *Conversión entre Bases*. Es interesante tener presente este método de conversión entre Bases que hemos visto en el epígrafe acerca de la Base Dual:

$$e^i = \delta^{ij} \cdot e_j \rightarrow e^1 = \delta^{11} e_1 + \delta^{12} e_2$$
$$e_i = \delta_{ij} \cdot e^j \rightarrow e_1 = \delta_{11} e^1 + \delta_{12} e^2$$

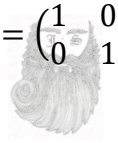
- ***Coordenadas***:
    - Contravariantes: con inversamente proporcional a la Base Natural.
    - Covariantes: son directamente proporcionales a la Base Natural.

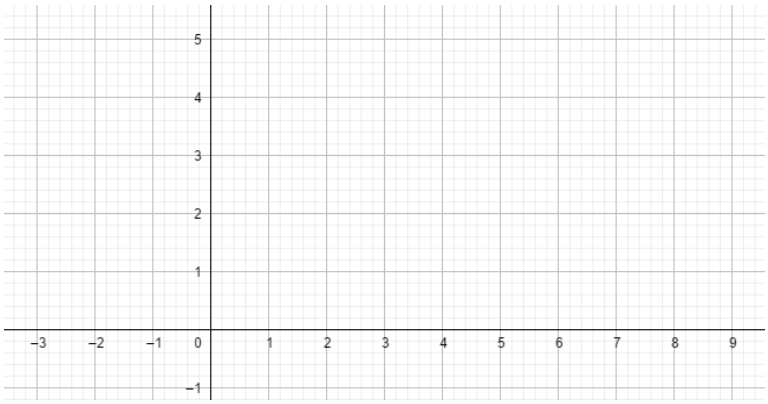
A continuación vamos a presentar un escenario *multicapa* donde, cada una de ellas, responderá a un criterio:

- Capa A: la base de referencia total, cartesiana, para que podamos manejar un idioma, digamos, unificador con el que poder expresarnos con coherencia interna (para nosotros).
- Capa B: el espacio que realmente estará bajo estudio, aquél en el que sucede el evento que queremos medir respecto a la Base Natural del espacio.
- Capa C: una capa adicional en la que representaremos el mismo fenómeno pero desde la óptica de una Base Dual, construida desde la inversa de la métrica.

En primer lugar, ya sabemos que la ***métrica*** que define una Capa Bidimensional Cartesiana (el de toda la vida) no es otra que la identidad:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$





Sin embargo, el espacio Cartesiano, debido a su propia simplicidad, a menudo se presta a confusiones ya que su métrica es, efectivamente, la matriz identidad pero… y si quisiéramos transformar un vector dentro de este mismo espacio… ¿Qué matriz emplearíamos para realizar un producto matricial y, así, una transformación lineal? Efectivamente, también la Identidad pero, ojo, ahí dicha matriz no 'ejerce' como la métrica, sino como una matriz conformada por los vectores de la base en forma de columna que, al multiplicarla por un vector o matriz, produce una transformación lineal (transformación nula, pues multiplicar por la identidad, la unida, no produce cambio alguno). Veamos un ejemplo:

Decimos que la métrica es:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero, recordemos, ¿qué es la métrica?, ¿cómo se define? Como el producto interno de los vectores que conforman su base. Algo así como el modo en que funciona el producto escalar en este nuevo espacio, es decir:

$$\eta = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}$$

$$\delta_{ij} = \vec{e_i} \cdot \vec{e_j} \begin{cases} 1, si\ i = j \\ 0. si\ i \neq j \end{cases}$$

Es decir, la métrica sería esto:

$$\eta = \begin{pmatrix} e_x \cdot e_x & e_x \cdot e_y \\ e_y \cdot e_x & e_y \cdot e_y \end{pmatrix}$$

Como sabemos que en este espacio, la Base Canónica Natural[24] Unitaria es:

$$e_x = (x = 1, y = 0) \rightarrow (1,0)$$

$$e_y = (x = 0, y = 1) \rightarrow (0,1)$$

Luego la métrica del Espacio Bidimensional Cartesiano sería:

$$\eta = \begin{pmatrix} (1,0) \cdot (1,0) & (1,0) \cdot (0,1) \\ (0,1) \cdot (1,0) & (0,1) \cdot (0,1) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, como decimos, el espacio Cartesiano es tan simple que puede jugarnos una mala pasada ya que podríamos interpretar la matriz Identidad no como la métrica sino también como la presentación de la Base bajo la forma de vectores columna que,

[24] …y Dual, claro, pues es un espacio de ejes ortogonales.

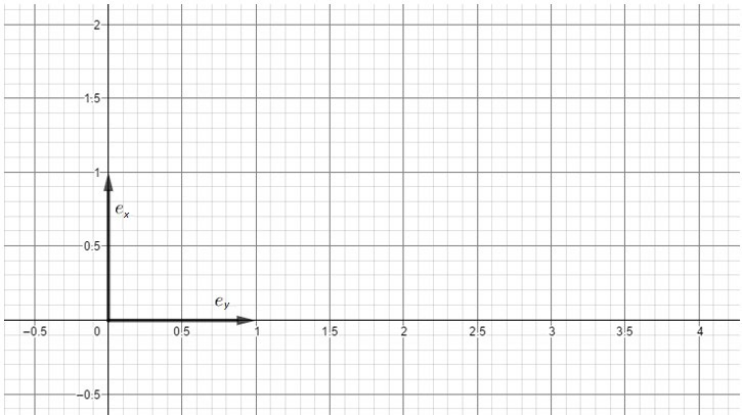
multiplicando a otro vector, provocaría una Transformación Lineal (nula en este caso, pues la Identidad no transforma nada, lo deja como está). Es decir, que la matriz identidad también podríamos verla, ojo, en el espacio Cartesiano, como:

$$I = \begin{pmatrix} \overset{e_x}{\downarrow} & \overset{e_y}{\downarrow} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, la presentación en forma de matriz de los dos vectores de la base representados como columnas.

Es muy importante saber cuándo estamos hablando de la métrica y cuándo estamos hablando de una Transformación lineal. En el caso del espacio Cartesiano, justamente debido a su simpleza, se pueden presentar confusiones. Por suerte, en otros tipos de espacios más extraños la posibilidad de confusión es mucho menor.

Así, prosiguiendo con nuestra Capa Base Cartesiana, podríamos representar la Base Canónica Unitaria como:



Supongamos ahora que, sobre esta Capa A, añadimos una Capa B (como una transparencia) que recoge un espacio cuyo origen de coordenadas coincide con la cartesiana, pero que está definida mediante una Base Natural más 'exótica' (sin pasarnos, vamos a seguir dentro del álgebra lineal, no va a haber deformaciones curvas). Supongamos que la Base Natural es la siguiente (empieza la fiesta, definimos esta Base usando la Base Cartesiana que nos sirve de referencia):

$$e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow (x = 3, y = -2)$$ [25]

$$e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow (x = 2, y = 1)$$

*(**OBSERVACIÓN**. Nótese que la base $\{e_1, e_2\}$ sigue siento **natural** (por eso sigue teniendo subíndice). Ciertamente es una base diferente a la del espacio cartesiano, puesto que el espacio sobre el que 'reina' (pues son capaces de generar otros vectores linealmente dependientes de ella) tiene una métrica diferente a la Identidad. Sin embargo, y esto es muy importante, en definitiva, su 'creación' (la de esta base que hemos dejado con subíndice y a la que hemos añadido un asterisco para hacer notar que surge de una métrica diferente y por lo tanto conforma un espacio diferente) sigue estando vinculada directamente con la propia matriz*

[25] La capa Cartesiana va a ser el 'idioma' en que expresaremos, generalmente, nuestras otras bases… algún idioma habrá que usar, ¿no?

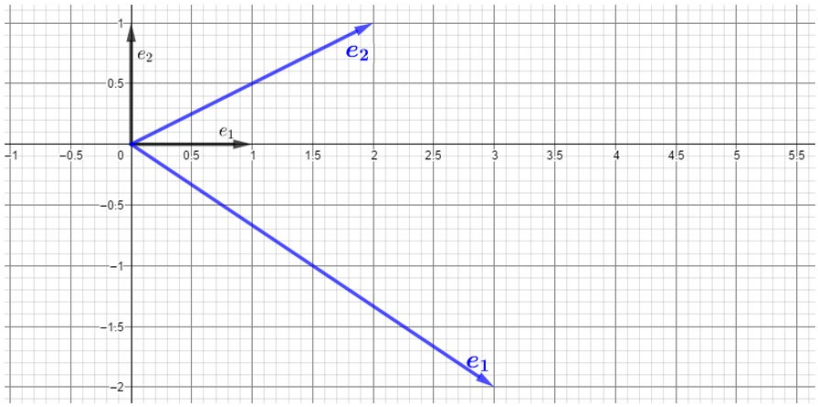
métrica de su Espacio… y no con su inversa, esto es fundamental… pero no nos adelantemos. Dejémoslo de momento en que es la Base Natural que usarán los seres habitantes de esta Planilandia Exótica Oblicua…)

Y que podemos presentar matricialmente como[26]:

$$\beta = \begin{matrix} e_1 & e_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ojo, muy importante, esto ***no es la métrica*** de este nuevo espacio. Es ***la Base*** (por eso la denominamos β) presentada matricialmente (como vectores columna). Con esta matriz podemos realizar Transformaciones lineales. ¿Qué quiere decir esto? Veamos otro ejemplo.

Introduzcámonos en el en nuevo espacio. Convirtámonos en habitantes de la nueva 'Planilandia Azul':



Como habitantes de dicho espacio nuevo, ¿cómo definiríamos nuestros vectores-base azules? Parece obvio que como:

---

[26] Cuidado que esto no es la métrica. Esto es la expresión matricial de una Base. La matriz por la que, multiplicando, aplicaremos una transformación lineal a un espacio. La métrica, ya lo vimos (y lo veremos de nuevo en breve: en la sección acerca de los Tensores), no es sino la definición del funcionamiento del producto escalar dentro de un espacio determinado. Si bien la transformación lineal, vinculada, por supuesto, a una base puede representarse como una matriz similar a ésta:

$$\begin{matrix} e_1 & e_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} \\ e_{1y} & e_{2y} \end{pmatrix}$$

En cambio, la métrica se definiría como un producto entre los vectores base, es decir, como:

$$\begin{pmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 \end{pmatrix}$$

Que en el caso del espacio cartesiano es, efectivamente (recordemos el delta de Kronecker):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_{1\ Planilandia_Azul} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$e_{2\ Planilandia_Azul} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Creemos que no será necesario pensar demasiado en esto. A modo de apunte básico, piénsese que los habitantes de tal Planilandia Azul no conocen otra cosa. No tienen la suerte que tenemos nosotros de ver la cuadrícula cartesiana de fondo. Ellos sólo ven sus propios vectores azules. Por eso lo definirán como lo han hecho.

Pero, claro, nosotros no somos habitantes de la Planilandia Azul, sino de nuestra Capa Cartesiana. Nosotros tenemos que usar nuestro lenguaje. No podemos referirnos a los vectores e_x y $e_{1\ Planilandia_Azul}$ como $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y e_y y $e_{2\ Planilandia_Azul}$ como $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ porque sencillamente sería imposible entender nada… un lío descomunal, cada uno hablando desde su perspectiva sin que nadie se enterase de nada. Nosotros usaremos siempre nuestro 'idioma' (normal, ¡no vamos a usar el de otro espacio!). Por eso hemos puesto la Capa A como base fundamental de referencia. Es decir, si quisiéramos Transformar estos vectores a la 'forma' del espacio cartesiano, podríamos usar la matriz de que disponemos como 'elemento transformador' para deformar los vectores y 'traducirlos' al idioma cartesiano. Por ejemplo, ¿en qué se transforman el e_{1P_A} y el e_{2P_A} de la Planilandia Azul cuando se les aplica la transformación lineal? O mejor, ¿cómo expresaríamos nosotros, desde la capa Cartesiana los vectores que los planilanderos azules han definido como $e_{1P_A} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y $e_{2P_A} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$? Veámoslo:

$$e_1 = \begin{pmatrix}3 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix} e_{1P_A} \rightarrow e_1 = \begin{pmatrix}3 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

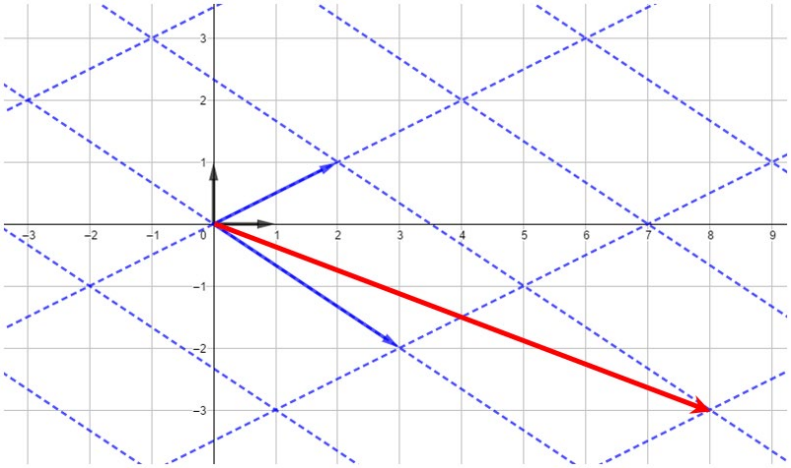
$$e_2 = \begin{pmatrix}3 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix} e_{2P_A} \rightarrow e_2 = \begin{pmatrix}3 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

Efectivamente, ¿qué idioma vamos a hablar nosotros desde nuestra posición privilegiada? Naturalmente, el nuestro. Por eso $e_1 = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ y $e_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Recordemos, de nuevo, que la Capa A Cartesiana la tenemos como "plantilla" para poder usar un idioma que sea inteligible para nosotros.

Así, siempre procederíamos, más o menos, así (veamos otro ejemplo): el vector al que ellos llaman, por ejemplo, $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, ¿cómo lo definiríamos en nuestro idioma?

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}3 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}$$

Resultado que, como podemos observar, es plenamente coherente la representación gráfica.



Insistimos de nuevo: no debemos confundir la matriz que estamos usando, una matriz vinculada a una Transformación Lineal con una matriz métrica del producto escalar en una Base determinada del Espacio. Pero, claro, podríamos preguntarnos… ¿cuál es la métrica del espacio en esta Base?

Hagamos algo de memoria. Recordemos lo que decíamos acerca de cómo se configura la matriz métrica del producto escalar:

$$\eta = \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 \end{pmatrix}$$

Mediante sencillos cálculos basados en el Teorema de Pitágoras, y que omitimos por su simpleza, hemos calculado la longitud (módulo) y ángulos que conforman los vectores del sistema de base de la Planilandia Azul:

$$e_1 = \sqrt{13}$$

$$e_2 = \sqrt{5}$$

Y ambos vectores forman un ángulo aproximado de 60º: $\frac{\pi}{3}$.

Entonces:

$$\eta = \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 \end{pmatrix}$$

Será[27]:

$$\eta \cong \begin{pmatrix} \sqrt{13} \cdot \sqrt{13} \cdot 1 & \sqrt{13} \cdot \sqrt{5} \cdot 0.5 \\ \sqrt{5} \cdot \sqrt{13} \cdot 0.5 & \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Esto es:

$$\eta \cong \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

[27] Recuérdese que el producto escalar entre dos vectores es el producto escalar entre los módulos de los vectores por el coseno del ángulo que forman. Así, Puesto que e_1 es, obviamente, paralelo a sí mismo, el producto $e_1 \cdot e_1 \cdot \cos(0) = e_1 \cdot e_1 \cdot 1 = e_1 \cdot e_1$. Y lo mismo sucederá con $e_2 \cdot e_2$.
Sin embargo, con los elementos cruzados: $e_1 \cdot e_2$, sucederá que: $e_1 \cdot e_2 \cdot \cos(\pi/3) = e_1 \cdot e_2 \cdot 0.5$ y viceversa.

Que sería, aproximadamente[28], la métrica de este espacio en esta base y que, como vemos, no parece tener mucho que ver con la matriz vinculada a Transformaciones lineales que estamos usando:

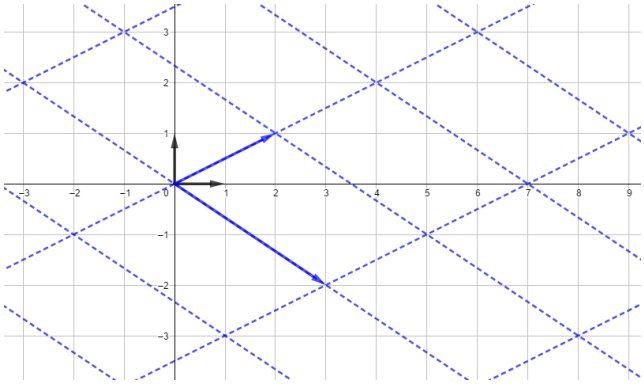
$$\begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, la inversa de esta matriz, que ya sabemos que nos puede servir para calcular la Base Dual, sería:

$$\eta \cong \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \eta^{-1} \cong \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5/49 & -4/49 \\ -4/49 & 13/49 \end{pmatrix}$$

Estas serán nuestras 'matrices métricas y su inversa' pero... ¿cómo verificarlo? Bueno, de momento olvidémoslas y prosigamos con nuestras cómodas matrices de Transformación. Ya tendremos tiempo de hacer algunas comprobaciones antes de terminar esta adenda.

Así, como decimos, olvidemos momentáneamente la matriz métrica y convenzámonos de que los vectores columnas de la matriz Transformadora definen una Base Natural[29] para esta Capa B. Insistimos, pues es muy importante, esto no es una Base Dual. Esto es una Base Natural, pues se ha creado, directamente, de los vectores de la Base Natural de la Planilandia Azul y, por eso, debemos seguir poniendo subíndice abajo. Así, para sumergirnos aún más en esta nueva Capa B y tratar de seguir pensando como pensarían los hipotéticos habitantes de esta Planilandia Azul que jamás han visto otra cosa que no sean dichos vectores azules, vamos a considerar que, para ellos, dichos vectores Base podrían ser perfectamente unitarios (imaginemos que miden cómodamente con ellos), por lo que vamos a usar sus longitudes para definir una nueva ***cuadrícula de coordenadas de referencia interna*** de dicha Capa B (para verlo medio bien vamos a hacer zoom negativo sobre la imagen que estamos presentando):



Naturalmente, si volvemos a pensar en nuestro vector $\vec{v} = 2e_1 + 1e_1 = 8e_x - 3e_y$, en todo momento, las coordenadas que han acompañado a los vectores de las Bases Naturales (tanto desde el punto de vista de la Planilandia Azul como el nuestro) se han obtenido ***proyectando***

[28] Decimos aproximadamente porque hemos tenido que redondear algunos irracionales al segundo decimal.

[29] Puesto que el determinante de dicha matriz es diferente de 0 podemos estar seguros de la independencia lineal de los vectores de dicha Base (esto es evidente por sí mismo pues si los vectores fueran proporcionales y, por ello, paralelos, el determinante sería igual a cero).

paralelamente a los ejes oportunos según fuera la base que se empleaba. Pero claro, he aquí el primer problema importante: ***¡El paralelismo no significa lo mismo en una Capa que en otra!*** Nosotros desde el Espacio Cartesiano podemos estar horas diciéndoles a los habitantes de la Planilandia Azul que su proyección no es paralela mientras que ellos perseverarán en que no tenemos ni idea de lo que estamos diciendo… ¿Qué haremos, aparte, claro está, de liarnos a hostias para ver quién tiene razón, para tener claro de qué hablamos? Nos vamos acercando a la respuesta: manejaremos diferentes bases para garantizar la proyección paralela, sea cual sea el escenario. Para ello añadamos una nueva capa con una ***Cuadrícula de Coordenadas de Referencia*** basada, ahora sí, en la ***Base Dual de la Planilandia Azul***.

Esta nueva Capa C la van a habitar también 'planilanderos' pero, que son un poco diferentes, digamos que son como zurdos, que tienden a medir las cosas de una manera diferente. En realidad, de un modo justamente ortogonal[30] a como lo hacen sus conciudadanos azules.

Con tal fin, pasemos a construir la *Base Dual de la Planilandia ésta rara en la que nos estamos sumergiendo* mediante dos procedimientos diferentes.

a) El primero, aplicando la inversa de la matriz transformadora, es decir, si antes hemos transformado en un sentido, transformemos ahora en el sentido contrario mediante, lógicamente, la transformación inversa[31].

   Para ello partamos de nuevo de nuestro cómodo Espacio Bidimensional Cartesiano (sencillamente lo estamos usando como 'cuartel de operaciones' para ir construyendo espacios coherentes) y sus amigables $\{e_x, e_y\}$ ya que, en definitiva, nosotros, ***Observadores omniscientes*** *(o pretendidamente omniscientes)****, habitamos en él***. Pero esta vez, como hemos dicho, para construir la base, como es la ***Dual***, vamos a usar la ***matriz de Transformación Lineal Inversa*** $^{\cdot}$. Así, como sabemos que:

$$\eta = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \eta^{-1\cdot} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1\cdot} = \begin{pmatrix} 1/7 & -2/7 \\ 2/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

   Y aplicando esta $Transformación^{-1\cdot}$ a $\{e_1, e_2\}$, tomamos horizontalmente los vectores de la nueva base (para entender este giro de 90º, (es indispensable leer la nota 26 o, directamente, la nota 17):

---

[30] Recordemos las condiciones sobre las que se construía una Base Dual.

[31] ***Ojo, muy importante porque esto me ha tenido loco un buen, pero que muy buen, rato*** aquí en Fuentes de León…. Paseando por el campo to loco, torciendo la cabeza para intentar orientarme con los giros XD XD … Téngase en cuenta ahora que estamos trabajando con la matriz métrica inversa extraña (recordemos el opuesto del determinante de la ***nota 17***). A esta conversión de métrica, bajo el análisis de la nota 17, la denotaremos en adelante como la ***inversa '$\cdot$'***. Para más detalles, véase la nota 17. Existe literatura sobre esto ya que la conversión entre bases es referida a una matriz del tipo: $(M^{-1})^T$. Pero, a) hemos preferido pensar por nosotros mismos sobre este asunto y b) habría que analizar bien esta literatura pues no es lo mismo una transposición que un giro de 90º… aquí hay lío…revisar con tiempo…

$$\begin{pmatrix} 1/7 & -2/7 \\ 2/7 & 3/7 \end{pmatrix} \rightarrow e^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{-2}{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/7 & -2/7 \\ 2/7 & 3/7 \end{pmatrix} \rightarrow e^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

Es decir que (obsérvese que ya tenemos superíndices, esto es realmente ya una Base Dual, pues la hemos construido desde la inversa·):

$$e^1 = \frac{1}{7}x - \frac{2}{7}y$$

$$e^2 = \frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y$$

(OBSERVACIÓN: todo, de nuevo, está en función del sistema de coordenadas primario x,y. Sin embargo, puesto que $\{e_x, e_y\}$ la hemos definido en el Espacio Cartesiano como una Base Canónica perfecta, x se equipara a e_x y a e_y, pero bueno, seguimos usando x e y porque es más consistente con el procedimiento que estamos usando).

b) Pero, recordemos el epígrafe acerca de la Base Dual. También podríamos construir la base dual mediante la inversa de la matriz métrica. Recordemos como se podía calcular la Base Dual:

$$e^1 = \delta^{11} \cdot e_1 + \delta^{12} \cdot e_2$$
$$e^2 = \delta^{21} \cdot e_1 + \delta^{22} \cdot e_2$$

Y, como conocemos la matriz métrica inversa:

$$\begin{pmatrix} 5/49 & -4/49 \\ -4/49 & 13/49 \end{pmatrix}$$

Si hemos trabajado de manera coherente, deberíamos obtener el mismo resultado. Sustituyamos y veamos[32]:

$$e^1 = 5/49 \cdot \begin{pmatrix} 3_x \\ -2_y \end{pmatrix} + (-4/49) \cdot \begin{pmatrix} 2_x \\ 1_y \end{pmatrix}$$

Esto es:

$$\boldsymbol{e^1} = \quad \frac{15}{49}x - \frac{10}{49}y - \frac{8}{49}x - \frac{4}{49}y \rightarrow \frac{7}{49}x - \frac{14}{49}y \quad = \boldsymbol{\frac{1}{7}x - \frac{2}{7}y}$$

Y:

$$e^2 = -4/49 \cdot \begin{pmatrix} 3_x \\ -2_y \end{pmatrix} + (13/49) \cdot \begin{pmatrix} 2_x \\ 1_y \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$\boldsymbol{e^2} = \quad \frac{-12}{49}x + \frac{8}{49}y + \frac{26}{49}x + \frac{13}{49}y \rightarrow \frac{14}{49}x + \frac{21}{49}y \quad = \boldsymbol{\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y}$$

Resultado que, si contrastamos con el del apartado (a), es perfectamente consistente. Podríamos hacer, también, lo contrario pues recordemos que:

$$e_1 = \delta_{11} \cdot e^1 + \delta_{12} \cdot e^2$$

[32] Ponemos un sub-x y un sub-y para poder identificar sobre qué eje es la proyección de la coordenada.

$$e_2 = \delta_{21} \cdot e^1 + \delta_{22} \cdot e^2$$

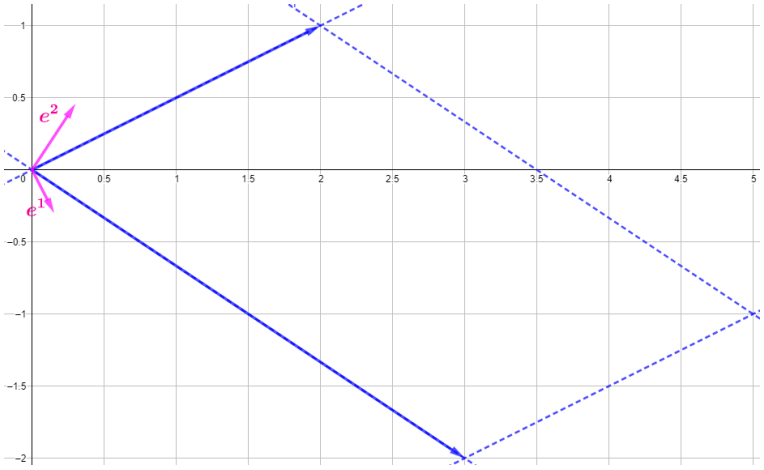
Esto es:

$$e_1 = \quad 13 \cdot \frac{1}{7}x - 13 \cdot \frac{2}{7}y + 4 \cdot \frac{2}{7}x + 4 \cdot \frac{3}{7}y \rightarrow \frac{21}{7}x - \frac{14}{7}y = \quad 3x - 2y$$

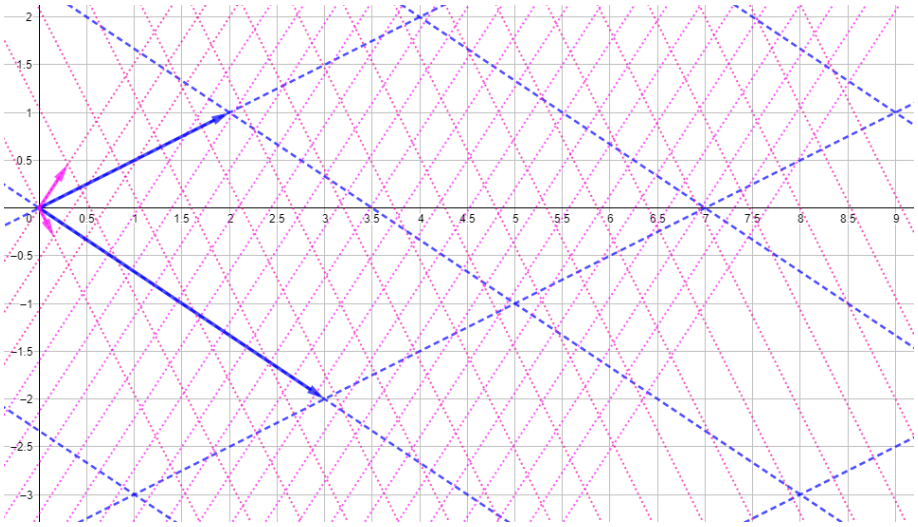
$$e_2 = \quad 4 \cdot \frac{1}{7}x - 4 \cdot \frac{2}{7}y + 5 \cdot \frac{2}{7}x + 5 \cdot \frac{3}{7}y = \frac{14}{7}x + \frac{7}{7}y = \quad 2x + 1y$$

Que, efectivamente, coincide con lo que esperábamos.

Entonces, llegados a este punto, dibujemos, aunque sea aproximadamente, dicha Base Dual (marcándola en color rosa para distinguirla de las otras dos rejillas ya presentes) en nuestro esquema (hacemos zoom positivo a la imagen para apreciarlo, pues la Base Dual es pequeña en comparación de las otras bases):

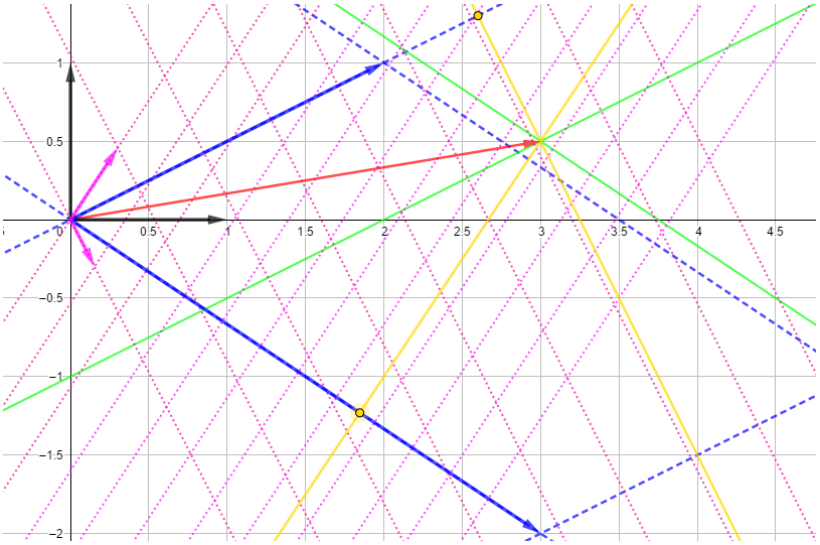


Y ahora, al igual que hicimos con la Base Natural de la Planilandia Azul, hagamos una ***Cuadrícula de Coordenadas de Referencia Relativas a la Base Dual*** $\{e^1, e^2\}$. Para ello usaremos el color rosa (se va a embarullar un poco, pero es muy interesante poder ver todas las capas juntas):



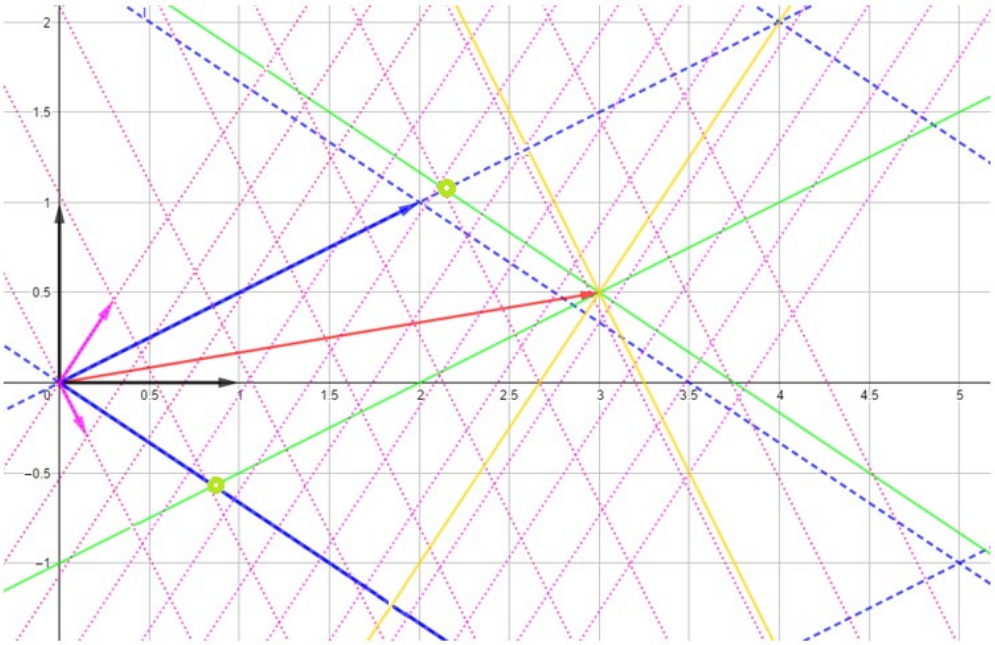
Y ahora, fijémonos (si no lo hemos hecho ya) en cómo se relacionan las rejillas rosa y azul… ¡Fantástico! Ya empezamos a ver algo… resulta que, previsiblemente, lo que es paralelo para

una capa es perpendicular para la otra otro (no en vano, recordemos cómo hemos construido la Base Dual respecto a la Base Natural). Digámoslo así: *si bien la cuadrícula azul sobre la base azul permite una proyección paralela sobre la base azul, dicha cuadrícula permite proyecciones perpendiculares sobre la base rosa (y viceversa).*



¡Efectivamente! Observamos perfectamente que la proyección "desde el mundo Dual" sobre el "mundo Natural" es ***Perpendicular***. ¡***Y viceversa***! La proyección verde ahora es perpendicular al "mundo dual".

Es decir, debido al modo en que hemos construido la Base Dual y la Base Natural, las proyecciones que vienen de un lado y del otro son perpendiculares. Internamente, lo que nos interesa ahora, es haber conseguido ***mantener el paralelismo*** para construir vectores mediante combinaciones lineales en un sistema con bases alternas. Bases alternas que podremos usar según convenga a las necesidades de medición que diferentes objetos en el sistema presenten.



(OBSERVACIÓN. Lamentablemente en el esquema anterior no hay espacio para que se vea la proyección amarilla, pero podemos imaginarla…)

A- Si queremos ***garantizar la proyección paralela*** (y la Combinación lineal) ***sobre la Base Natural*** (la Azul), ¿qué cuadrícula de coordenadas debemos usar para construir la componente? Pues la Cuadrícula azul generada por su propia Base.

*Y esa componente será Contravariante en relación a la Base Dual que es covariante respecto a la Base Natural. Y ahí radica muchísima confusión, que se mezclan, continuamente, la covarianza y la contravarianza de un sistema y de otro sin saber muy bien sobre quién c*** es Covariante y/o Contravariante.*

$$\vec{V} = C^1 e_1 + C^2 e_2$$

B- Si, inversamente, queremos ***garantizar la proyección paralela*** (y la Combinación lineal) ***sobre la Base Dual*** (la Rosa), usaremos la cuadrícula rosa.

$$\vec{V} = C_1 e^1 + C_2 e^2$$

Para terminar de aclarar todo este asunto, centremos nuestra atención una última vez en los conceptos de paralelismo y perpendicularidad. ¿Qué interés tiene manejar dos bases que son ortogonales entre sí? Garantizar la invarianza de una entidad bajo diferentes sistemas coordenados.

Claro, en el Sistema Cartesiano lo que es perpendicular para un eje es automáticamente paralelo para el otro. Sin embargo, en Espacios 'Oblicuos', la cosa se complica. Ahora lo que pasa es que las cosas son paralelas respeto a una base y perpendiculares respecto a otra base y, de ahí, que sea covariante/contravariante de manera alterna según se mire. El resumen que debemos hacer por el momento es que nosotros proyectamos desde la cuadrícula 'azul' en los ejes por los que discurre la base 'azul' (y viceversa).

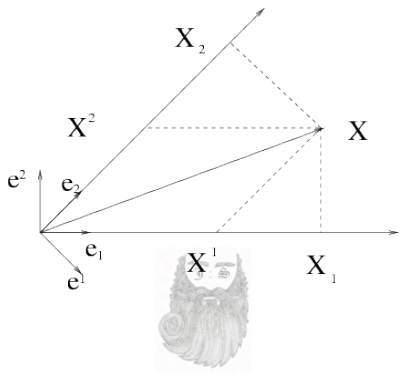
Así, y para dar una última pauta que garantice que este asunto queda perfectamente claro vamos a hacer un último resumen. Sentimos ser tan pesados, seguramente ya se comprenda perfectamente, pero como este asunto suele estar muy mal explicado en todas las referencias que hemos consultado, y tenemos la sensación de que puede estar pasándonos lo mismo, vamos a insistir una vez más por si acaso aún no nos hubiéramos expresado con claridad.

Sabemos que en un Sistema Coordenado Cartesiano no existe ambigüedad a la hora de considerar paralelismo y perpendicularidad cuando se realizan proyecciones.

Sin embargo, cuando trabajamos con espacios deformados en los que dicha ortogonalidad se ha perdido, nos encontramos con el problema de tener que aclarar un par de cuestiones:

- Paralelo a ¿qué eje? ¿A qué base?
- Perpendicular a ¿qué eje? ¿A qué base?

Mirando el esquema de abajo entenderemos perfectamente a qué nos referimos.



Y, justamente, en este esquema se refleja una respuesta que, a menudo, se omite en casi todas las referencias consultadas. Obsérvese que, digamos, hemos *bautizado (pues las hemos dotado de superíndice (contravariante) y subíndice (covariante))* las componentes o coordenadas como Contravariantes o Covariantes ***con respecto a la Base Natural Principal***. Claro, en la mayoría de los textos se dice, así en genérico, que cada Base tiene su contravariante y su covariante pero, claro, si seguimos esta definición al pie de la letra, nunca llegaremos a un acuerdo porque lo que es una cosa en un sistema en el otro sistema cambia y nunca podremos llegar a un acuerdo. Gran parte de la confusión se genera en que no se aclara bien este concepto que nosotros, aquí, queremos dejar perfectamente claro: que las ***Coordenadas son Contravariantes o Covariantes respecto a la Base Natural***… y ya, después, una vez le hemos asignado superíndice o subíndice, construimos el resto de nuestro discurso asignándoselas a una base u otra. Esto es la clave de toda confusión. ***Las Bases siempre trabajan con una Coordenada que es Contravariante respecto a ella y que permite proyecciones paralelas y combinaciones lineales.***

Así, el vector $\vec{X}$ se podrá expresar de dos maneras diferentes:

$$\vec{X} = X^1 e_1 + X^2 e_2$$

$$\vec{X} = X_1 e^1 + X_2 e^2$$

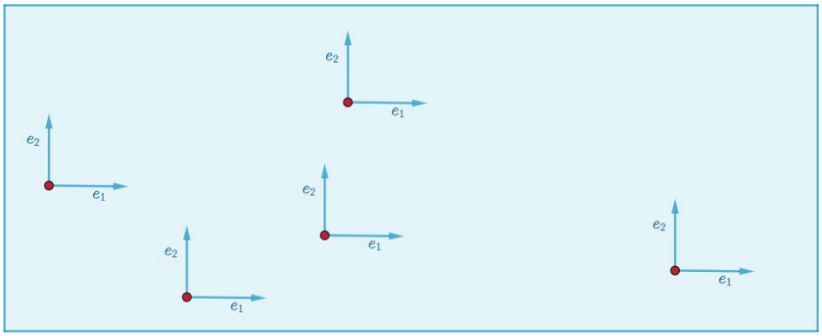
De manera que en ambos casos conservamos la ***proyección paralela*** y la posibilidad de definir vectores mediante ***Combinaciones Lineales*** de los vectores de la Base aplicada al efecto.

Sencillamente, cuando los espacios son 'como oblicuos' lo que sucede es que, si nos quedamos sólo en el espacio con la Base Natural, observaremos que, al haberse fastidiado la relación paralelo/perpendicular que existía en el cómodo espacio cartesiano, las proyecciones paralelas y perpendiculares X^i y X_i, dejan de ser iguales. Claro, ***¿para qué hacemos todo esto de crear bases duales?*** Sencillamente, esto surge de hacernos una pregunta: visto que la proyección X_i es perpendicular a la Base Natural pero no paralela…¿No habrá otra base en la que dicha proyección sí sea paralela pero no perpendicular? Pues, esa base, efectivamente existe y es la Base Dual que, como sabemos, hemos construido siendo perpendicular a los vectores de la Base Natural de manera que, justo por eso, permitirá sobre sí las proyecciones paralelas y no perpendiculares que antes eran no paralelas pero sí perpendiculares a la Base Natural. ***La proyección paralela que permita la definición de vectores mediante una Combinación lineal de vectores de la Base es la garante de la inteligibilidad de las medidas desde diferentes puntos de referencia.***

2.1.5. Bases Coordenadas.

(OBSERVACIÓN. Es muy importante no confundir el salto entre sistemas de Bases Coordenadas con las Bases Naturales /Duales de un sistema. Pensemos en estos términos: podemos pasar de un Sistema con Base, sigamos, Cartesiana a otro Sistema de Base Coordenada mediante una serie de algoritmos que vamos a ver en este epígrafe. Ya después, una vez insertos en el Sistema de Base Coordenadas en que estemos, podremos movernos entre la 'visión de Base Natural y Base Dual' según el procedimiento que hemos visto en el epígrafe anterior acerca de la Base Dual.)

Hasta ahora hemos trabajado con espacios euclídeos (o 'cuasieuclídeos' en el caso de Minkowski). Han sido espacios que presentan una morfología plana, constante, homogénea en todos sus puntos de manera que, para cada región de la variedad estudiada se podía usar una misma Base Vectorial pues ésta funcionaría perfectamente en todos los puntos del espacio.



Así, las métricas que hemos manejado para describir estos espacios, han sido matrices métricas cuyos miembros han sido constantes, invariantes para cualquier zona de la variedad. Por ejemplo:

- Espacio euclídeo de 2 dimensiones:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Espacio Euclídeo de 3 dimensiones:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

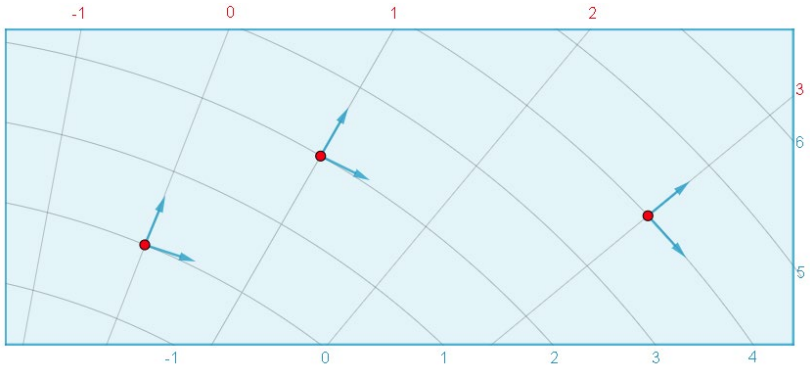
- Espacio 'cuasieuclídeo' de 4 dimensiones de Minkowski:

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En estas variedades 'planas', como ya hemos visto, la Base es igual en todos y cada uno de sus puntos.

Sin embargo, pensemos en una variedad cuya morfología requiera incluir un miembro cambiante, por qué no una función, entre los elementos que componen su métrica. Imaginemos, por ejemplo, una variedad cuya naturaleza requiera ser representada según un modelo coordenado como el siguiente:

(OBSERVACIÓN: en rojo la numeración de las coordenadas de las rectas/ en azul las coordenadas de las curvas)



Las bases, obviamente, no son iguales en todos los puntos del plano y el comportamiento del espacio en diferentes zonas del espacio no es constante, homogénea, como las que hemos estado viendo hasta ahora. En tal sentido, la base se construirá a partir de las coordenadas de los puntos de la variedad ya que ésta será diferente para cada uno de los puntos, por ejemplo, (0,0), (2,1), (4,3) de nuestro modelo. En dicho sentido, al conjunto de las bases definidas a partir de las coordenadas de una variedad (pues dependen de ellas) se le denomina ***Bases Coordenadas*** (***una base*** que ***es diferente según*** sea la ***coordenada***).

Vamos a trabajar en un amplio ejemplo con un sistema de dos funciones[33], con dos variables independientes, que definirían el modo en que se comporta un espacio. Dichas variables no

---

[33] Una de las herramientas fundamentales que vamos a usar es la derivación implícita (para más detalles consúltese el Apéndice I. Acerca del Cálculo Diferencial e Integral). Si bien ya debemos saber qué es y cómo se emplea, puesto que en nuestro texto queremos desarrollar in situ cada procedimiento empleado, vamos de desarrollarlo muy esquemáticamente mediante un ejemplo en esta nota.

Supongamos que tenemos una función, por ejemplo:

$$f(x) = x^2 + 5$$

Lo que habitualmente se hace es derivar la función en función de x, es decir:

- Siendo x la variable independiente: es decir, la que cambia libremente y,…
- Siendo $f(x)$ la variable dependiente: es decir, la que cambia dependiendo de los cambios 'soberanos' de x.
- La derivada de f en función de x es:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(x^2 + 5)$$

De manera que:

$$\frac{d}{dx} f(x) = 2x$$

Pero, ¿y si nos piden $\frac{dx}{df}$? En este caso, los papeles se invierten pues ahora:

- la función f es la variable independiente,

- y, x es la variable dependiente (sería una especie de $x_{(f)}$)

Esto, visto el escenario en que nos vamos a sumergir, tiene todo el sentido del mundo pues, piénsese que el espacio en que nos vamos a mover es un espacio cambiante como, por ejemplo, una curva, de manera que la función que describe el modo en que cambia puede ir cambiando dependiendo de la coordenada (x) en que centremos nuestra atención.

Ahora, como decimos, el escenario está invertido de manera que para proceder a desarrollar esta derivada implícita tendríamos que despejar, en primer lugar la x. Es decir, poner a la x en función de f realizando algo parecido a esto:

$$f(x) = x^2 + 5$$

$$x^2 = f(x) - 5$$

$$x = \sqrt{f(x) - 5}$$

Esto nos deja una x en función de f y una f como variable libre, es decir, algo como:

$$x_{(f)} = \sqrt{f - 5}$$

Ahora, sencillamente, podríamos hacer la derivada de x en función de f, que no reviste secreto alguno (hemos de aplicar la regla de la cadena):

$$\frac{d}{df}x = \frac{1}{2\sqrt{f-5}} \cdot \frac{d}{df}(f - 5)$$

$$\frac{d}{df}x = \frac{1}{2\sqrt{f-5}} \cdot 1$$

$$\frac{d}{df}x = \frac{1}{2\sqrt{f-5}}$$

Si ahora sustituimos f por lo que era antes de cambiarnos al 'mundo invertido', tendríamos que:

$$\frac{d}{df}x = \frac{1}{2\sqrt{(x^2+5)-5}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2}} = \frac{1}{2x}$$

Esto se puede hacer siempre que podamos despejar la x, aislarla, e igualarla a la función. Pero habrá casos, por ejemplo, en las funciones no polinómicas, en que la cosa no va a ser posible. Para estos casos se usa este método más general:

$$f = x^2 + 5$$

$$\frac{d}{df}f = \frac{d}{df}(x^2 + 5)$$

$$1 = \frac{d}{df}x^2 + 5$$

Que aplicando la regla de la cadena (pensemos que x está en función de f) nos queda como:

$$1 = 2x \cdot \frac{dx}{df}$$

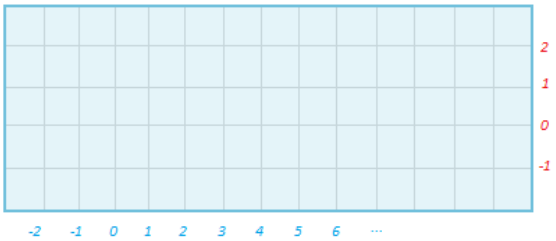
Y si despejamos lo que hemos marcado en rojo, nos queda, efectivamente:

$$\frac{dx}{df} = \frac{1}{2x}$$

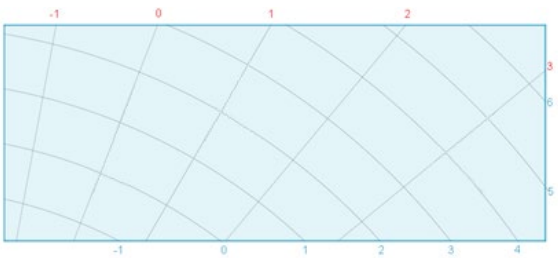
serán otra cosa que las coordenadas x, y que cambiarán y, colateralmente, producirán un cambio, mediante las funciones $f_{(x,y)}$y $g_{(x,y)}$, en el espacio en que rigen las Coordenadas f, g y que se han construido, a partir de dichas funciones, para definir justamente una ***Base Coordenada***[34]. Procedamos con un ejemplo más o menos simple.

---

[34] Ciertamente, una base que cambia según sean las coordenadas x, y.
Cuidado con esto no nos liemos. Lo que cambia es la base según sean las coordenadas, no las coordenadas en sí… A ver, expliquemos esto porque es francamente importante. Imaginemos dos capas (dos espacios): una con un espacio bidimensional cartesiano y otra con un espacio bidimensional de morfología elíptica. En cada espacio, la coordenada, por ejemplo, $(x = 0, y = 0)$ será su propio origen en ambos casos (de hecho, lo normal es que en muchos casos ambas capas, ambos espacios, en dicho punto se toquen como punto mínimo de pivote, de anclaje, …). Es decir, cada coordenada en una capa tiene su reflejo, su punto análogo, en la otra capa. La capa cartesiana tendrá su coordenada (1,1) y la capa 'rara' también tendrá su (1,1). La cuestión importante radica en cómo se ve ese punto desde el otro sistema. Qué conversión hay que hacer para que se entiendan mutuamente, para que cada sistema pueda entender lo que se le está diciendo desde el otro. En tal sentido, por supuesto, también la base y, por lo tanto, la transformación que se defina en la capa cartesiana para una coordenada será una determinada base y transformación diferente en la misma coordenada del otro espacio. Mientras que en la capa cartesiana la base y la transformación serán iguales para todos sus puntos, en la capa elíptica, en esa misma coordenada, la base y la transformación seguramente serán diferentes pues estarán definidas por una función, efectivamente, dependiente de las coordenadas x, y.
Analicemos un poco más el asunto desde el punto de vista geométrico. Efectivamente, cada capa tendrá sus coordenadas (y su base) pero si quisiéramos superponer ambas capas e hiciéramos coincidir, por ejemplo, como decíamos, el origen de coordenadas de ambas capas… ¿Quedaría el punto, por ejemplo, (1,1) de una capa sobre el punto (1,1) de la otra capa? Seguramente no pues al ser espacios morfológicamente diferentes, los puntos de coordenadas de cada capa, a excepción del origen (0,0) (cuya coincidencia hemos forzado), se habrán empezado a alejar unos de otros debido a las deformaciones de una de las capas.
Tratemos de visualizar esto.
Si tenemos una capa cartesiana:

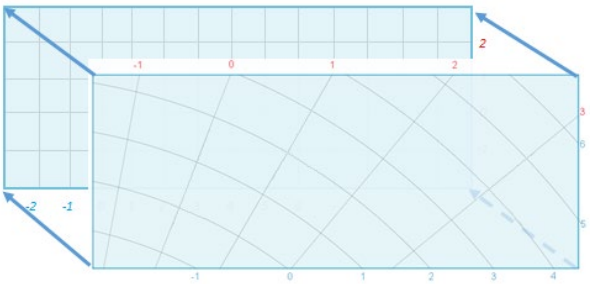


Y otra capa 'elíptica':

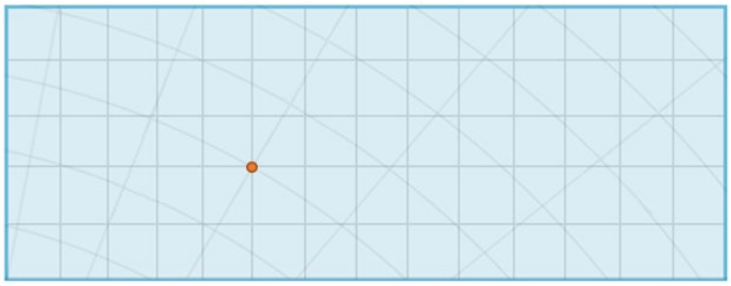


Y las superponemos de la siguiente manera (haciendo coincidir los orígenes):

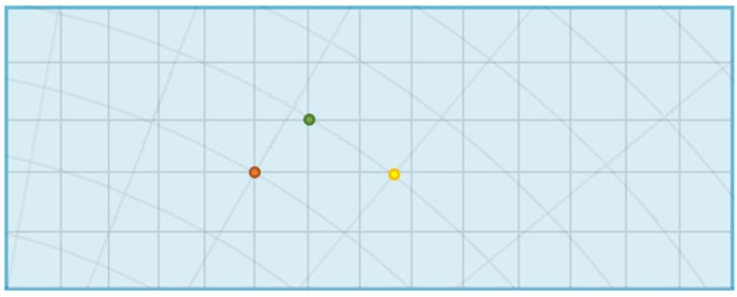
Para empezar, y teniendo en cuenta la nota 38 de este Libro II en que abordamos quizás el ejemplo más claro de lo que vamos a exponer a continuación, vamos a intentar ver, aunque sea esquemáticamente, el mundo desde dentro, desde el punto de vista de un espacio



Para que nos quede algo parecido a esto (los orígenes coinciden en el punto rojo):



Si ahora marcamos la coordenada (1,1) en el sistema elíptico con un punto amarillo y la coordenada (1,1) en el sistema cartesiano con un punto verde:



Es obvio que no coinciden a causa de la deformación que sufre la capa elíptica respecto del sistema cartesiano. De hecho, y éste es el verdadero trabajo de 'transformación':

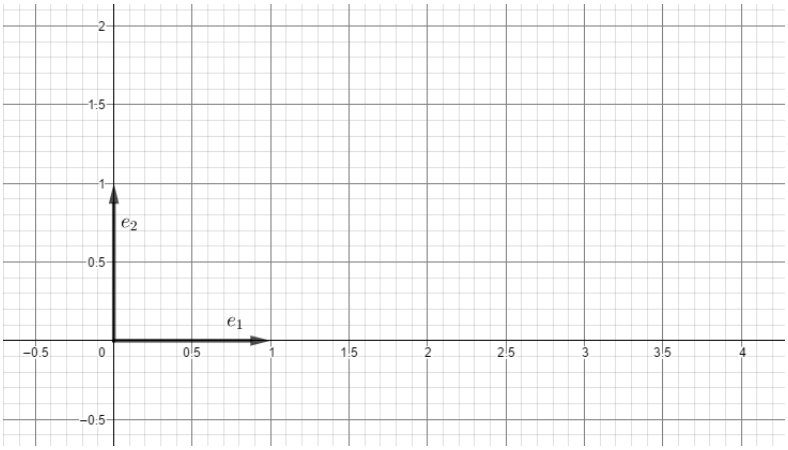
- La coordenada amarilla (1,1) del sistema elíptico sería aproximadamente la coordenada $(x = 2.7, y = 0)$ del sistema cartesiano, y…
- La coordenada verde (1,1) del sistema cartesiano sería aproximadamente la coordenada $(x = 0.2, y = 1)$ del sistema elíptico.

Teniendo esto en cuenta, si la coordenada cambia de ubicación de un sistema a otro, la base quedará, ciertamente, condicionada por este nuevo comportamiento de la métrica del espacio.

La conversión, la transformación, entre estas coordenadas (vistas desde sistema ajeno), estaría regida por las ***funciones*** que, justamente, definen las ***Bases Coordenadas***, es decir, con esas funciones podremos construir y transformar, según sea necesario, las bases vectoriales, las transformaciones espaciales y las coordenadas entre un sistema y otro.

conformado desde unas funciones f y g que definen un espacio vectorial propio muy diferente a nuestro cómodo mundo cartesiano definido por x e y. Avisamos: para poder imaginar con cierta suficiencia aquello de lo que estamos hablando vamos a usar un lenguaje muy visual ya que el asunto encierra cierta complejidad y creemos que lo fundamental es ser capaces de intuir geométricamente los fundamentos de este asunto. Ya después aportaremos la precisión algebraica.

En primer lugar imaginemos nuestro plácido mundo bidimensional cartesiano con una base vectorial (canónica: e_1:(1,0) y e_2:(0,1)) definida:

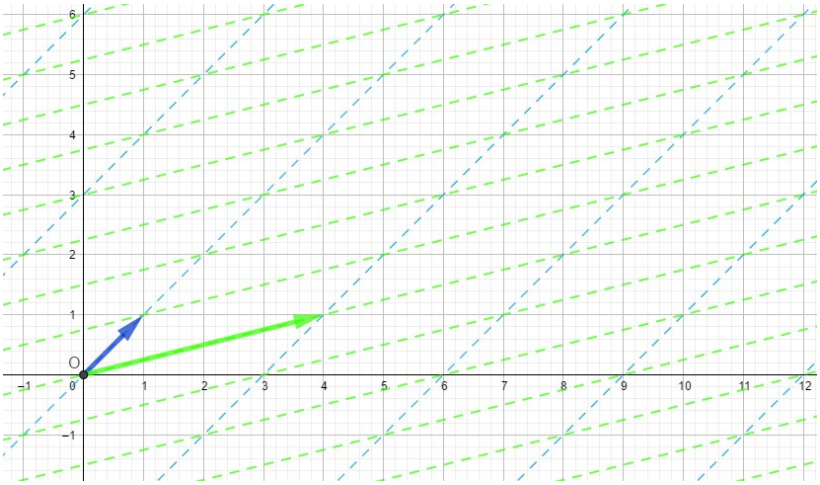


A continuación, imaginemos dos funciones simples que nos hablan de un mundo bidimensional exótico, raro, 'como torcido y estirado' al que, para ahorrarnos esfuerzo, vamos a llamar Espacio Bifuncional. Supongamos que dichas funciones, que aplican una transformación lineal, son:

$$f_{(x,y)} = x + y$$

$$g_{(x,y)} = 4x + y$$

Y el espacio que generarían tendría una cuadrícula similar a ésta:



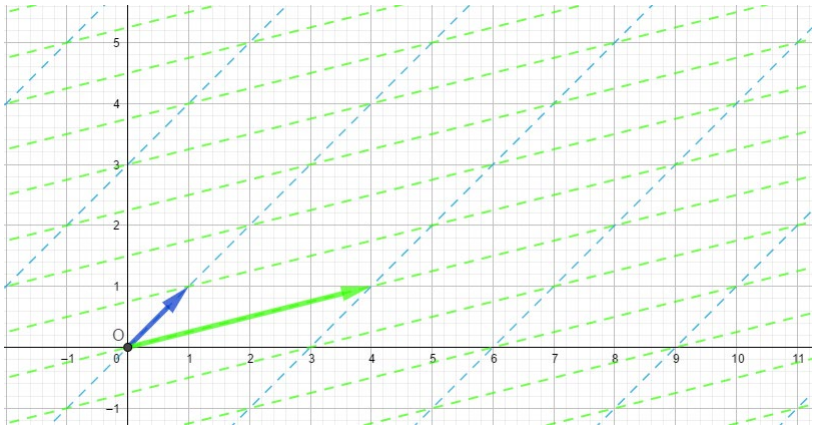
Donde hemos definido una Base Funcional Canónica (1,0), (0,1) desde el punto de vista de los '*habitantes del Espacio Bifuncional* f, g'. Sí, encontramos aquí la primera extrañeza: hemos

llamado ***unidad*** tanto al vector azul como al vector verde. Sin embargo, si imaginamos que somos habitantes de esta Planilandia, nos será fácil imaginar que para nosotros, los planilanderos bifuncionales, la unidad vertical es lo que marca el vector azul y la unidad horizontal es lo que marca el vector verde. Ciertamente, a ojos de los habitantes del mundo cartesiano, estaremos como torcidos a la derecha (angulación del vector azul: $f_{(x,y)} = x + y$) y como estirados, como si una goma se tratara, también hacia la derecha (por la elongación x4 hacia la derecha del vector verde: $g_{(x,y)} = 4x + y$).

Es más, imaginemos cómo se definen mutuamente los habitantes de un mundo y del otro.

- Los habitantes del mundo cartesiano x, y le dirán a los habitantes del mundo funcional f, g:
    - Vuestro vector azul acaba en nuestra coordenada (1,1)
    - Vuestro vector verde acaba en nuestra coordenada (4,1)
- Sin embargo, los habitantes del mundo funcional f, g dirán a los habitantes del mundo cartesiano x, y:
    - Vuestro vector e_1 acaba en nuestra coordenada (1/3,-1/3)
    - Vuestro vector e_2 acaba en nuestra coordenada (-1/3,4/3)

Y, efectivamente, si miramos nuestro modelo en que coexisten ambos mundos como dos capas superpuestas, veremos que algo de eso hay:



(OBSERVACIÓN. Es fácil orientarse pero, por si acaso, aportamos una pequeña ayuda. Para alcanzar, desde el mundo f, g, el punto que ocupa e_1 (relativamente, pues está en otra capa pero, como ya sabemos, gracias a usarlas como dos transparencias, una sobre otra, podemos ver las dos juntas, alineadas en el origen de coordenadas) recorramos, aproximadamente, un tercio del vector verde en el sentido de su flecha y, después, en paralelo al vector azul, recorramos, en sentido opuesto a la flecha del vector azul, aproximadamente un tercio de lo que mide dicho vector. Efectivamente llegaremos al punto (1,0) del mundo cartesiano.

Igualmente, para alcanzar, desde el mundo f, g, el punto que ocupa e_2, recorramos, aproximadamente un tercio del vector verde en sentido opuesto a su flecha y, después, subamos, en paralelo al vector azul, y en el sentido de su flecha, un poco más de lo que es su longitud: 4/3. Ciertamente, habremos llegado al punto (0,1) del mundo cartesiano.)

¿Cómo hemos llegado a esas coordenadas felices que sirven de traducción de un mundo para otro? Muy simple: expresando las funciones de manera implícita (si queremos anticiparnos un poco podemos echar un vistazo a la nota 38 de más adelante).

Para ello hemos aplicado el siguiente método[35] de 'resolución':

$$\begin{array}{rr} & f = x + y \\ - & g = 4x + y \\ \hline & f - g = -3x \end{array}$$

De donde:

$$x = -\frac{1}{3}f + \frac{1}{3}g$$

Y, procediendo de similar manera:

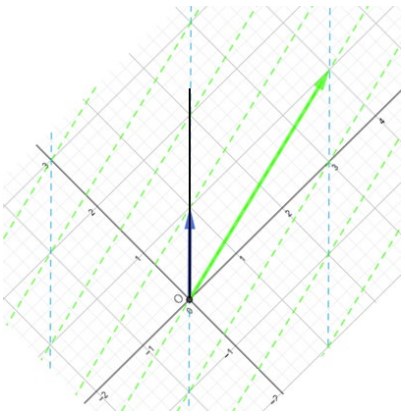
$$y = \frac{4}{3}f - \frac{1}{3}g$$

Es decir, que la coordenada x responde a una combinación determinada de coordenadas f, g e, igualmente, la coordenada y responde, también, a una combinación de coordenadas f, g.

Hasta aquí esperamos que todo nos siga yendo bien.

Vamos a hacer, ahora un ejercicio visual un poco extraño y no muy intuitivo ya que tratar de imaginar deformaciones en el espacio es bastante complicado y, más aún, expresarlas por escrito… pero vamos a intentarlo. Para ello, viajemos al interior del mundo funcional (en la nota 32 desarrollamos un ejemplo más metódico). Imaginemos que somos habitantes de esa Planilandia Funcional y que los que parecen comportarse de un modo ex6traño son los planicartesianos raros que usan los ejes x e y.

Para esto, supongamos que la ***verticalidad*** de la Planilandia Funcional la define el 'eje f' (por donde va el vector azul) y la horizontalidad la define el 'eje g' (por donde discurre el vector verde). Para que el ejercicio de teletransportación imaginaria que vamos a hacer sea un poco más llevadero, orientemos el pseudo-eje f-azul en sentido vertical para nosotros.



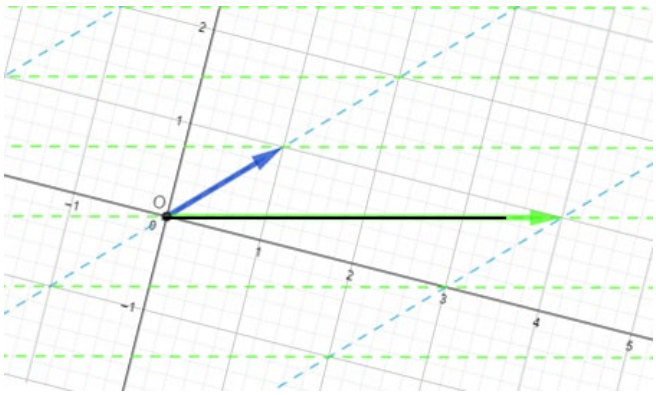
Pensemos, aunque sea un poco toscamente: ¿qué sucede con los valores de y y x según crece el valor de f?

[35] Hay muchos otros y, de hecho, bastante más cómodos como, por ejemplo, el empleo de la matriz inversa que ya hemos usado en el epígrafe anterior. Sin embargo, de momento, hemos optado por este otro que aplicamos porque no queremos introducir matrices inversas que pudieran llevarnos a confusiones en este punto.

- Pues que y parece alejarse de f hacia su izquierda, aunque crece con ella más o menos en una dirección parecida a ésta:

- Por otro lado, x parece alejarse igualmente de f pero a su derecha y en el mismo sentido que f e, importante, ya por debajo de g, con una dirección más o me como:

Ahora, para tratar de verlo desde el punto de vista de la ***horizontalidad*** de g, fijémonos en la siguiente simulación:



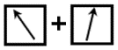
Ahora, de manera similar, ¿qué sucede con los valores de y y x según crece el valor de g?

- Parece que y se aleja bastante rápidamente hacia arriba de g y un poco hacia la derecha con g:

- Y x baja moderadamente de g y acompaña bastante a g hacia la derecha:

Somos conscientes de que esto que presentamos no es muy brillante pero ahora mismo la única finalidad es tratar de meternos en la piel de alguien que viva en la Planilandia Bifuncional. Forzarnos a hacer un ejercicio de visualización alternativo. Tratar de visualizar algo que no siempre se visualiza a la primera[36]. La precisión numérica va a aflorar en breve. De momento, sólo forzar nuestra visión espacial.

Resumamos:

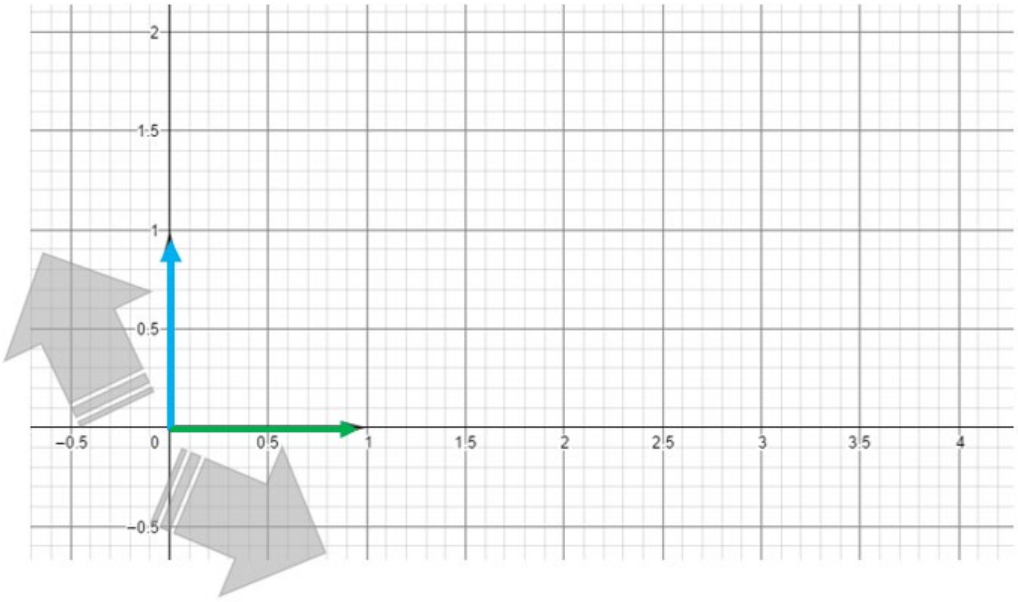
- ¿Cómo se vería desde el *Mundo Bifuncional* al eje y del *Mundo Cartesiano*? Parece ser que como algo que debe ir en una dirección aproximada (en base a, respectivamente, f y g) 
- ¿Cómo se vería desde el *Mundo Bifuncional* al eje x del *Mundo Cartesiano*? Pues parece que algo así como:

[36] Ahora todos os pondréis muy chulos en plan "hombreee, eso se ve fácil" y tal… pero ahí querría yo veros a vosotros sin ayuda dándole giros al espacio raro, mamones!!… XD.

(OBSERVACIÓN. Hemos marcado la primera flecha en naranja para recordar que por muy arriba a la derecha que vaya respecto a f, siempre va por debajo de g. Por otro lado, veamos que 'y' siempre está a la izquierda de f…)

Todo esto se ve aún más fácilmente si imaginamos que, más o menos, deformamos el espacio haciendo que los vectores de la Base formen unos ejes de coordenadas perpendiculares a nuestros ojos. ¿En qué posición aproximada quedarían los antiguos ejes x e y?

En definitiva, esto quiere decir que, aproximadamente, desde el espacio f, g, es decir, ya metiéndonos de lleno en él, imaginando que ése mundo recoge nuestra ortogonalidad, que somos habitantes de esa Planilandia Bifuncional de pleno derecho puesto que hemos estirado sus ejes hasta forzar una perpendicularidad a nuestros ojos, deformando todo el espacio, veremos que los ejes x, y estarán circunscritos, más o menos, a estas zonas que marcamos con grandes flechas grises (ya definiremos con más detalle):



Tengamos en cuenta que ambos espacios, ambas capas, coexisten en un mismo plano tangente a una variedad y, por lo tanto, cada vector de una base debe poder ser definido como una combinación lineal de los vectores de la otra base. Claro, cuando definamos una Base para el Espacio Bifuncional, y lo hagamos usando la otra base cartesiana, debería verse aproximadamente en las direcciones que hemos marcado con las flechas gruesas grises. ¿En qué medida y ángulo exacto? Pues depende del módulo de cada uno de los vectores de la Base Bifuncional. Para conocer bien el asunto hay que descender a la realidad de los números.

Así, ahora, justo en ese sentido, vamos a proceder con rigor algebraico.

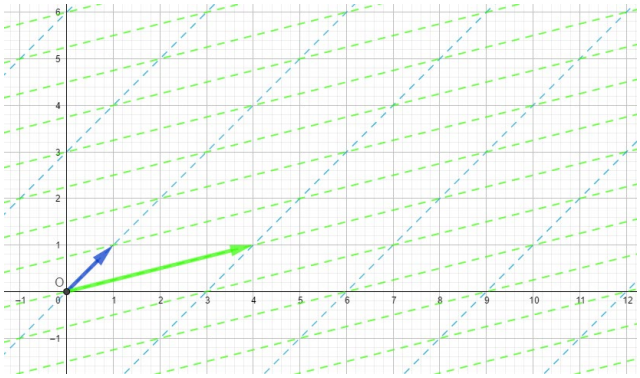
Recordemos que lo que queremos estudiar es (recomendamos dar un pequeño salto e ir a la nota 38 si no nos hemos ubicado aún): ¿cómo se comportan x e y desde el punto de vista de f y g? Es decir, si hacemos un cambio diferencial en f y g (consideradas como variables independientes)… ¿qué tipo de cambio se produce en las variables dependientes x e y?

Esto es muy importante tenerlo claro (recurrimos momentáneamente de nuevo a los esquemas visuales).

El Espacio Bifuncional tiene, digamos, una Base que se puede extraer de manera directa de la misma forma de las funciones que lo definen. Una base que se define por la misma forma explícita de las funciones que lo conforman[37]:

$$f_{(x,y)} = x + y$$

$$g_{(x,y)} = 4x + y$$



Y la forma implícita:

$$x = -\frac{f}{3} + \frac{g}{3}$$

$$y = \frac{4}{3}f - \frac{g}{3}$$

De donde podremos extraer los vectores de la Base mediante la Derivación Parcial de la Función Implícita (recordemos la nota 33) [38].

$$e_f = \frac{\partial x}{\partial f} e_x + \frac{\partial y}{\partial f} e_y$$

$$e_g = \frac{\partial x}{\partial g} e_x + \frac{\partial y}{\partial g} e_y$$

[37] Ojo que aquí hay una afortunada (o desafortunada) 'coincidencia'. Bueno, en realidad no es tan casual sino que más bien es una consecuencia directa del modo estamos construyendo las relaciones entre los espacios. Es decir, si definimos el nuevo Espacio Bifuncional de manera implícita… ¿Qué obtenemos? … Antes de decirlo, vamos a pensar un poco… Recordemos que cuando despejamos e invertimos el desempeño de las funciones dependientes e independientes en nuestro sistema de funciones usamos un método de conversión muy intuitivo pero que, ya apuntábamos en la nota 35 que podríamos haber usado la matriz inversa, es decir, que la Base del espacio Bifuncional, tal y como la hemos construido, no parece ser otra cosa que la Base Dual del Espacio Bifuncional, es decir, la inversa (y por ello ortogonal) de la Base construida mediante la aplicación directa de la forma explícita de las funciones. Claro, en nuestro experimento visual, como hemos forzado a la Base Natural del Espacio Bifuncional a comportarse como si fueran los vectores base del Plano Cartesiano, la Base Bifuncional (que ya sabemos que es la Base Dual del Espacio Bifuncional) será perpendicular al Espacio pseudo-Cartesiano (decimos pseudo porque lo que hemos hecho es deformar el funcional para verlo desde dentro y que, a los ojos de sus *habitantes*, se vea como nosotros vemos el cartesiano). Pero no nos despistemos con estas cosas ahora. Pensemos en estos términos: a) vamos a movernos de un Sistema Cartesiano a un Sistema de Bases Coordenadas y, ya después, una vez estemos en el Sistema de Bases Coordenadas, vamos a movernos entre la perspectiva interna de Base Natural y Base Dual.

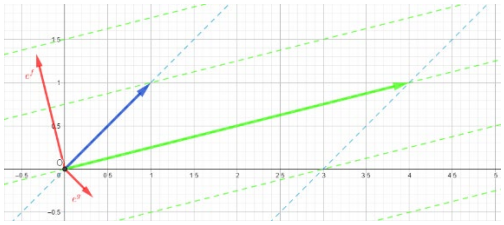
[38] De todas formas, ciertamente al lector esto le puede parecer un poco Deus ex Machina y, en cierto modo lo es, pues no hemos demostrado aún el modo en que esta norma de conversión se alcanza. Hemos optado por anticipar este resultado porque, en este momento, nos interesa resolver la relación entre sistemas para alcanzar una visualización intuitiva de una serie de conceptos. De todas formas, en el siguiente ejemplo (una vez acabado el presente), demostraremos paso a paso el resultado que comentamos. Continuando con lo que decíamos.

Es decir (lo hacemos rápido porque en el siguiente ejemplo procederemos con más detalle; de momento baste que alcancemos el resultado para visualizar lo que queremos exponer):

$$e_f = \frac{\partial\left(-\frac{f}{3}+\frac{g}{3}\right)}{\partial f}e_x + \frac{\partial\left(\frac{4}{3}f-\frac{g}{3}\right)}{\partial f}e_y \rightarrow -\frac{1}{3}e_x + \frac{4}{3}e_y$$

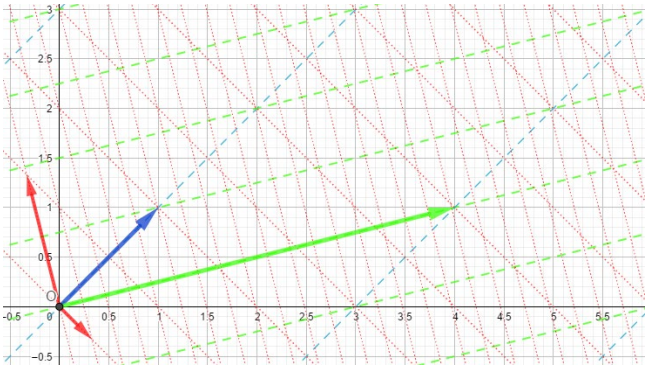
$$e_g = \frac{\partial\left(-\frac{f}{3}+\frac{g}{3}\right)}{\partial g}e_x + \frac{\partial\left(\frac{4}{3}f-\frac{g}{3}\right)}{\partial g}e_y \rightarrow \frac{1}{3}e_x - \frac{1}{3}e_y$$

Es decir:

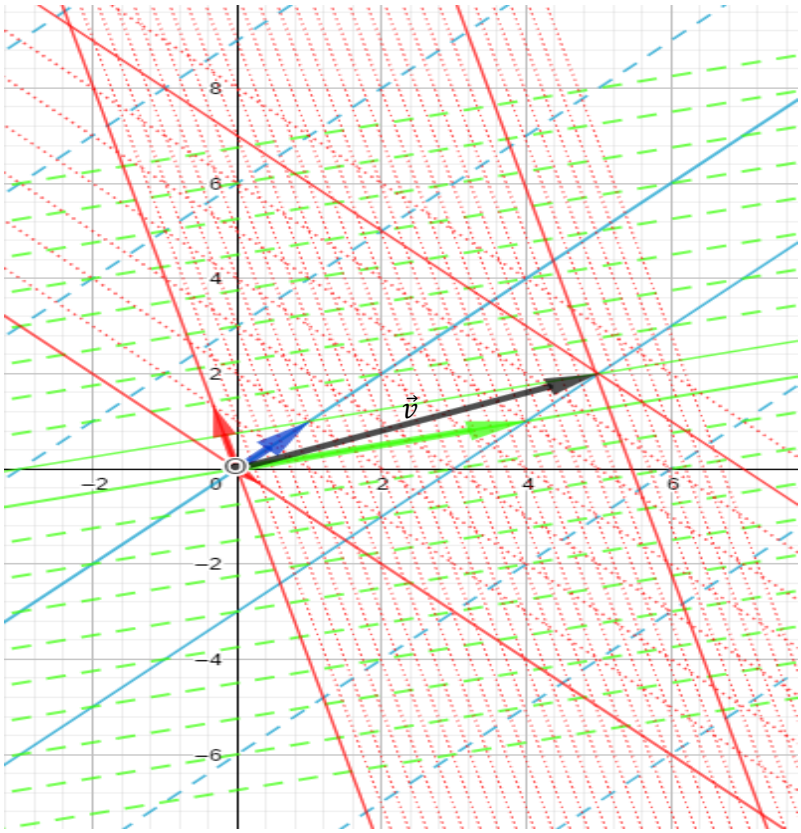


Obsérvese que la Base roja es perfectamente perpendicular a la Base azul-verde.

Si generamos la Cuadrícula de la Base roja llegamos a un escenario como el siguiente:



Escenario multicapa donde si trazamos un vector cualquiera $\vec{v}$, tendremos que:



De lo que podremos afirmar que (deformamos un poco la imagen para que se medio entienda el galimatías):

$$\vec{v} = 5e_x + 2e_y = 1e_f + 1e_g = 7e^f + 22e^g$$

Y esta igualdad que acabamos de reflejar está profundamente ligada a la definición de Tensor: una magnitud que permanece invariante ante cualquier cambio de Sistema Coordenadas que se hayan construido tal y como lo hemos hecho hasta el momento.

Sin embargo, no nos paremos ahora en esto. Abordemos otro ejemplo, algo más complejo que permita asegurarnos que comprendemos sin problemas el concepto de Base Coordenada.

Veamos ahora un escenario más complejo (vamos, tampoco es para morirse…), en el que las bases, esta vez sí, cambiarán según el punto del plano en que nos fijemos pues la transformación lineal aplicable en los diferentes puntos del espacio estará aún en función de x e y ya que, al ser las funciones son cuadráticas, y al derivar, el factor que nos quede seguirá estando en función de x e y (x^1 e y^1).

$$f_{(x,y)} = x^2 + y^2$$

$$g_{(x,y)} = 2x + 3y$$

Esta vez vamos a simplificar un poco las cosas de manera que si queremos ver las cosas desde el punto de vista de las nuevas coordenadas f, g, sólo vamos a manejar una de sus posibles bases (recordemos en la siguiente nota por qué derivamos implícitamente[39]).

---

[39] ¿Por qué derivamos implícitamente y no con la normalidad habitual? Es decir, habitualmente, tenemos una función que ejerce de variable dependiente (a partir de ahora nos vamos a referir a ella como variable dependiente) y la derivamos según su variable independiente, por ejemplo:

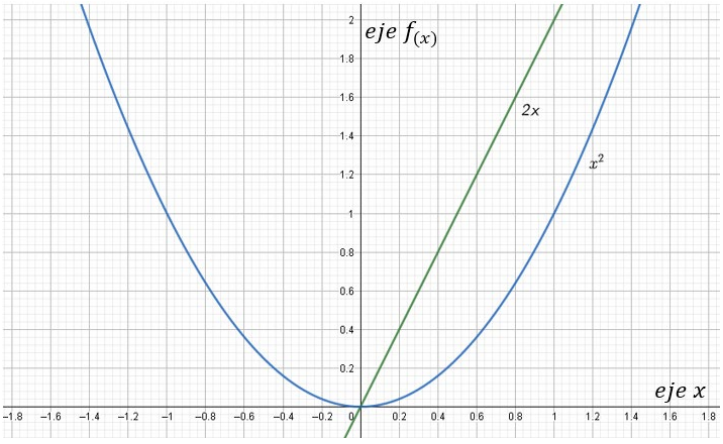
$$f_{(x)} = x^2$$

Así, si queremos saber cómo cambia la variable dependiente $f_{(x)}$ según cambie la variable independiente x, hacemos lo siguiente:

$$\frac{d}{dx} f_{(x)} = \frac{d}{dx} x^2$$

$$\frac{d}{dx} f_{(x)} = 2x$$

Es decir, derivando encontramos la función que recoge el modo en que cambia la variable dependiente $f_{(x)}$ según cambia la variable independiente x: $2x$.



Como sabemos (y se puede apreciar en la gráfica), la derivada primera de una función nos da información acerca de la evolución de la función original en términos de pendiente (negativa/decrecimiento para un valor negativo de la derivada y positiva/crecimiento para un valor positivo de la derivada).

Además, como vemos, la ratio de cambio de la variable dependiente $f_{(x)}$ (y que está representada por la gráfica verde de $2x$) se incrementa, con ***aceleración*** constante, conforme x se aleja de cero. Es decir, cuando x está muy alejada de cero por la izquierda, cuando, digamos, "x es muy negativa", la pendiente de la gráfica de la variable independiente $f_{(x)}$ no sólo es negativa, sino que la tasa de decrecimiento de la variable dependiente $f_{(x)}$ es, también "muy negativa, muy pronunciada". Conforme x se acerca a cero, la pendiente de la representación gráfica de la variable dependiente $f_{(x)}$ se atenúa hasta llegar a cero (punto en el que coinciden

en cero tanto la variable dependiente $f_{(x)}$ como la variable independiente x; un punto de inflexión) de manera que a continuación, estando ya la variable independiente x en "terreno positivo", la pendiente de representación gráfica de la variable dependiente $f_{(x)}$ comienza a crecer, incrementando su aceleración de crecimiento, según x se aleja de cero, esta vez hacia la derecha (en el terreno positivo).

Imaginemos, en cambio, que queremos saber lo contrario: cómo cambia x en función del cambio de f. Esto implica un cambio de perspectiva más amplio de la que pudiera parecer en un principio. Así, antes de verlo gráficamente, vamos a transformar nuestra expresión de manera que ahora la función $f_{(x)}$ sea la variable independiente (llamémosla f) y x la función o variable dependiente (llamémosla $x_{(f)}$). Veamos qué comportamiento tiene el asunto cuando vemos las cosas de manera inversa.

Si $f_{(x)} = x^2$, y queremos invertir el asunto de manera que ahora, precisamente, x quede en función de $f_{(x)}$, tendremos algo como:

$$f = (x_{(f)})^2$$

De donde si despejamos x para, naturalmente, dejarla aislada, como variable dependiente, a un lado de la expresión (recordemos que, efectivamente así teníamos antes la $f_{(x)}$ en la expresión original) tendremos que:

$$\sqrt{f} = x_{(f)}$$

Si ahora derivamos la variable dependiente $x_{(f)}$ respecto a la variable independiente f:

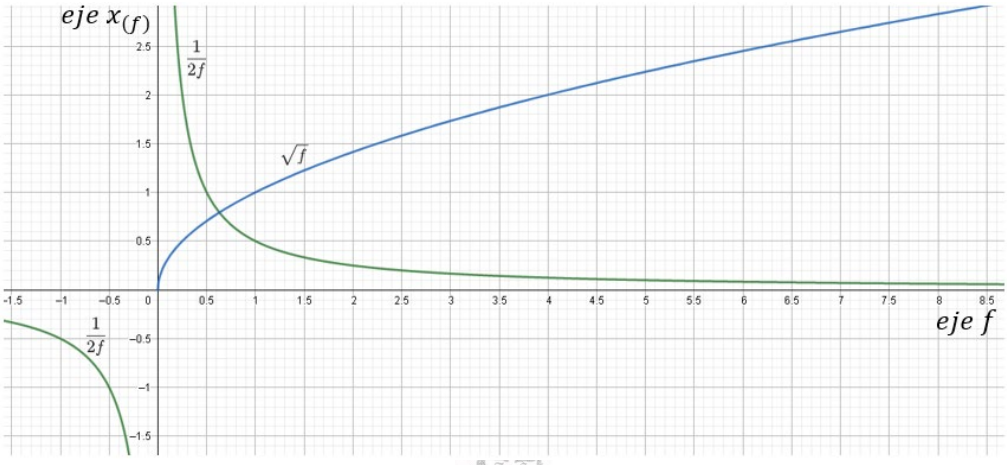
$$x_{(f)} = \sqrt{f}$$

$$\frac{d}{df} x_{(f)} = \frac{d}{df} \sqrt{f}$$

$$\frac{d}{df} x_{(f)} = \frac{d}{df} \sqrt{f}$$

$$\frac{d}{df} x_{(f)} = \frac{1}{2f}$$

¿Qué tenemos ahora? Reflexionemos sobre ello. Supongamos que somos un punto que está recorriendo una parábola, no una parábola en un mundo plano sino ¡una parábola en un *mundo parabólico*! Nosotros, desde la parábola, *mandamos*. Lo normal es lo parabólico y lo raro es 'lo plano'. Además, recorriendo nuestra 'línea normal parabólica' miramos en otro eje qué clase de comportamiento tiene x según nosotros nos movemos. Es algo así como que hemos deformado el plano anterior hasta que gráficamente lo vemos como algo parecido a esto:



Como son funciones dependientes de dos variables independientes (x, y), lo que tendremos que hacer es derivar implícitamente f y g respecto a ellas mismas y, efectivamente, tendremos como resultado un sistema de cuatro ecuaciones. Veámoslo[40]:

- Procedamos con la *función azul*:

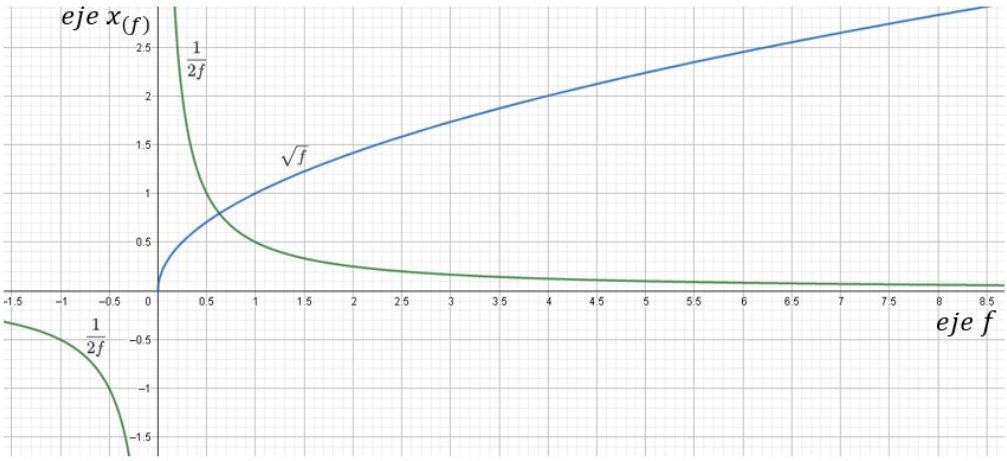
$$\text{a)}\quad \frac{\partial}{\partial f}\left(f_{(x,y)} = x^2 + y^2\right) \rightarrow \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial f} = \frac{\partial}{\partial f}x^2 + \frac{\partial}{\partial f}y^2$$

Pensemos un poco sobre esto.

Lo que, gráficamente, ha sucedido es que hemos deformado todo el espacio de manera que la parábola ahora es 'lo recto'. La parábola, en este nuevo escenario, es el eje recto horizontal que antes era x. Alguien que, hipotéticamente, recorriera la línea de la parábola sentiría que sigue una trayectoria recta y que son las otras funciones las que describen formas curvas. Para que este efecto visual se produjera hay que plegar el espacio de una manera, la verdad, bastante poco intuitiva para la imaginación inmediata. Habría que realizar una serie de deformaciones y pliegues bastante raros si tuviéramos que hacerlo 'manualmente'.

Claro, de entrada, aquél que esté recorriendo la hipérbola, la variable, ahora, independiente, notara que nunca "pisa terreno negativo" cosa que es absolutamente lógica (desde el punto de vista del mundo plano anterior, la parábola, en ningún momento, baja del eje x y, desde el punto del "mundo cambiado" efectivamente es imposible hacer la raíz de un número negativo).

Por otro lado, si observamos el modo en que crece la función azul ($x_{(f)} = \sqrt{f}$), veremos que, en primer lugar, nunca decrece, por lo que la función derivada, en su sección negativa, no tiene reflejo sobre la función. La tasa de crecimiento de la función azul, por otro lado, se recoge en la derivada (gráfica verde) que está en la parte positiva. La relación entre ambas curvas se ve con bastante claridad: al principio el valor de la tasa de crecimiento (gráfica verde) es muy elevada, y así se refleja en el crecimiento de la gráfica azul. Rápidamente la tasa de crecimiento (la gráfica verde) se acerca a cero y, efectivamente, el crecimiento de la gráfica azul se va viendo moderado hasta casi desaparecer. Por resumir, digámoslo así, esta gráfica recoge el modo en que una Parábola se ve a sí misma desde su mundo.



En definitiva, lo importante que queríamos transmitir en esta nota es que mediante la derivación implícita lo que estamos haciendo es invertir los papeles. Algo así como 'transportarnos de un mundo a otro'. Por eso nos van a ser útiles a la hora de pasar de un sistema a otro: digamos que vamos a mudarnos, continuamente, entre sistemas para poder ver las cosas *desde dentro* del sistema que nos interese. Estos saltos entre sistemas es lo que a menudo no se deja claro en las referencias consultadas.

[40] Nótese que no despejaremos los $\frac{\partial x}{\partial f}$, etc… porque lo que más conviene a nuestros intereses es dejarlos en su sitio… ahora lo veremos…

$$1 = 2x \cdot \frac{\partial x}{\partial f} + 2y \cdot \frac{\partial y}{\partial f}$$

b) $\frac{\partial}{\partial g}\left(f_{(x,y)} = x^2 + y^2\right) \rightarrow \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial g} = \frac{\partial}{\partial g}x^2 + \frac{\partial}{\partial g}y^2$

$$0 = 2x \cdot \frac{\partial x}{\partial g} + 2y \cdot \frac{\partial y}{\partial g}$$

- Procedamos con la ***función verde***:

a) $\frac{\partial}{\partial f}\left(g_{(x,y)} = 2x + 3y\right) \rightarrow \frac{\partial g_{(x,y)}}{\partial f} = \frac{\partial}{\partial f}2x + \frac{\partial}{\partial f}3y$

$$0 = 2 \cdot \frac{\partial x}{\partial f} + 3 \cdot \frac{\partial y}{\partial f}$$

a) $\frac{\partial}{\partial g}\left(g_{(x,y)} = 2x + 3y\right) \rightarrow \frac{\partial g_{(x,y)}}{\partial g} = \frac{\partial}{\partial g}2x + \frac{\partial}{\partial g}3y$

$$1 = 2 \cdot \frac{\partial x}{\partial g} + 3 \cdot \frac{\partial y}{\partial g}$$

Recopilemos lo que tenemos:

$$2x \cdot \frac{\partial x}{\partial f} + 2y \cdot \frac{\partial y}{\partial f} = 1$$

$$2x \cdot \frac{\partial x}{\partial g} + 2y \cdot \frac{\partial y}{\partial g} = 0$$

$$2 \cdot \frac{\partial x}{\partial f} + 3 \cdot \frac{\partial y}{\partial f} = 0$$

$$2 \cdot \frac{\partial x}{\partial g} + 3 \cdot \frac{\partial y}{\partial g} = 1$$

¿No nos suena esto a un producto entre matrices? Es decir:

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial f} & \frac{\partial x}{\partial g} \\ \frac{\partial y}{\partial f} & \frac{\partial y}{\partial g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, si quisiéramos despejar la ***matriz cuyos elementos son las derivadas parciales*** (y así de camino, conocer dichas derivadas), tan sólo tendríamos que despejar la segunda matriz multiplicando por la inversa de la ***primera matriz*** en ambos lados de la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial f} & \frac{\partial x}{\partial g} \\ \frac{\partial y}{\partial f} & \frac{\partial y}{\partial g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$I \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial f} & \frac{\partial x}{\partial g} \\ \frac{\partial y}{\partial f} & \frac{\partial y}{\partial g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial f} & \frac{\partial x}{\partial g} \\ \frac{\partial y}{\partial f} & \frac{\partial y}{\partial g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

Que es[41]:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial f} & \frac{\partial x}{\partial g} \\ \frac{\partial y}{\partial f} & \frac{\partial y}{\partial g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{6x-4y} & \frac{-y}{3x-2y} \\ \frac{-1}{3x-2y} & \frac{x}{3x-2y} \end{pmatrix}$$

De donde, podríamos despejar cada derivada implícita (aprovechamos ahora porque nos van a hacer falta después):

$$\frac{\partial x}{\partial f} = \frac{3}{6x-4y}$$

$$\frac{\partial x}{\partial g} = \frac{-y}{3x-2y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial f} = \frac{-1}{3x-2y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial g} = \frac{x}{3x-2y}$$

Sin embargo, hagamos ahora, y esto es lo verdaderamente importante en este momento, una recapitulación de lo que tenemos:

1. Tenemos dos funciones:

$$f_{(x,y)} = x^2 + y^2$$

$$g_{(x,y)} = 2x + 3y$$

[41] Véase nota ...X...

2. Cuya derivación implícita expresamos matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial f} & \frac{\partial x}{\partial g} \\ \frac{\partial y}{\partial f} & \frac{\partial y}{\partial g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero… ¿Qué son los términos de la primera matriz respecto a las funciones? Pensémoslo por un momento comparando las funciones y la primera matriz… Efectivamente, maravilloso, son las derivadas parciales de las funciones 'originales' luego podremos reescribir nuestra expresión como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial f} & \frac{\partial x}{\partial g} \\ \frac{\partial y}{\partial f} & \frac{\partial y}{\partial g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, nos queda que (hablamos de diferenciales):

$$\begin{matrix} e_x \downarrow & e_y \downarrow & e_f \downarrow & e_g \downarrow \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial f} & \frac{\partial x}{\partial g} \\ \frac{\partial y}{\partial f} & \frac{\partial y}{\partial g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si nos paramos a reflexionar sobre este producto de matrices y teniendo en mente que:

Un vector base e_x: se define en base de un cierto e_f + un cierto e_g

Un vector base e_y: se define en base de un cierto e_f + un cierto e_g

Un vector base e_f: se define en base de un cierto e_x + un cierto e_y

Un vector base e_g: se define en base de un cierto e_x + un cierto e_y

Veremos que, efectivamente, para funciones, que al menos sean ***derivables***, tendremos que las ***relaciones entre una Base Coordenada***[42] y la ***Base Original*** se pueden definir, con ***carácter general***, como[43]:

[42] Téngase en cuenta que hablamos de una Base Coordenada $\{e_f, e_g\}$ porque es cambiante y se define según una función que varía según sea la coordenada donde se aplica. Y que, de fondo, recordemos, tenemos nuestra Capa Cartesiana, con su Base Original $\{e_x, e_y\}$ que nos permite centralizar las medidas.

[43] Si aplicamos este procedimiento a una base concreta numérica cualquiera veremos que se cumple sin problemas. Es posible que pueda parecer tedioso y lioso debido al cambio continuo de orientación por el producto matricial, pero aplicándolo en un ejemplo concreto se ve muy clara y fácilmente.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial f} & \frac{\partial x}{\partial g} \\ \frac{\partial y}{\partial f} & \frac{\partial y}{\partial g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reforcemos esto que hemos dicho porque es un poco lioso. Para ello, antes, recuperemos en nuestra memoria qué es una derivada: una ratio entre el cambio que se produce entre dos ejes cuando uno de dichos cambios, el que aparece en el denominador, tiende a cero, es un diferencial. Así, si miramos de nuevo este producto matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial f} & \frac{\partial x}{\partial g} \\ \frac{\partial y}{\partial f} & \frac{\partial y}{\partial g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y pensamos de nuevo:

- ¿Cómo podemos definir un vector base e_x? Por supuesto e_x no se puede definir mediante sí mismo y, menos aún, mediante el vector base e_y ya que: a) forma parte de la misma base y, por ello mismo, b) e_y es linealmente independiente de e_x. Así, naturalmente, e_x se debe definir mediante los vectores de otra base a la que no pertenezca él mismo. En nuestro caso esto se hará mediante la Base Coordenada a la que hemos llamado $\{e_f, e_g\}$. Por otro lado, ¿qué hemos marcado en verde en el anterior producto matricial?
  - $\frac{\partial f}{\partial x}$: lo que cambia f cuando se produce un cambio diferencial en x.
  - $\frac{\partial g}{\partial x}$: lo que cambia g cuando se produce un cambio diferencial en x.

  Claro, en el caso del 'pequeño sistema de dos magnitudes variables' $\frac{\partial f}{\partial x}$, ¿quién, digámoslo así, marca el ritmo del estudio del cambio? Naturalmente: x. Pero… ¿Dónde se produce el cambio resultante que nos interesa conocer? Pues parece, efectivamente obvio, que dicho cambio se producirá en 'f' y, por lo tanto en la dirección y sentido que define el vector de la base coordenada e_f. Es decir, que, finalmente, el vector e_x se definiría como una cierta cantidad (coordenada) $\frac{\partial f}{\partial x}$, que se produce en el sentido de e_f (por eso multiplica a ese vector base) más una cierta cantidad (coordenada) $\frac{\partial g}{\partial x}$, que apunta (multiplica) a la dirección y sentido que tiene el vector de la base coordenada e_g, es decir:

$$e_x = \frac{\partial f}{\partial x} e_f + \frac{\partial g}{\partial x} e_g$$

- Por el mismo razonamiento, el vector base e_y será:

$$e_y = \frac{\partial f}{\partial y} e_f + \frac{\partial g}{\partial y} e_g$$

- De manera análoga, e_f:

$$e_f = \frac{\partial x}{\partial f} e_x + \frac{\partial y}{\partial f} e_y$$

- Y, finalmente, e_g:

$$e_g = \frac{\partial x}{\partial g} e_x + \frac{\partial y}{\partial g} e_y$$

Es decir, que tenemos algo que podríamos resumir, de manera un poco informal, como:

$$\begin{pmatrix} e_x & e_y \\ comp.f & comp.f \\ comp.g & comp.g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_f & e_g \\ comp.x & comp.x \\ comp.y & com.y \end{pmatrix} = I$$

Y así, dado su carácter general, podemos afirmar que hemos alcanzado un Teorema según el cual partiendo de unas coordenadas x, y y teniendo definidas unas funciones $f_{(x,y)}, g_{(x,y)}$ que transforman, relacionan, la ***Base Original*** $\{e_x, e_y\}$ con una ***Base Coordenada*** a la que, por el momento, vamos a llamar$\{e_f, e_g\}$, se debe cumplir que:

$$\boldsymbol{e_x = \frac{\partial f}{\partial x} e_f + \frac{\partial g}{\partial x} e_g}$$

$$\boldsymbol{e_y = \frac{\partial f}{\partial y} e_f + \frac{\partial g}{\partial y} e_g}$$

$$\boldsymbol{e_f = \frac{\partial x}{\partial f} e_x + \frac{\partial y}{\partial f} e_y}$$

$$\boldsymbol{e_g = \frac{\partial x}{\partial g} e_x + \frac{\partial y}{\partial g} e_y}$$

(OBSERVACIÓN. Si estuviésemos usando Bases Duales, la cosa sería, naturalmente, al revés)

$$e^x = \frac{\partial x}{\partial f} e^f + \frac{\partial x}{\partial g} e^g$$

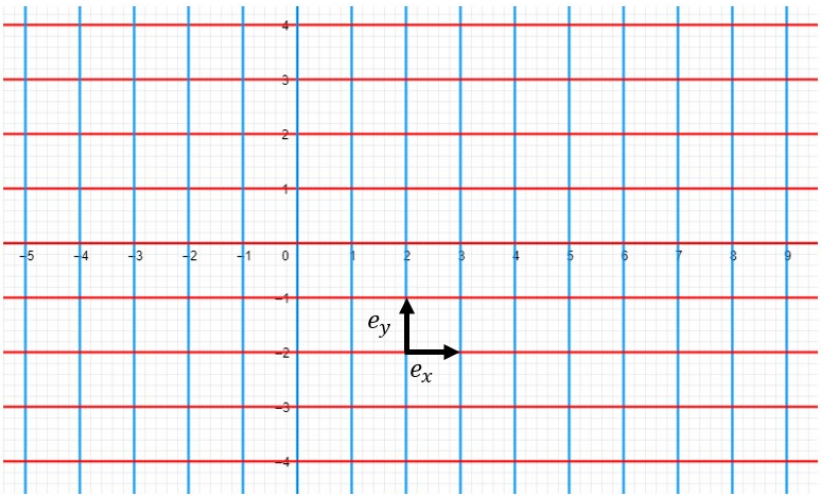
$$e^y = \frac{\partial y}{\partial f} e^f + \frac{\partial y}{\partial g} e^g$$

$$e^f = \frac{\partial f}{\partial x} e^x + \frac{\partial f}{\partial y} e^y$$

$$e^g = \frac{\partial g}{\partial x} e^x + \frac{\partial g}{\partial y} e^y$$

Veamos en la práctica geométrica cómo se refleja esto que hemos dicho.

En primer lugar imaginemos un simple plano cartesiano en el que está definida nuestra Base $\{e_x, e_y\}$ vinculada a dicho plano y que, como es de imaginar, depende de unas cómodas coordenadas x, y y que vamos a situar, por ejemplo, en las coordenadas (2,-2).

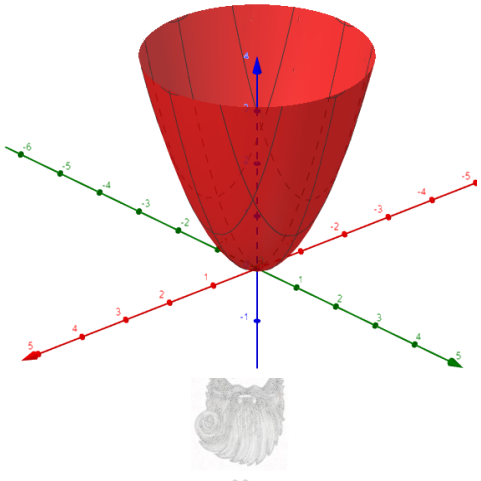


Ahora vamos a empezar a reproducir el esquema geométrico generado por el sistema de ecuaciones que hemos manejado hasta el momento e, igualmente, la Base vinculada al mismo.

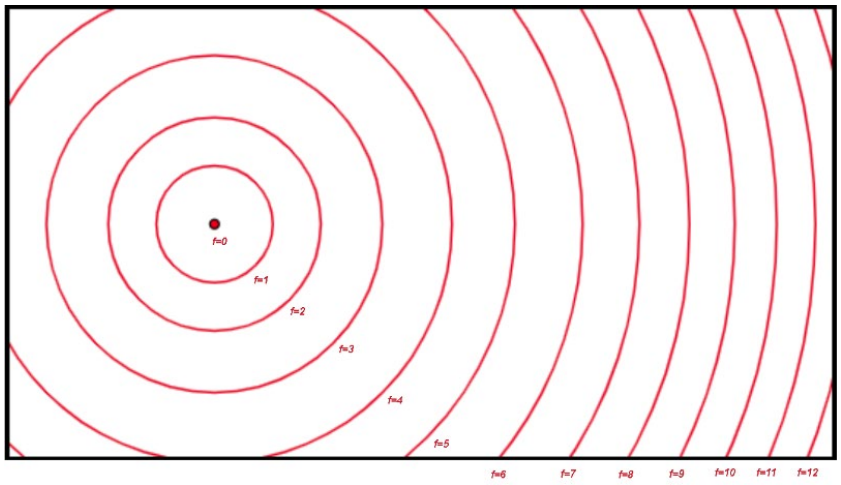
1. En primer lugar tenemos la expresión:

$$f_{(x,y)} = x^2 + y^2$$

Cuya representación gráfica sería algo como:



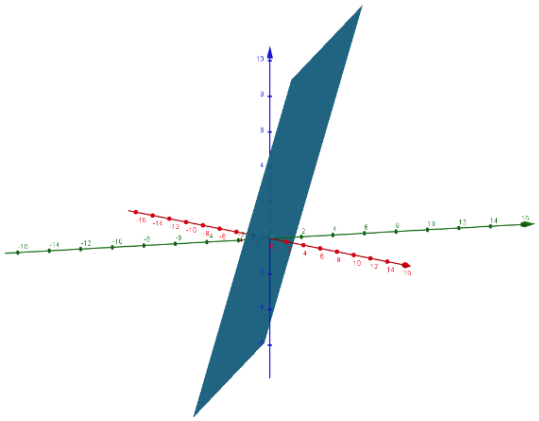
Y que si proyectamos sobre el plano base (el que se conforma mediante los ejes rojo y verde), si lo miramos justo desde arriba perpendicularmente, con perspectiva cenital, se vería más o menos como:



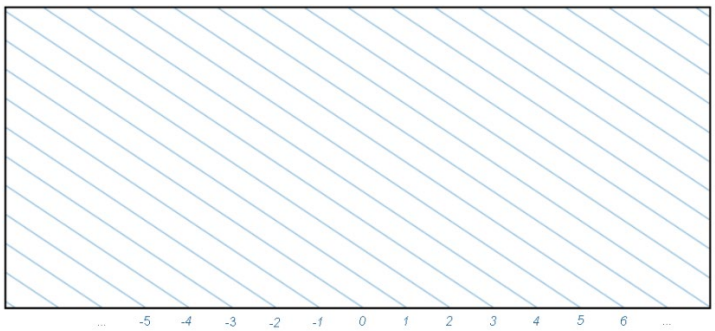
2. En segundo lugar, tenemos la expresión:

$$g_{(x,y)} = 2x + 3y$$

Cuya representación gráfica es un plano parecido a:



Que, proyectado sobre el plano base (ejes rojo-verde) se vería más o menos como:



Claro, en primer lugar, observamos que están *torcidas*. Esto es porque la ecuación que genera este plano es, ciertamente:

$$g_{(x,y)} = 2x + 3y$$

Que si igualamos expresamos igualada a cero:

$$0 = 2x + 3y$$

Y despejamos:

$$y = -\frac{2}{3}x$$

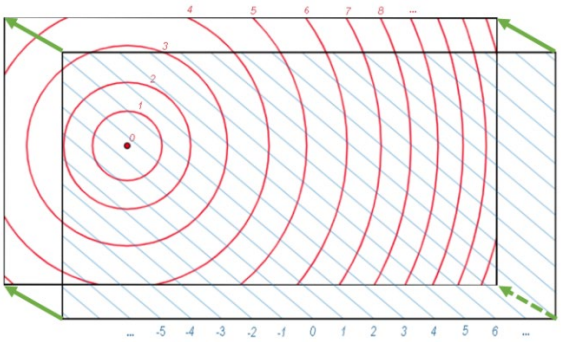
Vemos que la línea que pasa por el origen de coordenadas tiene una pendiente negativa, es decir, como de "cuesta abajo" (cosa que representamos de manera aproximada).

Igualmente, si igualamos a 1:

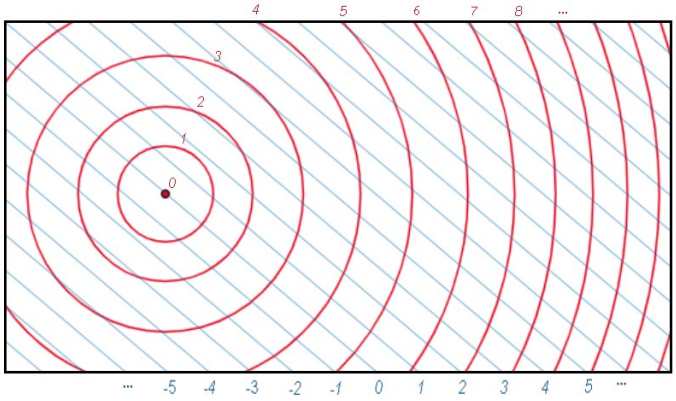
$$1 = 2x + 3y$$
$$y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x$$

Es decir, una recta paralela a la anterior, pues tiene (lo marcamos en rojo) la misma pendiente y se le añade una constante (1/3) hacia arriba (o abajo si restamos). Así construimos todas las líneas de referencia de nuestro plano.

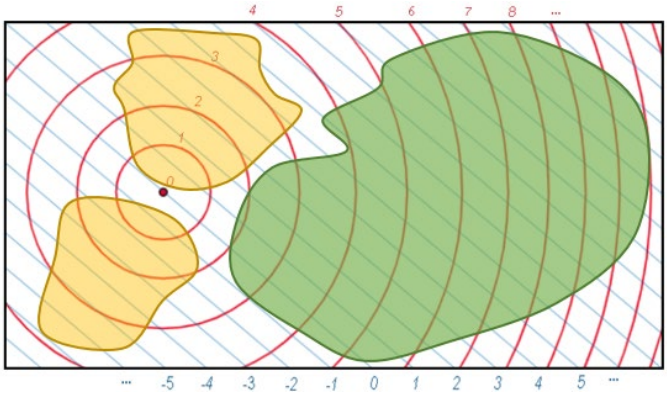
Ahora, si procedemos a solapar las proyecciones en el plano de las dos funciones haciendo algo parecido a lo que representamos en el siguiente gráfico:



Obtendremos un sistema de coordenadas alternativo al cartesiano que mezcla la evolución de cada eje según su propia función. Puesto que las variables independientes son compartidas por ambas funciones, vamos a imponer que existe un punto de anclaje entre los dos sistemas de referencia de manera que cuando x e y son iguales a cero, ambas funciones son, también, iguales a cero y, por lo tanto, coinciden en ese punto que, en concreto, no es otro que el origen (0,0).



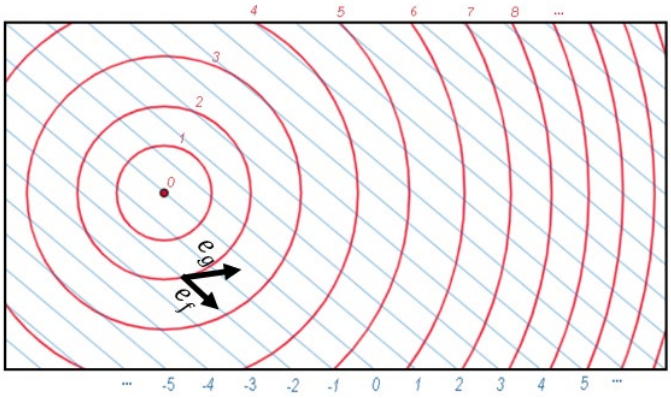
En primer lugar habremos de observar que, puesto que la nueva base que vamos a definir para este espacio debe ser (no podría ser de otro modo) linealmente independiente, hay 'zonas' que van a ser menos favorables para definir la base que otras. Aquellas zonas que presentan problemas, las zonas donde hay tangencias (pues en esos puntos la independencia lineal de los vectores no está garantizada) las hemos marcado en amarillo. Aquellas otras zonas en que no vamos a encontrar problemas, las marcamos en verde.



Cada 'zona' que delimitemos en este espacio se denomina 'Carta Local' y al conjunto de todas las cartas locales se le llama 'Atlas'. Cuando toque trabajar en las cartas locales 'problemáticas' (las que hemos marcado en amarillo) hay que hacer un cambio de función de coordenadas (por ejemplo, invertirlas Dual/Natural) para que se pueda trabajar con independencia lineal y, posteriormente, realizar las conversiones oportunas.

A continuación, vamos representar la hipotética Base Coordenada $\{e_f, e_g\}$ vinculada a este espacio en el punto (2,-2) de este nuevo sistema. Ya antes lo hicimos en el espacio bidimensional cartesiano con $\{e_x, e_y\}$ y ahora lo hacemos con la base $\{e_f, e_g\}$ en este nuevo espacio definido por las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$.

Situémoslo, como decimos, en el mismo punto de coordenadas (2,-2) según el nuevo espacio:



(OBSERVACIÓN: entiéndase que e_f debe crecer hacia donde crece $f(x,y)$ y en paralelo a g y que e_g debe crecer hacia donde crece $g(x,y)$ y en paralelo a f (tangente al círculo))

Veamos ahora cuánto mide, respecto a la 'referencia cartesiana general', esta Base pues ya tenemos datos de sobra para calcularlo. Recordemos:

- Por un lado, ya sabemos por nuestro Teorema que:

$$e_f = \frac{\partial x}{\partial f} e_x + \frac{\partial y}{\partial f} e_y$$

$$e_g = \frac{\partial x}{\partial g} e_x + \frac{\partial y}{\partial g} e_y$$

- Por otro lado, recordemos que en líneas superiores ya aprovechamos para calcular:

$$\frac{\partial x}{\partial f} = \frac{3}{6x - 4y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial f} = \frac{-1}{3x - 2y}$$

$$\frac{\partial x}{\partial g} = \frac{-y}{3x - 2y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial g} = \frac{x}{3x - 2y}$$

Así que, para la coordenada $f = 2, g = -2$,[44] tendríamos que:

- Primero resolvamos el sistema de ecuaciones para dichos datos:

$$f_{(x,y)} = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad 2 = x^2 + y^2$$
$$g_{(x,y)} = 2x + 3y \quad \rightarrow \quad -2 = 2x + 3y$$

Este sistema tiene dos posibles soluciones:

- ~~$x \cong -1{,}4$; $y \cong +0{,}3$~~
- $x \cong +0{,}8$; $y \cong -1{,}2$

De ambas soluciones, la marcada en color rojo es absurda pues, recordemos, las coordenadas de los vectores de la Base Original eran $x > 0$ y $y < 0$, por lo que la solución que es consistente con el escenario que estamos desarrollando es la que hemos marcado en azul.

- Segundo: ahora sustituyamos los valores obtenidos.

$$e_f = \frac{\partial x}{\partial f} e_x + \frac{\partial y}{\partial f} e_y \rightarrow e_f = \frac{3}{6x - 4y} e_x + \frac{-1}{3x - 2y} e_y \rightarrow \frac{3}{6(0{,}8) - 4(-1{,}2)} e_x + \frac{-1}{3(0{,}8) - 2(-1{,}2)} e_y$$

$$e_g = \frac{\partial x}{\partial g} e_x + \frac{\partial y}{\partial g} e_y \rightarrow e_g = \frac{-y}{3x - 2y} e_x + \frac{x}{3x - 2y} e_y \rightarrow \frac{-(-1{,}2)}{3(0{,}8) - 2(-1{,}2)} e_x + \frac{(0{,}8)}{3(0{,}8) - 2(-1{,}2)} e_y$$

Por lo que, finalmente, la Base Coordenada de este espacio en el punto (2,-2)[45] será:

$$e_{f(2,-2)} = 0{,}31 \cdot e_x + (-0{,}21) \cdot e_y$$

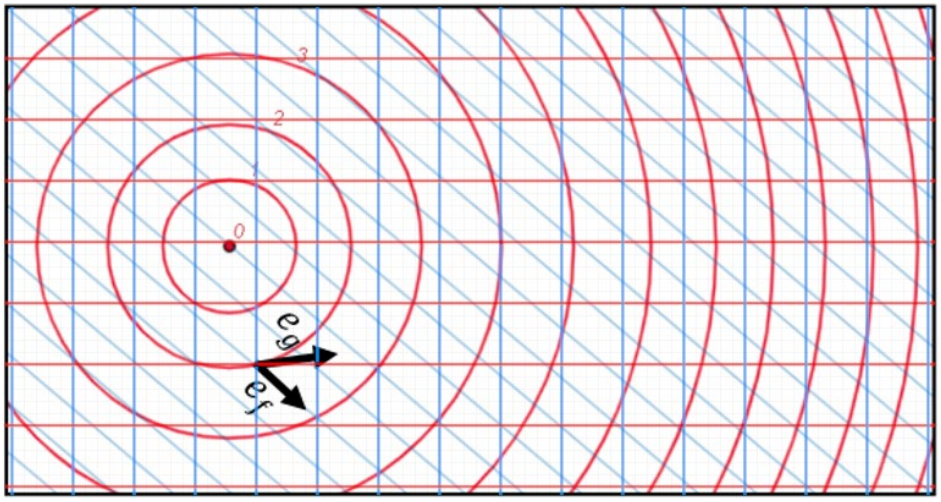
$$e_{g(2,-2)} = 0{,}25 \cdot e_x + 1{,}7 \cdot e_y$$

Si pusiéramos como transparencia el plano cartesiano original, referencia que todo lo ve, y el plano "funcional" y, también, alineamos las bases de ambos sistemas en el punto (2,-2) de ambos sistemas (sólo para tener una referencia clara), veríamos que, efectivamente, en el caso de e_f el vector se expandiría un poco hacia la derecha (exactamente, 0,31 uds) y un poco hacia abajo (exactamente -0,21 uds). Con e_g pasaría algo parecido pero en ambos casos positivo, es decir, algo hacia la derecha (0,25 uds) y algo hacia arriba (1,7 uds).

[44] ¡Fundamental! Las coordenadas del escenario 'cartesiano' son x, y pero las coordenadas del escenario 'definido por funciones' son f, g.

[45] Recordemos que la Base es Coordenada, es decir: que cambia según sea la coordenada. Por eso tenemos que especificar la coordenada a la que nos referimos con esa base. Es importante tener en cuenta que la base está asociada a las coordenadas $f = 2$, g=-2.

(OBSERVACIÓN: por supuesto visualmente es aproximado ya que la graficación que hemos hecho ha sido a ojo, con el fin de ilustrar aproximadamente y, por lo tanto, las proporciones no tendrían por qué casar perfectamente aunque, como vemos, en algo se parecen…en realidad e_f debería bajar menos y e_g debería subir más… pero bueno, se entiende el concepto…)



Ahora si queremos calcular el módulo de cada vector, sencillamente haremos el producto escalar[46] el vector por sí mismo:

$$e_{f(2,-2)} \cdot e_{f(2,-2)} \cong (0{,}31e_x - 0{,}21e_y) \cdot (0{,}31e_x - 0{,}21e_y)$$

$$\cong \left((0{,}31)(0{,}31)e_x e_x + (0{,}31)(-0{,}21)e_x e_y + (-0{,}21)(0{,}31)e_y e_x + (-0{,}21)(-0{,}21)e_y e_y\right)$$

$$\cong \left((0{,}31)(0{,}31) \cdot 1 + (0{,}31)(-0{,}21) \cdot 0 + (-0{,}21)(0{,}31) \cdot 0 + (-0{,}21)(-0{,}21) \cdot 1\right)$$

$$\cong (0{,}1 + 0{,}04)$$

$$(e_f)^2 \cong 0{,}14$$

$$e_f \cong \sqrt{0{,}14}\ uds$$

Con $e_{g(2,-2)}$ procedemos exactamente del mismo modo. No tiene secreto alguno.

$$e_{g(2,-2)} \cdot e_{g(2,-2)} \cong (0{,}25e_x + 1{,}7e_y) \cdot (0{,}25e_x + 1{,}7e_y)$$

$$\cong \left((0{,}25)(0{,}25)e_x e_x + (0{,}25)(1{,}7)e_x e_y + (1{,}7)(0{,}25)e_y e_x + (1{,}7)(1{,}7)e_y e_y\right)$$

$$\cong \left((0{,}25)(0{,}25) \cdot 1 + (0{,}25)(1{,}7) \cdot 0 + (1{,}7)(0{,}25) \cdot 0 + (1{,}7)(1{,}7) \cdot 1\right)$$

$$(e_g)^2 \cong (0{,}63 + 2{,}89)$$

$$e_g \cong \sqrt{3{,}52}\ uds$$

[46] Como estamos comparando contra el espacio cartesiano, el producto escalar se hará sobre una métrica perfectamente plana $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si fuera una métrica diferente, este producto escalar, naturalmente se ejecutará de otra manera pero, como decimos, estamos calculando el módulo desde el punto de vista del 'ojo cartesiano que todo lo ve'.

Que, en ambos casos, podríamos definir como la unidad si así nos conviene.

La nomenclatura 'oficial' con la que veremos estas cuestiones en los textos, digamos, canónicos será:

- Para las ***Coordenadas*** y ***Bases NO Coordenadas***:

  Coordenadas/Componentes contravariantes: $\boldsymbol{x^1, x^2, x^3, \dots, x^n}$

  Base Natural: $\{\boldsymbol{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n}\}$

- Para las ***Coordenadas*** y ***Bases Coordenadas***:

  Coordenadas/Componentes coordenadas contravariantes: $\boldsymbol{x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}, \dots, x^{n'}}$

  Base Natural Coordenada: $\{\boldsymbol{e_{1'}, e_{3'}, e_{3'}, \dots, e_{n'}}\}$

(OBSERVACIÓN. La prima indica que es la base coordenada, extraída de la forma implícita de las funciones.)

Que, aplicado a nuestros:

$$e_x = \frac{\partial f}{\partial x} e_f + \frac{\partial g}{\partial x} e_g$$

$$e_y = \frac{\partial f}{\partial y} e_f + \frac{\partial g}{\partial y} e_g$$

$$e_f = \frac{\partial x}{\partial f} e_x + \frac{\partial y}{\partial f} e_y$$

$$e_g = \frac{\partial x}{\partial g} e_x + \frac{\partial y}{\partial g} e_y$$

Podremos expresar más genéricamente como:

$$e_{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} e_j$$

$$e_i = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} e_{j'}$$

Pero, por otro lado, ¿qué clase de ley rige la conversión de Coordenadas? Pues, en realidad ya lo hemos visto, aunque lo hayamos pasado por alto. ¿Qué relación debe existir para que el cambio de coordenadas mantenga la igualdad de un vector en dos sistemas diferentes? Naturalmente, las coordenadas deberán interrelacionarse, de alguna manera, vinculada a las expresiones de la función que hemos manejado para interrelacionar el sistema (a todas luces, casi podemos anticipar que de manera inversa a la conversión entre las bases).

Las ***coordenadas*** *hacia el* sistema de ***Base Coordenada*** se transforman así[47]:

$$C^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j}} C^{j}$$

$$C^{i} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{j'}} C^{j'}$$

Pero que suceda esto con las coordenadas, por supuesto, no es ninguna casualidad maravillosa, sino que es una consecuencia necesaria del modo en que estamos construyendo nuestro sistema. Una especie de razonamiento circular pues, habiendo definido la transformación de bases tal y como la hemos definido es absolutamente necesario que esto suceda con las coordenadas. Puesto que las coordenadas, como sabemos, van siempre al revés que las bases, es perfectamente lógico que esta construcción se produzca tal y como lo hace.

Veamos un ejemplo (no vamos a usar el mismo ejemplo que estamos usando porque al ser una función cuadrática, el resultado no va a ser tan intuitivo como desearíamos).

Volvamos a un ejemplo más simple (uno que ya hemos usado en la página…) de Bases Coordenadas.

Recordemos el Espacio Funcional de aquel ejemplo.

$$f_{(x,y)} = x + y$$

$$g_{(x,y)} = 4x + y$$

Supongamos, de nuevo, nuestras dos capas: la Capa Cartesiana de Referencia primaria y la Capa con el Espacio Funcional definido por $f_{(x,y)}$ y $g_{(x,y)}$ y que, en dicho Sistema, recordemos, habíamos trazado un vector cualquiera, cuya medición era:

$$\vec{v} = 5e_x + 2e_y = 7e^f + 22e^g$$

Veamos si la conversión de coordenadas que proponemos funciona. Recordemos que acabamos de decir que la conversión de coordenadas entre sistemas se realiza mediante:

[47] Este algoritmo es también válido para componentes covariantes de manera que podemos decir que:

$$C_{i'} = \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{i'}} C_{j}$$

$$C^f = \frac{\partial f}{\partial x} C^x + \frac{\partial f}{\partial y} C^y$$

Según el criterio de sumación de Einstein: $C^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} C^j$

$$C^g = \frac{\partial g}{\partial x} C^x + \frac{\partial g}{\partial y} C^y$$

Según el criterio de sumación de Einstein: $C^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} C^{j'}$

$$C^f = \frac{\partial(x+y)}{\partial x} 5 + \frac{\partial(x+y)}{\partial y} 2 = 5 + 2 = 7$$

$$C^g = \frac{\partial(4x+y)}{\partial x} 5 + \frac{\partial(4x+y)}{\partial y} 2 = 20 + 2 = 22$$

Es decir, funciona perfectamente.

Así, imponiendo que la ***Transformación de las Bases y las Componentes entre Sistemas*** sea así, garantizamos que el objeto que estamos estudiando (en nuestro ejemplo, el vector $\vec{v}$) permanezca invariante para todos los Sistemas, es decir sería un objeto que permanece ***invariante con independencia del Sistema*** desde el que estemos midiéndolo. Y justamente ese objeto invariante es un ***Tensor***. Un objeto que se ha construido en el seno de un Sistema configurado mediante una serie de pautas que permiten que dicho objeto permanezca invariante con total independencia del Sistema desde el que se mida.

Por si nos hemos despistado, ¿en qué momento hemos realizado dicha imposición?

- En un primer lugar hemos configurado una relación entre bases mediante unas funciones.
- En segundo lugar, y aún más importante, hemos impuesto que:

$$\vec{v} = C^x e_x + C^y e_y = C^f e_f + C^g e_g \quad [48]$$

[48] Obsérvese, de hecho, que esto:

$$C^f = \frac{\partial f}{\partial x} C^x + \frac{\partial f}{\partial y} C^y \;//\; C^g = \frac{\partial g}{\partial x} C^x + \frac{\partial g}{\partial y} C^y$$

es una consecuencia forzosa de esta imposición:

$$\vec{v} = C^x e_x + C^y e_y = C^f e_f + C^g e_g$$

Es decir, hemos forzado a que los sistemas (las ***bases*** y las ***coordenadas***) se relacionen de una manera determinada para que el vector permanezca invariante para ambos. Conocemos qué algoritmo nos lleva del idioma de un Sistema a otro pero el vector es un ente que no se deforma, no cambia, con el cambio de Sistema. Mediante la expresión anterior forzamos un tipo de relación entre las Componentes y las Bases. Conformamos una configuración que permite que el vector permanezca invariante ante cualquier cambio de Sistema y, justamente por eso, es un ***Tensor***.

Así, cuando hayamos construido un objeto matemático cuyas coordenadas cumplan el siguiente requisito, diremos:

$$C^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j}} C^{j} \rightarrow \text{coordenada contravariante} \rightarrow \text{Tensor de tipo (1,0)}$$

$$C_{i'} = \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{i'}} C_{j} \rightarrow \text{coordenada covariante} \rightarrow \text{Tensor de tipo (0,1)}$$

(Observación. Como sucedía con el cálculo y transformación entre la Base Natural y la Base Dual, el sistema de notación es perfectamente consistente y, por lo tanto, soporta como ya vimos en la nota 48, el cambio de subíndices y superíndices. Es decir, una vez hayamos 'viajado' de un Sistema Cartesiano a un Sistema de Bases Coordenadas, podremos movernos internamente desde la perspectiva Natural a la Dual mediante la anterior expresión con sólo hacer cambios de superíndices por subíndices y viceversa.)

ADENDA FINAL A LOS EPÍGRAFES ANTERIORES

Hagamos un balance final de los procedimientos de transformación de coordenadas que hemos expuesto en los epígrafes anteriores.

Dentro de una misma capa. Cambio BASE NATURAL/BASE DUAL.

- Transformaciones de Base Natural a Base Dual y viceversa.

$$e^1 = \delta^{11} \cdot e_1 + \delta^{12} \cdot e_2$$
$$e^2 = \delta^{21} \cdot e_1 + \delta^{22} \cdot e_2$$

Según el criterio de sumación de Einstein: $e^i = \delta^{ij} \cdot e_j$

$$e_1 = \delta_{11} \cdot e^1 + \delta_{12} \cdot e^2$$
$$e_2 = \delta_{21} \cdot e^1 + \delta_{22} \cdot e^2$$

Según el criterio de sumación de Einstein: $e_i = \delta_{ij} \cdot e^j$

- Transformaciones de Coordenadas Contravariantes a Covariantes y viceversa.

$$C^1 = \delta^{11} \cdot C_1 + \delta^{12} \cdot C_2$$
$$C^2 = \delta^{21} \cdot C_1 + \delta^{22} \cdot C_2$$

Según el criterio de sumación de Einstein: $C^i = \delta^{ij} \cdot C_j$

$$C_1 = \delta_{11} \cdot C^1 + \delta_{12} \cdot C^2$$
$$C_2 = \delta_{21} \cdot C^1 + \delta_{22} \cdot C^2$$

Según el criterio de sumación de Einstein: $C_i = \delta_{ij} \cdot C^j$

Entre Capas con Bases Coordenadas 'funcionales' diferentes. Cambio de Bases.

- Transformaciones entre Bases de dos Sistemas diferentes.

$$e_f = \frac{\partial x}{\partial f} e_x + \frac{\partial y}{\partial f} e_y \quad // \quad e^f = \frac{\partial f}{\partial x} e^x + \frac{\partial f}{\partial y} e^y$$

$$e_g = \frac{\partial x}{\partial g} e_x + \frac{\partial y}{\partial g} e_y \quad // \quad e^g = \frac{\partial g}{\partial x} e^x + \frac{\partial g}{\partial y} e^y$$

Según el criterio de sumación de Einstein: $e_{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} e_j \quad // \quad e^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} e^j$

$$e_x = \frac{\partial f}{\partial x} e_f + \frac{\partial g}{\partial x} e_g \quad // \quad e^x = \frac{\partial x}{\partial f} e^f + \frac{\partial x}{\partial g} e^g$$

$$e_y = \frac{\partial f}{\partial y} e_f + \frac{\partial g}{\partial y} e_g \quad // \quad e^y = \frac{\partial y}{\partial f} e^f + \frac{\partial y}{\partial g} e^g$$

Según el criterio de sumación de Einstein: $e_i = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} e_{j'} \quad // \quad e^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} e^{j'}$

- Transformaciones entre Coordenadas de dos Sistemas diferentes.

$$C^f = \frac{\partial f}{\partial x} C^x + \frac{\partial f}{\partial y} C^y$$

Según el criterio de sumación de Einstein: $C^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} C^j$

$$C^g = \frac{\partial g}{\partial x} C^x + \frac{\partial g}{\partial y} C^y$$

Según el criterio de sumación de Einstein: $C^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} C^{j'}$

-2.2-

Tensores.

§

2.2.1. Introducción.

(OBSERVACIÓN. ¿Los tensores están relacionados con el cambio entre Base Natural y Base Dual o entre cambio de coordenadas de sistemas diferentes? Aclarar. Están relacionados ante cualquier cambio, es decir: a) cambio de Base natural/dual y b) cambio de coordenadas en sistemas relacionados por una función)

Y sabemos que, imponiendo que la ***Transformación de las Bases y las Coordenadas entre Sistemas*** en base a una ***Función*** sea del modo en que hemos expuesto en el capítulo anterior, garantizamos que el objeto que estamos estudiando (recordemos que en nuestro ejemplo era el vector $\vec{v}$) permanezca invariante para ambos Sistemas, es decir sería un objeto que permanece ***invariante con independencia del Sistema*** desde el que estemos midiéndolo. Y justamente ese objeto invariante es un ***Tensor***.

Por si nos hemos despistado, ¿en qué momento hemos realizado dicha imposición?

- En un primer lugar hemos configurado una relación entre bases de dos Sistemas mediante unas funciones.

- En segundo lugar, y aún más importante, hemos impuesto que:

$$\vec{v} = C^x e_x + C^y e_y = C^f e_f + C^g e_g$$

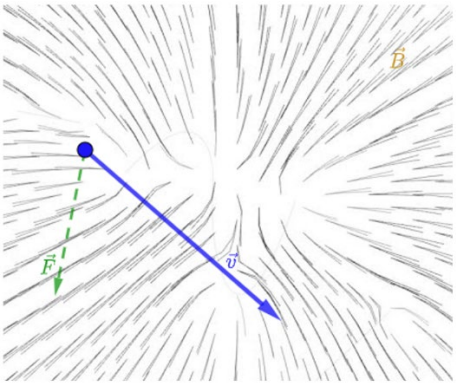
Es decir, hemos forzado a que los sistemas (las ***bases*** y las ***coordenadas***) se relacionen de una manera determinada para que el vector permanezca invariante para ambos. Conocemos qué algoritmo nos lleva del idioma de un Sistema a otro pero el vector (Tensor de Rango 1) es un ente que no se deforma con el cambio de Sistema.

Vamos a seguir un ejemplo que nos permita ver una aplicación práctica que ilustre la utilidad y necesidad de manejar el concepto de Tensor. Para ello usaremos la expresión de la Fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Que en términos generales indica la fuerza ($\vec{F}$) que percibe una partícula con carga q y velocidad $\vec{v}$ que está sometida a aun campo magnético $\vec{B}$ (para el ejemplo que queremos exponer no es necesario que manejemos el escalar con la cantidad de carga q).

$$\vec{F} = \vec{v} \times \vec{B}$$



Supongamos que quisiéramos calcular la componente, la proyección, del vector $\vec{F}$ (Fuerza) sobre un eje determinado. Sabemos que esto se calcula mediante el producto escalar entre el propio vector $\vec{F}$ y el vector unitario definido en el eje sobre el que se desea proyectar, por ejemplo:

$$\vec{F}_x = \vec{F} \cdot \hat{e}_x$$

Como, por otro lado, queremos hacer esta simulación sobre un eje con dirección arbitraria, hagámoslo con nuestro vector unitario de dirección aleatoria $\hat{n}$, es decir:

$$\vec{F}_n = \vec{F} \cdot \hat{n}$$

Así, si quisiéramos estudiar el asunto desde una proyección concreta, podríamos replantear la expresión inicial como:

$$\vec{F} \cdot \hat{n} = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \hat{n}$$

Donde, naturalmente, el resultado será un escalar (es un producto escalar). Pensemos ahora en el primer término de la expresión como si fuera una especie de función dependiente de dos vectores que actúan como variables independientes. Expresémoslo así:

$$\overline{T}_{(\vec{v},\hat{n})} = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \hat{n}$$

$$\overline{T}_{(\vec{v},\hat{n})} = escalar$$

Supongamos también que estamos en un mundo euclídeo R^3 con base:

$$\{e_1, e_2, e_3\}$$

Con métrica:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que el vector velocidad $\vec{v}$, sería:

$$\vec{v} = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3$$

Y el vector unitario $\hat{n}$, de dirección arbitraria:

$$\hat{n} = n^1 e_1 + n^2 e_2 + n^3 e_3$$

Desarrollemos ahora nuestra expresión. Por un lado recordemos que el ***producto vectorial*** en un espacio euclídeo R^3:

$$e_1 \times e_1 = 0$$

$$e_1 \times e_2 = e_3$$

$$e_2 \times e_3 = e_1$$

$$e_3 \times e_1 = e_2$$

$$\dots$$

$$\delta_{ij} \rightarrow \begin{Bmatrix} \delta_k; si\ i \neq j \\ -\delta_k; si\ \delta_{ji} \\ 0, si\ i = j \end{Bmatrix}$$

De manera que:

$$\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = (v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3) \times (B^1 e_1 + B^2 e_2 + B^3 e_3) \quad [49]$$

Se despliega como:

$$\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = v^1 B^2 e_3 - v^1 B^3 e_2 - v^2 B^1 e_3 + v^2 B^3 e_1 + v^3 B^1 e_2 - v^3 B^2 e_1$$

$$\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = (v^2 B^3 - v^3 B^2) e_1 + (v^3 B^1 - v^1 B^3) e_2 + (v^1 B^2 - v^2 B^1) e_3$$

Que si seguimos desarrollando, al ***multiplicar escalarmente*** por $\hat{n}$, tal y como teníamos en nuestra expresión, se anularían los términos con subíndices desiguales (pues se trataría de vectores linealmente independientes), es decir:

[49] Como el producto vectorial es una operación multilineal permite aplicar la propiedad "distributiva". Recordemos, además, que conmutan en negativo.

$$\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)=[(v^2B^3-v^3B^2)e_1+(v^3B^1-v^1B^3)e_2+(v^1B^2-v^2B^1)e_3]\cdot(n^1e_1+n^2e_2+n^3e_3)$$

$$\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)=(v^2B^3-v^3B^2)n^1+(v^3B^1-v^1B^3)n^2+(v^1B^2-v^2B^1)n^3$$

Es decir que:

$$\overline{T}_{(\vec{v},\hat{n})}=(v^2B^3-v^3B^2)n^1+(v^3B^1-v^1B^3)n^2+(v^1B^2-v^2B^1)n^3$$

$$\overline{T}_{(\vec{v},\hat{n})}=-B^3v^1n^2+B^2v^1n^3+B^3v^2n^1-B^1v^2n^3+B^1v^2n^2-B^2v^3n^1$$

Que, efectivamente, arroja un resultado escalar pues, obsérvese que han desaparecido todos los vectores y nos hemos quedado sólo con componentes (coordenadas).

La particularidad de esta "función" $\overline{T}$ es que no se evalúa con puntos, sino con ***vectores***. Es decir, a la función se le introducen dos vectores y arroja un escalar. En términos más apropiados la deberíamos denominar como una ***Función Escalar con Variable Vectorial***. Sin embargo, por ser algo más claros, digamos que tenemos una función que depende de dos vectores-variables independientes $(\vec{v},\hat{n})$ y que tiene 'dentro de sí' un valor fijo de relación, a modo de algoritmo, que es otro vector: $\vec{B}$:

$$\overline{T}_{(\vec{v},\hat{n})}=\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\hat{n}$$

Si miramos nuestra expresión desarrollada… ¿Qué es fijo? ¿Qué elemento no está en función de algo variable? Parece obvio (lo marcamos en rojo):

$$\overline{T}_{(\vec{v},\hat{n})}=-B^3v^1n^2+B^2v^1n^3+B^3v^2n^1-B^1v^2n^3+B^1v^3n^2-B^2v^3n^1$$

Además, si nos fijamos podemos observar que en cada término aparecen los índices 1,2,3 diferenciados siempre pues nunca coinciden, de manera que, con el fin de simplificar el asunto y acercarlo a la notación de Einstein, podríamos decir que:

$$\overline{T}_{(\vec{v},\hat{n})}=T_{12}v^1n^2+T_{13}v^1n^3+T_{21}v^2n^1+T_{23}v^2n^3+T_{22}v^3n^2+T_{31}v^3n^1 \quad [50]$$

Que, ciertamente, según el criterio de sumación de Einstein, podremos expresar de una manera muy eficiente y reducida como:

[50] Nótese que $T_{12}==-B^3$, $T_{13}==+B^2$, …y , claro, los términos que no están, como por ejemplo: T_{11} es porque $T_{11}=0$.

$$\overline{T}_{(\vec{v},\hat{n})} = T_{ij}v^i n^j \quad ^{51}$$

Y esto, justamente, una ***Función Escalar con Variable Vectorial*** de dos vectores-variables ***que se pueda formular como la expresión anterior*** es un ***Tensor de Orden 2***.

Señalamos especialmente "que se pueda expresar…" porque es fundamental que la formulación de la Función permita una expresión como la que hemos propuesto. Así, expresiones como, por ejemplo:

$$\overline{T}_{(\vec{v},\hat{n})} = \vec{v} + \hat{n}$$

$$\overline{T}_{(\vec{v},\hat{n})} = \vec{v}^{\hat{n}}$$

…

No son tensores porque no permitirían su expresión según la expresión que hemos comentado y ello implicaría que no habría invarianza ante cambios de sistema de coordenadas, que es lo fundamental para un Tensor. La definición de Tensor requiere que tenga la forma de un Escalar independiente de las variables multiplicado escalarmente por las componentes (escalares también) de los dos vectores que hacen de variables independiente de nuestra 'Función Vectorial'.

En nuestro ejemplo, recordemos, el campo magnético $\vec{B}$ (T_{ij}) por el que discurría nuestra partícula de carga q, es totalmente independiente de la velocidad $\vec{v}$ y la dirección $\hat{n}$ que ésta llevaba.

Así, esta expresión, para terminar de definir lo que es un Tensor debe ser consistente ante un cambio de coordenadas, es decir, el escalar que marcamos en rojo:

$$\overline{T}_{(\vec{v},\hat{n})} = T_{ij}v^i n^j$$

---

[51] He aquí la utilidad de poner los índices debajo de la T, que ya sabemos que es un sumatorio cuyos términos van cambiando según cambie la dupla ij.

$$\overline{T}_{(\vec{A},\vec{B})} = T_{ij}A^i B^j$$

¿Cómo desarrollaríamos este sumatorio de Einstein? Para empezar necesitamos conocer la dimensión del espacio vectorial al que pertenecen los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Establezcamos que, para facilidad y por no dar mucho la chapa, es un espacio vectorial Bidimensional. Es decir que $\vec{A}$ y $\vec{B}$, que son vectores del espacio vectorial bidimensional que mencionamos, podrán ser expresados como una combinación lineal de $\{e_1, e_2\}$, algo así como $\vec{A} = A^1 e_1 + A^2 e_2$ y $\vec{B} = B^1 e_1 + B^2 e_2$.

Ahora desarrollemos el sumatorio de Einstein:

$$\overline{T}_{(\vec{A},\vec{B})} = T_{ij}A^i B^j$$

$$\overline{T}_{(\vec{A},\vec{B})} = T_{11}A^1B^1 + T_{12}A^1B^2 \text{ (cuando B (j) llega a 2, su límite máximo, toca turno de que A (i) cambie de ciclo)}$$

$$+T_{21}A^2B^1 + T_{22}A^2B^2 \text{ (y ya no hay más, claro…)}$$

$$\overline{T}_{(\vec{A},\vec{B})} = T_{11}A^1B^1 + T_{12}A^1B^2 + T_{21}A^2B^1 + T_{22}A^2B^2$$

…debe transformarse según la siguiente regla (nos debe sonar a lo que vimos en los cambios entre Sistemas con ***Bases diferentes***[52], pero aun así, ya veremos ejemplos que lo dejarán más claro):

$$T_{ij} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j}} T_{i'j'}$$

Téngase en cuenta que esto es una ***imposición***. Obligamos, digámoslo así, a que el sistema (los sistemas) desde el que se mide, se configuren de manera que el objeto que estamos estudiando, al que hemos dado una forma matemática determinada, permanezca invariable. Algo así como cuando realizamos una rotación pasiva: no tocamos vectores sino sistemas de referencia[53].

---

[52] De ahí que los subíndices en el lado derecho de la expresión tengan primas y no sean superíndices.

[53] Un tensor es la generalización de objetos matemáticos lineales, de manera que tanto vectores, formas lineales, formas bilineales, función determinante, etc. son casos particulares de un objeto matemático que llamamos tensor. Con ello conseguimos estudiar todos esos objetos distintos de un solo golpe. ¿Cómo se consigue esa generalización?

Supongamos que V es el espacio vectorial de partida y V* su espacio vectorial dual, esto es, V* es el conjunto de las formas lineales de V en R. Definimos tensor de orden (i, j) como una forma multilineal de V* x ... x V* x V x ... x V en R, donde V* aparece i veces y V aparece j veces.

Así, una forma lineal de V en R es un tensor de orden (0, 1) ya que V* aparece 0 veces y V aparece 1 vez.

Una forma bilineal de VxV en R es de orden (0, 2). El producto escalar es un caso particular de tensor (0, 2).

Un vector es un tensor de orden (1, 0). ¿Cómo puede ser un vector (elemento de V) lo mismo que una forma lineal de V* en R? Pues porque se puede probar que estos dos objetos son isomorfos naturales, esto es, que son indistinguibles desde el punto de vista de sus propiedades lineales y además no necesitamos utilizar ninguna base para establecer este hecho. Así que aunque V y el conjunto de las formas lineales de V* en R vistos desde fuera son cosas distintas, podemos identificar a cada vector de V con una forma lineal de V* en R, considerando que ambos son la misma cosa sin ningún problema. Esa es la razón por la que los vectores son tensores (1, 0). Dicho de otra manera, podemos considerar que el espacio de partida V y el espacio dual del dual V** son el mismo.

Igualmente, el conjunto de las aplicaciones lineales de V en V es esencialmente la misma cosa que el conjunto de las formas bilineales de V* x V en R; por ello, podemos considerar una aplicación lineal de V en V como un tensor (1, 1).

La función determinante es un tipo particular de forma multilineal que a n vectores de V les hace corresponder un número, luego una función determinante es un tensor (0, n), donde n es la dimensión de V.

Finalmente, podemos considerar los números (elementos de R) como tensores (0, 0).

A partir de la definición de tensor que hemos dado, podemos definir la suma de tensores de igual orden, el producto de un tensor por un escalar, el producto tensorial de dos tensores no necesariamente del mismo orden o la contracción de un tensor.

Podemos ver que el conjunto de los tensores de orden (i, j) es, a su vez, un espacio vectorial de dimensión n elevado a (i+j). Dada una base de V podemos establecer una base asociada para el conjunto de tensores de orden (i, j); de esta manera aparecen las componentes de un tensor en una base. Si cambiamos la base de V, cambiará la base asociada al conjunto de tensores (i, j), de manera que podemos dar la fórmula de cambio de componentes de un tensor cuando cambiamos la base de V.

Por ejemplo, si V tiene dimensión tres y dada una base de V, un tensor (0, 0) queda definido por 1 número; un tensor (1, 0) por 3 números, un tensor (0, 2) por 9 números, etc. Si cambiamos la base de V cambiarán dichos números, esto es, cambiarán las componentes del tensor, pero no cambiará el tensor.

Ahora, para seguir desarrollando el concepto de Tensor vamos a tener que definir qué ***es un Producto Tensorial***[54] de espacios Vectoriales. Para ello imaginemos un Espacio Vectorial V que reúne, naturalmente, todas sus propiedades inherentes (tiene una base $\{e_1, e_2\}$, una métrica, por ejemplo, la Cartesiana-Identidad, elemento inverso, …) y, a continuación, imaginemos que construimos otro Espacio Vectorial que es un poco 'particular' (de momento pensemos que es una especie de Espacio Vectorial Multicapa) multiplicando Tensorialmente V consigo mismo: $V \otimes V$.

Este nuevo Espacio Vectorial 'con Profundidad'[55] (llamémoslo $V \otimes V$) tiene, como es de imaginar, todas las propiedades de un espacio vectorial.

Así, si el Espacio Vectorial V tenía una Base:

$$\{e_1, e_2\}$$

Y si mediante combinaciones lineales de los vectores de dicha base podríamos construir cualquier elemento perteneciente al espacio V, el Espacio Vectorial $V \otimes V$ tiene como base:

$$\{\ e_1 \otimes e_1\ ,\ e_1 \otimes e_2\ ,\ e_2 \otimes e_1\ ,\ e_2 \otimes e_2\ \}$$

E igualmente, mediante combinaciones lineales de estos elementos podremos construir cualquier 'vector' (en realidad aquí ya no es un vector sino un ***Tensor***) perteneciente a dicho espacio $V \otimes V$.

Es importante hacer notar que cualquiera de los elementos de la base de $V \otimes V$ es, efectivamente, en sí mismo, un elemento. Es decir, por ejemplo, $e_1 \otimes e_2$ no es la conjugación de dos elementos, sino que es un elemento en sí mismo. Por eso interesante que pensemos en todo esto como una abstracción instrumental para facilitarnos el cálculo de determinadas operaciones. Así, si bien antes teníamos que, por ejemplo, $e_1 \cdot e_2$ nos daba como resultado un escalar, o, $e_1 \times e_2$ nos daba como resultado otro vector no coplanar con los vectores multiplicados vectorialmente, ahora tenemos que $e_1 \otimes e_2$ no es ni un escalar ni un vector, sino una entidad matemática, una abstracción que vamos a usar como herramienta para facilitar cálculos que se realizan en un espacio vectorial, digamos, raro (véase la nota 51). A dicha abstracción la llamaremos, precisamente: Tensor. El resultado del producto tensorial de dos vectores… algo así como un *vector con profundidad*…

Por todo esto, como es de imaginar, el mismo modo en que antes, en el Espacio Vectorial V, definíamos un elemento, un vector, como, por ejemplo:

---

[54] El Producto Tensorial se denotará mediante el símbolo: $\otimes$. Es una operación multilineal (soporta la propiedad distributiva), es no conmutativo, … ya iremos viendo más propiedades según vayamos usándolo.

[55] Un tensor siempre es un elemento que pertenece a un espacio que es un producto de un espacio vectorial por otro espacio vectorial. Si es el producto de n espacios vectoriales entonces serán tensores de Orden n. Es interesante pensar el Tensor como un elemento, como una entidad abstracta, puramente instrumental, que va a permitir realizar y simplificar operaciones en que estén vinculados más de un Sistema de Referencia. En el caso del ejemplo que estamos desarrollando del espacio vectorial $V \otimes V$, puede ser útil verlo como una especie de matriz con 'profundidad'… como una especie de matriz multicapa:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$(\vec{v} = 5e_1 + 8e_2) \in V$$

Ahora, en el Espacio Vectorial '*con profundidad*' $V \otimes V$, cualquiera de sus elementos, Tensores, podrá definirse como, por ejemplo:

$$[T = 3(e_1 \otimes e_1) + 7(e_1 \otimes e_2) + 2(e_2 \otimes e_1) + 6(e_2 \otimes e_2)] \in V \otimes V$$

Que sería un Tensor de Orden 2 porque pertenece a un espacio conformado por el Producto Tensorial entre dos espacios Vectoriales (en nuestro ejemplo, el Espacio V por sí mismo).

Ahora, ***definamos el producto escalar*** entre elementos de la base del Espacio $V \otimes V$.

¿Cómo definiríamos esta operación?

$$(e_i \otimes e_j) \cdot (e_k \otimes e_m)$$

Del siguiente modo:

$$(e_i \cdot e_k) \cdot (e_j \cdot e_m)$$

Ahora, si nos fijamos, tenemos finalmente productos escalares entre vectores que, ciertamente, nos arrojará como resultado un escalar. Algo como esto (recordemos que el primer espacio vectorial V tiene una métrica):

$$(e_i \cdot e_k) = g_{ik} \quad [56]$$

$$(e_j \cdot e_m) = g_{jm}$$

Por lo que:

$$(e_i \cdot e_k) \cdot (e_j \cdot e_m) = g_{ik} \cdot g_{jm}$$

Y, por lo tanto:

$$(e_i \otimes e_j) \cdot (e_k \otimes e_m) = g_{ik} \cdot g_{jm}$$

Que no es otra cosa que la definición del modo en que funciona el producto escalar dentro de $V \otimes V$… efectivamente, acabamos de definir cómo construir su métrica. Es decir, que venimos de la relación, digámoslo así, de dos moléculas: $(e_i \otimes e_j)$ y $(e_k \otimes e_m)$ que, decíamos, no eran más que una abstracción instrumental, y ahora, mediante el producto escalar entre las mismas, conseguimos 'catalizarlas' en 'átomos' escalares. No es que hayamos separado los vectores que las conformaban, no es eso. Es que mediante el producto escalar hemos conseguido vincular un escalar a las abstracciones, los ladrillos abstractos del espacio $V \otimes V$. Hemos construido su métrica[57].

Veámoslo de nuevo con un ejemplo más detallado. Para ello usemos de nuevo nuestro Espacio *Profundo* $V \otimes V$. Téngase en cuenta que lo habitual es que se produzca un Producto Tensorial entre dos Espacios Vectoriales diferentes, por ejemplo, $V \otimes W$ pero que, en

[56] Obviamente esto es un escalar.

[57] Observemos los índices 'cruzados' de g y recordemos la ilustración intuitiva que presentamos en la nota 51…¿no tiene cierta lógica que los elementos de la métrica sean el resultado de una combinación de índices de los 'diferentes planos'?

nuestro ejemplo, por simplificar las cosas, hemos optado por realizar el producto directo[58] del espacio por sí mismo. Así, supongamos, como decíamos, el producto tensorial entre vectores de cada uno de los espacios (al ser ambos V vamos a usar colores para saber a qué espacio vectorial pertenece cada vector).

Siendo el espacio $V \otimes V$ y siendo $\vec{A}$ y $\vec{C}$ vectores que pertenecen a V y $\vec{B}$ y $\vec{D}$ vectores que pertenecen a V, desarrollemos la siguiente operación:

$$(\vec{A} \otimes \vec{B}) \cdot (\vec{C} \otimes \vec{D})$$

Usando el mismo ejemplo de antes:$(e_i \otimes e_j) \cdot (e_k \otimes e_m)$, mantenemos que:

- el espacio V, tiene una base:$\{e_i, e_k\}$ [59]
- el espacio V, tiene una base: $\{e_j, e_m\}$

Ahora, como ya hemos hecho en el ejemplo anterior, habremos de multiplicar cada elemento con su elemento correspondiente que '***cohabita en su mismo espacio***', es decir[60]:

$$(\vec{A} \otimes \vec{B}) \cdot (\vec{C} \otimes \vec{D}) = (A^i e_i \otimes B^j e_j) \cdot (C^k e_k \otimes D^m e_m)$$

Como el producto tensorial es multilineal, podremos aplicar la propiedad distributiva y replantear como:

$$= A^i B^j C^k D^m [(e_i \otimes e_j) \cdot (e_k \otimes e_m)]$$

Que, ya hemos visto más arriba, podemos expresar como:

$$(\vec{A} \otimes \vec{B}) \cdot (\vec{C} \otimes \vec{D}) = A^i B^j C^k D^m [g_{ik} g_{jm}] \rightarrow A^i B^j C^k D^m g_{ik} g_{jm}$$

Que reordenando un poco:

$$(\vec{A} \otimes \vec{B}) \cdot (\vec{C} \otimes \vec{D}) = A^i C^k g_{ik} B^j D^m g_{jm}$$

Ahora hagamos un esfuerzo de memoria. Es cierto que no es fácil verlo a la primera pero… recordemos… En el capítulo anterior ¿Cómo hacíamos cambios de Coordenadas Contravariantes a Covariantes?

$$C_1 = \delta_{11} \cdot C^1 + \delta_{12} \cdot C^2$$
$$C_2 = \delta_{21} \cdot C^1 + \delta_{22} \cdot C^2$$
Según el criterio de sumación de Einstein: $C_i = \delta_{ij} \cdot C^j$

Luego podríamos decir que esto:

$$(\vec{A} \otimes \vec{B}) \cdot (\vec{C} \otimes \vec{D}) = A^i C^k g_{ik} B^j D^m g_{jm} \rightarrow A^i C_i B^j D_j$$

---

[58] Al producto Tensorial también se le llama así.

[59] Téngase en cuenta que ahora estamos haciéndolo para espacios n dimensionales, es decir, que, en un mismo espacio V, e_i y e_k puede ser (donde $i \neq k$) $e_1, e_2, \ldots$. Y lo mismo para los otros subíndices pero, claro está, con bases que pertenecen a sus propios espacios.

[60] Nótense las Componentes contravariantes acompañando a Bases covariantes.

Por lo que podremos decir finalmente que[61]:

$$(\vec{A} \otimes \vec{B}) \cdot (\vec{C} \otimes \vec{D}) = A^i C_i B^j D_j = \vec{A} \cdot \vec{C} \cdot \vec{B} \cdot \vec{D}$$

En definitiva, lo que queremos hacer con todo esto que hemos dicho es familiarizarnos con cómo manejarnos dentro del Espacio $V \otimes V$ y definir sus elementos, conformados mediante combinaciones lineales de la base $\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$[62], como Tensores.

Es decir, un Tensor es cualquier elemento que pertenezca al espacio Tensorial conformado mediante el producto tensorial de dos Espacios Vectoriales. Por ejemplo un Tensor de Orden 2:

$$T_{ij} \quad \in \quad V \otimes W$$

O, mejor, si queremos usar la nomenclatura mediante la que nos referimos a cada espacio vectorial como el espacio plano Tangente a una variedad M en un punto p:

$$T_{ij} \quad \in \quad T_pM \otimes T_pM$$

2.2.2. Comportamiento de un tensor ante cambio de Bases Naturales/Duales.

Apliquemos ahora esto algo concreto. Supongamos un Tensor[63] (para que el proceso sea más didáctico, nos interesa usar las versión dual de la base):

---

[61] Estamos multiplicando escalarmente Coordenadas Contravariantes de un vector con las Coordenadas Covariantes de otro vector. Desarrollémoslo para refrescar nuestra memoria. Sabemos que una Base Dual debe cumplir el siguiente requisito apriorístico respecto a la Base Natural:

$$e^1 \cdot e_1 = 1 \;//\; e^2 \cdot e_2 = 1 \;//\; e^1 \cdot e_2 = 0 \;//\; e^2 \cdot e_1 = 0$$

Así, si realizásemos, por ejemplo, el siguiente producto escalar con las Bases 'invertidas para cada vector':

$$(\vec{A} \cdot \vec{C}) = (A^1 e_1 + A^2 e_2) \cdot (C_1 e^1 + C_2 e^2)$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{C}) = A^1 e_1 C_1 e^1 + \cancel{A^1 e_1 C_2 e^2} + \cancel{A^2 e_2 C_1 e^1} + A^2 e_2 C_2 e^2$$

Donde lo marcado en rojo se anula por estar multiplicado por cero y nos queda sólo aquellos términos donde la multiplicación entre vectores de la base es igual a 1:

$$(\vec{A} \cdot \vec{C}) = A^1 C_1 + A^2 C_2$$

Es decir, según la notación de sumación de Einstein:

$$(\vec{A} \cdot \vec{C}) = A^i C_i$$

[62] Esta Base 'Tensorial' es, digamos, natural porque tiene los índices abajo. Al igual que pasaba con las bases 'simples' de un Espacio Vectorial simple, la Base 'Tensorial' Dual sería:

$$\{e^1 \otimes e^1, e^1 \otimes e^2, e^2 \otimes e^1, e^2 \otimes e^2\}$$

[63] Téngase en cuenta que un Tensor de Orden 2 tiene cuatro 'dimensiones', pues la base de su Espacio Tensorial se compone de cuatro elementos.

$$\overline{T} = T_{11}e^1 \otimes e^1 + T_{12}e^1 \otimes e^2 + T_{21}e^2 \otimes e^1 + T_{22}e^2 \otimes e^2$$

$$\overline{T} = 0e^1 \otimes e^1 + 5e^1 \otimes e^2 + 0e^2 \otimes e^1 + 2e^2 \otimes e^2$$

Es decir:

$$\overline{T} = 5e^1 \otimes e^2 + 2e^2 \otimes e^2$$

Pues:

$$T_{11} = 0$$

$$T_{12} = 5$$

$$T_{21} = 0$$

$$T_{22} = 2$$

Exploremos un poco más, con este ejemplo concreto, las propiedades de los tensores. Veamos cómo 'funciona' el producto escalar[64] entre un Tensor que está en la forma anterior con un elemento que es un producto tensorial entre dos vectores, es decir:

$$\overline{T} \cdot (\vec{A} \otimes \vec{B}) = ¿?$$

Que es:

$$= (5e^1 \otimes e^2 + 2e^2 \otimes e^2) \cdot (\vec{A} \otimes \vec{B})$$

Que estaremos de acuerdo que podemos expresar como:

$$= (5e^1 \otimes e^2 + 2e^2 \otimes e^2) \cdot (A^i e_i \otimes B^j e_j) \quad [65]$$

Que podemos desplegar como:

$$= 5(e^1 \otimes e^2)(A^i e_i \otimes B^j e_j) + 2(e^2 \otimes e^2) \cdot (A^k e_k \otimes B^m e_m) \quad [66]$$

$$= 5A^i B^j e^1 e_i e^2 e_j + 2A^k B^m e^2 e_k e^2 e_m$$

$$= 5A^i B^j \delta_i^1 \delta_j^2 + 2A^k B^m \delta_k^2 \delta_m^2$$

[64] Naturalmente un producto escalar sólo se puede hacer entre elementos que pertenezcan 'al mismo mundo', en este caso, $T_pM \otimes T_pM$.

[65] En este caso, en el factor $(\vec{A} \otimes \vec{B})$ hemos optado por poner los vectores base con subíndices, es decir, como base natural. Ello es un ejercicio de arrimar el ascua a nuestra sardina pues nos va a ser muy útil para ilustrar el proceso que nos interesa. Por otro lado, al haber introducido el Criterio de sumación de Einstein lo que estamos haciendo es ahorrarnos poner todas las componentes de cada vector que, por cierto, tienen letras de índice diferentes porque, claro, no tienen por qué coincidir, sí $\vec{A}$ tiene una base en $e_{i=1}$, $\vec{B}$ no tiene por qué tenerla en 1 también.

[66] Insistimos, todos tienen índices con letras diferentes porque aún no conocemos las 'direcciones' de estos objetos en Espacio 'Tensorial'. De cualquier manera, en el mismo desarrollo veremos que era necesario tener letras diferentes porque los valores que pueden adoptar 'los de un lado y otro' no tienen por qué coincidir.

Ahora recordemos cómo definíamos una Base Dual:

$$e_1 \cdot e^1 = \delta_1^1 = 1$$

$$e_1 \cdot e^2 = \delta_1^2 = 0$$

…

Es decir, que para que todos los términos 'activos', que forman parte del tensor que hemos definido[67], debe darse una situación como la que arriba hemos marcado en azul. Es decir, que necesariamente:

$$i = 1 \;//\; j = 2 \;//\; k = 2 \;//\; m = 2$$

Es decir:

$$= 5A^1B^2\delta_1^1\delta_2^2 + 2A^2B^2\delta_2^2\delta_2^2$$

$$= 5A^1B^2 + 2A^2B^2$$

Por lo que podemos concluir que para nuestro tensor:

$$\overline{T} = 5e^1 \otimes e^2 + 2e^2 \otimes e^2$$

La operación:

$$\overline{T} \cdot (\vec{A} \otimes \vec{B})$$

Tiene un resultado de:

$$\overline{T} \cdot (\vec{A} \otimes \vec{B}) = 5A^1B^2 + 2A^2B^2$$

Que cuadra perfectamente con la definición que hicimos:

$$\overline{T}_{(\vec{A},\vec{B})} = T_{ij}A^iB^j$$

Es decir que ya hemos hablado de un Tensor desde dos perspectivas:

- Como una Función que 'se alimenta' de vectores.
- Como un elemento del Espacio $T_pM \otimes T_pM$.

Y además, en este caso, lo hemos visto desde el punto de vista de cómo se comporta un Tensor ante cambios de Bases Naturales/Duales.

2.2.3. Comportamiento de un tensor ante cambio de Sistemas de Coordenadas.

Ahora vamos a ver cómo se comporta nuestro Tensor de ejemplo ante un cambio de coordenadas. Ante Sistemas de coordenadas diferentes y relacionados por una función, como

[67] Téngase en cuenta que dicho tensor está, para entendernos, 'vivo', por lo que todas las sub-partes de los componentes con que lo hemos definido deben estar 'activadas' en su totalidad.

los que ya hemos visto, también, en el capítulo anterior. Para ello, de hecho, traigamos a este contexto un sistema que ya hemos usado:

$$f = x + y$$

$$g = 4x + y$$

Tenemos dos sistemas:

- Un Sistema definido por las coordenadas x, y (S_{xy}).
- Un Sistema definido por las coordenadas f, g (S_{fg}).

Recordemos nuestro Tensor ejemplo[68]:

$$\overline{T} = 5e^x \otimes e^y + 2e^y \otimes e^y$$

Recordemos cuáles eran los 'ladrillos' con los que conformábamos la Base del Espacio $T_pM \otimes T_pM$:

$$\{e^x \otimes e^x \ , \ e^x \otimes e^y \ , \ e^y \otimes e^x \ , \ e^y \otimes e^y\}$$

Espacio en el que, recordemos, definiríamos un tensor como:

$$\overline{T} = T_{xx}e^x \otimes e^x + T_{xy}e^x \otimes e^y + T_{yx}e^y \otimes e^x + T_{yy}e^y \otimes e^y$$

Y que en nuestro ejemplo:

$$T_{xx} = 0$$

$$T_{xy} = 5$$

$$T_{yx} = 0$$

$$T_{yy} = 2$$

Y ahora lo que queremos mostrar o, más bien, imponer es que nuestro Tensor permanezca invariante visto desde cualquiera de los sistemas: (S_{xy}) y (S_{fg}). Expresémoslo en consecuencia, desde el punto de vista de los dos sistemas:

- Según (S_{xy}), ya lo hemos expresado anteriormente:

$$\overline{T} = 5e^x \otimes e^y + 2e^y \otimes e^y$$

- Según (S_{fg}):

$$\overline{T} = T_{ff}e^f \otimes e^f + T_{fg}e^f \otimes e^g + T_{gf}e^g \otimes e^f + T_{gg}e^g \otimes e^g$$

Por supuesto, de momento, no conocemos ninguno de los elementos que conforman el tensor visto desde el punto de vista del Sistema S_{fg} pero, claro, sí que conocemos las funciones que relacionan ambos sistemas, es decir, conocemos todo lo que necesitamos.

[68] Por mor de la claridad cambiamos los superíndices 1 y 2 por x e y, para identificar bien a qué sistema se corresponde la descripción del Tensor.

Efectivamente, podremos expresar e^f y e^g en función de e^x y e^y. Recordemos y apliquemos cómo se hacía el cambio de Bases entre sistemas de diferentes coordenadas[69]:

$$e^f = \frac{\partial f}{\partial x}e^x + \frac{\partial f}{\partial y}e^y = e^f = \frac{\partial (x+y)}{\partial x}e^x + \frac{\partial (x+y)}{\partial y}e^y = e^x + e^y$$

$$e^g = \frac{\partial g}{\partial x}e^x + \frac{\partial g}{\partial y}e^y = \frac{\partial (4x+y)}{\partial x}e^x + \frac{\partial (4x+y)}{\partial y}e^y = 4e^x + e^y$$

Empecemos a transformar. Ojo, que esto es tedioso, pero conviene ver cómo se van transformando los elementos[70]:

$$e^f \otimes e^f = (e^x + e^y) \otimes (e^x + e^y) = (e^x \otimes e^x) + (e^x \otimes e^y) + (e^y \otimes e^x) + (e^y \otimes e^y)$$

$$e^f \otimes e^g = (e^x + e^y) \otimes (4e^x + e^y) = (e^x \otimes 4e^x) + (e^x \otimes e^y) + (e^y \otimes 4e^x) + (e^y \otimes e^y)$$

$$e^g \otimes e^f = (4e^x + e^y) \otimes (e^x + e^y) = (4e^x \otimes e^x) + (4e^x \otimes e^y) + (e^y \otimes e^x) + (e^y \otimes e^y)$$

$$e^g \otimes e^g = (4e^x + e^y) \otimes (4e^x + e^y) = (4e^x \otimes 4e^x) + (4e^x \otimes e^y) + (e^y \otimes 4e^x) + (e^y \otimes e^y)$$

Reestructuremos:

$$e^f \otimes e^f = (e^x \otimes e^x) + (e^x \otimes e^y) + (e^y \otimes e^x) + (e^y \otimes e^y)$$

$$e^f \otimes e^g = 4(e^x \otimes e^x) + (e^x \otimes e^y) + 4(e^y \otimes e^x) + (e^y \otimes e^y)$$

$$e^g \otimes e^f = 4(e^x \otimes e^x) + (4e^x \otimes e^y) + (e^y \otimes e^x) + (e^y \otimes e^y)$$

$$e^g \otimes e^g = 16(e^x \otimes e^x) + 4(e^x \otimes e^y) + 4(e^y \otimes e^x) + (e^y \otimes e^y)$$

Juntémoslo todo (ojo al leñazo…) pues, sabiendo que:

$$\overline{T} = T_{ff}e^f \otimes e^f + T_{fg}e^f \otimes e^g + T_{gf}e^g \otimes e^f + T_{gg}e^g \otimes e^g$$

Es decir:

$$\overline{T} =$$

$$T_{ff}\big((e^x \otimes e^x) + (e^x \otimes e^y) + (e^y \otimes e^x) + (e^y \otimes e^y)\big)$$

$$+T_{fg}\big(4(e^x \otimes e^x) + (e^x \otimes e^y) + 4(e^y \otimes e^x) + (e^y \otimes e^y)\big)$$

$$+T_{gf}\big(4(e^x \otimes e^x) + 4(e^x \otimes e^y) + (e^y \otimes e^x) + (e^y \otimes e^y)\big)$$

$$+T_{gg}\big(16(e^x \otimes e^x) + 4(e^x \otimes e^y) + 4(e^y \otimes e^x) + (e^y \otimes e^y)\big)$$

---

[69] Recordemos que los vectores están expresados en su forma *dual*, con índice arriba, por ello la transformación es: $e^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}e^j$.

[70] Recordemos que cada $(e^x \otimes e^x)$ es un elemento. ¡No son dos elementos! ¡Es un elemento! De hecho, no haría falta poner paréntesis pues, de manera general, no ponemos un paréntesis a las partes 'atómicas' de una fórmula. Por eso algo como $(4e^x \otimes 4e^x)$ se puede expresar como $16(e^x \otimes e^x)$. Es decir, 16 veces el elemento $e^x \otimes e^x$. Esto es fundamental para entender el modo en que hemos 'sacado' los escalares de 'dentro' de los elementos.

Qué si desarrollamos (ojo al leñazo II…):

$$\overline{T} =$$

$$T_{ff}(e^x \otimes e^x) + T_{ff}(e^x \otimes e^y) + T_{ff}(e^y \otimes e^x) + T_{ff}(e^y \otimes e^y)$$
$$+4T_{fg}(e^x \otimes e^x) + T_{fg}(e^x \otimes e^y) + 4T_{fg}(e^y \otimes e^x) + T_{fg}(e^y \otimes e^y)$$
$$+ 4T_{gf}(e^x \otimes e^x) + 4T_{gf}(e^x \otimes e^y) + T_{gf}(e^y \otimes e^x) + T_{gf}(e^y \otimes e^y)$$
$$+16T_{gg}(e^x \otimes e^x) + 4T_{gg}(e^x \otimes e^y) + 4T_{gg}(e^y \otimes e^x) + T_{gg}(e^y \otimes e^y)$$

Podemos agrupar sacando factor común (el factor común serán, naturalmente, los elementos de la Base del 'espacio tensorial'):

$$\overline{T} =$$

$$\left(T_{ff} + 4T_{fg} + 4T_{gf} + 16T_{gg}\right)(e^x \otimes e^x)$$
$$+(T_{ff} + T_{fg} + 4T_{gf} + 4T_{gg})(e^x \otimes e^y)$$
$$+(T_{ff} + 4T_{fg} + T_{gf} + 4T_{gg})(e^x \otimes e^y)$$
$$+(T_{ff} + T_{fg} + T_{gf} + T_{gg})(e^x \otimes e^y)$$

Ahora recordemos cómo habíamos definido nuestro Tensor en el sistema (S_{xy}):

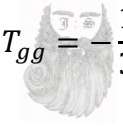
$$\overline{T} = 5e^x \otimes e^y + 2e^y \otimes e^y$$

Luego, equiparando las dos expresiones, estaríamos ante un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$T_{ff} + 4T_{fg} + 4T_{gf} + 16T_{gg} = 0$$
$$T_{ff} + T_{fg} + 4T_{gf} + 4T_{gg} = 5$$
$$T_{ff} + 4T_{fg} + T_{gf} + 4T_{gg} = 0$$
$$T_{ff} + T_{fg} + T_{gf} + T_{gg} = 2$$

Cuya solución es (pasamos de desarrollarlo… se puede mirar en cualquier sitio, app, calculadora…):

$$T_{ff} = \frac{4}{3}$$
$$T_{fg} = -\frac{1}{3}$$
$$T_{gf} = \frac{4}{3}$$
$$T_{gg} = -\frac{1}{3}$$



Es decir que, lo que en el Sistema (S_{fg}) era:

$$\overline{T} = T_{ff}e^f \otimes e^f + T_{fg}e^f \otimes e^g + T_{gf}e^g \otimes e^f + T_{gg}e^g \otimes e^g$$

Ya sabemos que es:

$$\overline{T} = \frac{4}{3}e^f \otimes e^f - \frac{1}{3}e^f \otimes e^g + \frac{4}{3}e^g \otimes e^f - \frac{1}{3}e^g \otimes e^g$$

Menudo leñazo, ¿verdad? Menos mal que, efectivamente, podemos ahorrarnos todo este rollo mediante una regla general que recoge el modo en que transforman los Tensores.

$$T_{fg} = \frac{\partial x^x}{\partial x^f}\frac{\partial x^y}{\partial x^g}\,T_{xy} \qquad // \qquad T^{fg} = \frac{\partial x^f}{\partial x^x}\frac{\partial x^g}{\partial x^y}T^{xy}$$

Aunque sólo sea por verlo funcionando, vamos a probarlo con los datos del ejemplo que estamos usando.

Si nos retrotraemos algunas páginas veremos que nuestras funciones, expresadas de manera implícita, eran:

$$x = -\frac{1}{3}f + \frac{1}{3}g$$

$$y = \frac{4}{3}f - \frac{1}{3}g$$

Veamos si la expresión de transformación genérica que proponemos funciona (tiene toda la pinta de que sí, claro…):

$$T_{fg} = \frac{\partial x^x}{\partial x^f}\frac{\partial x^y}{\partial x^g}\,T_{xy}$$

Probemos con:

$$T_{ff} = \frac{\partial x^x}{\partial f}\frac{\partial x^y}{\partial f}\,T_{xy}$$

Recordemos que esto es un sumatorio[71]:

$$T_{ff} = \frac{\partial x}{\partial f}\frac{\partial x}{\partial f}\,T_{xx} + \frac{\partial x}{\partial f}\frac{\partial y}{\partial f}\,T_{xy} + \frac{\partial y}{\partial f}\frac{\partial x}{\partial f}\,T_{yx} + \frac{\partial y}{\partial f}\frac{\partial y}{\partial f}\,T_{yy}$$

Es decir:

[71] Esto es un poco lioso… estaría bien que lo desarrolláramos aunque, en realidad, no tiene nada… Veamos: la cosa está en que hemos 'fijado' los denominadores con el T_{ff}, pero los numeradores deben conmutar… Por otro lado, es perfectamente lógico, pues la componente T_{ff} tensor debe tener un reflejo en las 'cuatro' dimensiones del 'espacio tensorial x,y'.

$$T_{ff} = \frac{\partial\left(-\frac{1}{3}f+\frac{1}{3}g\right)}{\partial f}\frac{\partial\left(-\frac{1}{3}f+\frac{1}{3}g\right)}{\partial f}\,T_{xx} + \frac{\partial\left(-\frac{1}{3}f+\frac{1}{3}g\right)}{\partial f}\frac{\partial\left(\frac{4}{3}f-\frac{1}{3}g\right)}{\partial f}\,T_{xy} + \frac{\partial\left(\frac{4}{3}f-\frac{1}{3}g\right)}{\partial f}\frac{\partial\left(-\frac{1}{3}f+\frac{1}{3}g\right)}{\partial f}\,T_{yx} + \frac{\partial\left(\frac{4}{3}f-\frac{1}{3}g\right)}{\partial f}\frac{\partial\left(\frac{4}{3}f-\frac{1}{3}g\right)}{\partial f}\,T_{yy}$$

Antes de ponernos a derivar, para ahorrar trabajo, conviene recordar nuestro Tensor ejemplo:

$$\overline{T} = 5e^x \otimes e^y + 2e^y \otimes e^y$$

Donde:

$$T_{xx} = 0 \;\; // \;\; T_{xy} = 5 \;\; // \;\; T_{yx} = 0 \;\; // \;\; T_{yy} = 2$$

Por lo que, automáticamente, nos podemos cargar al menos dos elementos de nuestra expresión, que nos quedará como sigue:

$$T_{ff} = \frac{\partial\left(-\frac{1}{3}f+\frac{1}{3}g\right)}{\partial f}\frac{\partial\left(\frac{4}{3}f-\frac{1}{3}g\right)}{\partial f}\cdot 5 + \frac{\partial\left(\frac{4}{3}f-\frac{1}{3}g\right)}{\partial f}\frac{\partial\left(\frac{4}{3}f-\frac{1}{3}g\right)}{\partial f}\cdot 2$$

$$T_{ff} = -\frac{20}{9}+\frac{32}{9} = \frac{12}{9} = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

Que, ciertamente, coincide con lo que ya habíamos calculado.

Aunque esto es un coñazo tremendo, vamos a ver el resto de términos aunque sea por consolidar la técnica de transformación. Vamos a ello:

$$T_{fg} = \frac{\partial x}{\partial f}\frac{\partial x}{\partial g}\,T_{xx} + \frac{\partial x}{\partial f}\frac{\partial y}{\partial g}\,T_{xy} + \frac{\partial y}{\partial f}\frac{\partial x}{\partial g}\,T_{yx} + \frac{\partial y}{\partial f}\frac{\partial y}{\partial g}\,T_{yy}$$

Es decir:

$$T_{fg} = \frac{\partial\left(-\frac{1}{3}f+\frac{1}{3}g\right)}{\partial f}\frac{\partial\left(-\frac{1}{3}f+\frac{1}{3}g\right)}{\partial g}\,T_{xx} + \frac{\partial\left(-\frac{1}{3}f+\frac{1}{3}g\right)}{\partial f}\frac{\partial\left(\frac{4}{3}f-\frac{1}{3}g\right)}{\partial g}\,T_{xy} + \frac{\partial\left(\frac{4}{3}f-\frac{1}{3}g\right)}{\partial f}\frac{\partial\left(-\frac{1}{3}f+\frac{1}{3}g\right)}{\partial g}\,T_{yx} + \frac{\partial\left(\frac{4}{3}f-\frac{1}{3}g\right)}{\partial f}\frac{\partial\left(\frac{4}{3}f-\frac{1}{3}g\right)}{\partial g}\,T_{yy}$$

Como sabemos que:

$$T_{xx} = 0 \;\; // \;\; T_{xy} = 5 \;\; // \;\; T_{yx} = 0 \;\; // \;\; T_{yy} = 2$$

Nos queda:

$$T_{fg} = \frac{\partial\left(-\frac{1}{3}f+\frac{1}{3}g\right)}{\partial f}\frac{\partial\left(\frac{4}{3}f-\frac{1}{3}g\right)}{\partial g}\cdot 5 + \frac{\partial\left(\frac{4}{3}f-\frac{1}{3}g\right)}{\partial f}\frac{\partial\left(\frac{4}{3}f-\frac{1}{3}g\right)}{\partial g}\cdot 2$$

$$T_{fg} = \left(\frac{-1}{3}\right) \cdot \left(\frac{-1}{3}\right) \cdot 5 + \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right) \cdot 2 = \frac{5}{9} - \frac{8}{9} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{3}}$$

Que es el valor que esperábamos.

$$T_{gf} = \frac{\partial x}{\partial g}\frac{\partial x}{\partial f}\, T_{xx} + \frac{\partial x}{\partial g}\frac{\partial y}{\partial f}\, T_{xy} + \frac{\partial y}{\partial g}\frac{\partial x}{\partial f}\, T_{yx} + \frac{\partial y}{\partial g}\frac{\partial y}{\partial f}\, T_{yy}$$

$$T_{gf} = \frac{\partial\left(-\frac{1}{3}f + \frac{1}{3}g\right)}{\partial g}\frac{\partial\left(\frac{4}{3}f - \frac{1}{3}g\right)}{\partial f} \cdot 5 + \frac{\partial\left(\frac{4}{3}f - \frac{1}{3}g\right)}{\partial g}\frac{\partial\left(\frac{4}{3}f - \frac{1}{3}g\right)}{\partial f} \cdot 2$$

$$T_{fg} = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}\right) \cdot 5 + \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right) \cdot 2 = \frac{20}{9} - \frac{8}{9} = \frac{12}{9} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

Que también es lo esperado.

Y finalmente:

$$T_{gg} = \frac{\partial x}{\partial g}\frac{\partial x}{\partial g}\, T_{xx} + \frac{\partial x}{\partial g}\frac{\partial y}{\partial g}\, T_{xy} + \frac{\partial y}{\partial g}\frac{\partial x}{\partial g}\, T_{yx} + \frac{\partial y}{\partial g}\frac{\partial y}{\partial g}\, T_{yy}$$

$$T_{gg} = \frac{\partial\left(-\frac{1}{3}f + \frac{1}{3}g\right)}{\partial g}\frac{\partial\left(\frac{4}{3}f - \frac{1}{3}g\right)}{\partial g} \cdot 5 + \frac{\partial\left(\frac{4}{3}f - \frac{1}{3}g\right)}{\partial g}\frac{\partial\left(\frac{4}{3}f - \frac{1}{3}g\right)}{\partial g} \cdot 2$$

$$T_{fg} = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{-1}{3}\right) \cdot 5 + \left(\frac{-1}{3}\right) \cdot \left(\frac{-1}{3}\right) \cdot 2 = -\frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{-3}{9} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{3}}$$

En definitiva, un Tensor (al menos de Orden 2) es un *objeto* que tiene la forma:

$$\overline{T} = T_{ij}\ \ e^i \otimes e^j$$

Es decir, que es una combinación lineal de elementos del tipo $e^i \otimes e^j$ y que, además, ante un cambio de coordenadas se transforma siguiendo la norma que hemos recogido:

$$T_{fg} = \frac{\partial x^x}{\partial x^f}\frac{\partial x^y}{\partial x^g}\, T_{xy}$$

Por lo que es un objeto independiente del Sistema de Coordenadas desde el que se observe.

Adendas al capítulo 2.2. Acerca de los tensores.

$\mathfrak{S}$

Adenda 1. Convenio de Sumación de Einstein.

Veamos cómo funciona el criterio de Sumación de Einstein:

$$\sum_{i=1}^{n} c^i e_i = c^1 e_1 + c^2 e_2 + \cdots + c^n e_n$$

Así, si se tiene el mismo índice, en nuestro caso i, en los dos elementos, por ejemplo, una coordenada y un vector base, podríamos expresarlo sin tener que añadir la Sigma del sumatorio, es decir:

$$c^i e_i$$

Esto es perfectamente válido para situaciones como las siguientes, dando igual si son superíndices o subíndices:

$$a_i b_i \, , a^i b^i , a^i b_i \, , \ldots$$

En el caso de estar ante una expresión como la siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(c^i e_i\right)^2$$

A priori diríamos que sería:

$$c^i c^i e_i e_i + \cdots + c^n c^n e_n e_n$$

Pero se ha convenido que no se use más de dos veces el mismo índice. Es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(c^i e_i\right)^2 \rightarrow c^i c^j e_i e_j$$

Un buen truco para estas cosas es imaginar todas las letras 1, y después, todas las letras, por ejemplo, 5, lo que sea…depende del número de letras que haya. E imaginar así, los elementos de la diagonal de la matriz. El resto de elementos ya se pondrían por combinación.

Veamos algunos ejemplos de aplicación de este convenio de Einstein.

Ejemplo 1.

Supongamos la siguiente expresión:

- Un vector A^i con la forma: $A^i = a_{ij}A^j$

Esto, ciertamente, es un sumatorio, pues vemos que los factores a y A comparten algún índice, está repetido. También observamos que en la expresión hay un índice que no se repite: 'i'; a este índice se le llama 'índice libre' y es, por decirlo de alguna manera, una especie de variable independiente… un índice 'sujeto', que marca el ritmo de saltos entre las diferentes iteraciones del sumatorio. Veámoslo desarrollado. Si suponemos que el recorrido de tanto de i, como de j, es 1,2,3, tendríamos tres expresiones:

$$i = 1 \rightarrow A^i = a_{11}A^1 + a_{12}A^2 + a_{13}A^3$$

$$i = 2 \rightarrow A^i = a_{21}A^1 + a_{22}A^2 + a_{23}A^3$$

$$i = 3 \rightarrow A^i = a_{31}A^1 + a_{32}A^2 + a_{33}A^3$$

Ejemplo 2.

Supongamos un gradiente definido como:

$$\nabla G = \frac{\nabla G}{\partial x^i} e_i$$

Desplegado sería:

$$\nabla G = \frac{\nabla G}{\partial x^1} e_1 + \frac{\nabla G}{\partial x^2} e_2 + \frac{\nabla G}{\partial x^3} e_3 + \cdots$$

Ejemplo 3.

Supongamos una expresión definida como:

$$dF = \frac{dF}{\partial x^i} dx^i$$

Desplegado sería:

$$dF = \frac{dF}{\partial x^1} dx^1 + \frac{dF}{\partial x^2} dx^2 + \frac{dF}{\partial x^3} dx^3 + \cdots$$

Ejemplo 4.

Supongamos una expresión definida como:

$$\frac{d\bar{x}^i}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt}$$

Vemos que el índice independiente es 'i', luego tendremos tantas expresiones como diga 'i' y, por otro lado, cada expresión tendrá tantos términos como diga 'j'. Por ejemplo, para $i = 2$ y $j = 3$:

$$i = 1 \rightarrow \frac{d\bar{x}^1}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1}\frac{dx^1}{dt} + \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2}\frac{dx^2}{dt} + \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3}\frac{dx^3}{dt}$$

$$i = 2 \rightarrow \frac{d\bar{x}^2}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1}\frac{dx^1}{dt} + \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2}\frac{dx^2}{dt} + \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3}\frac{dx^3}{dt}$$

Ahora tratemos de ver esta notación funcionando aplicada a tensores.

Adenda 2. Tensores.

Ya, en mayor o menor medida, sabemos que un Tensor es un ente abstracto cuyas propiedades son independientes del Sistema de Referencia desde el que se mide.

Recordemos que un Tensor tiene la forma:

$$M = N^m$$

Donde:

- M: es el número de Componentes del Tensor.
- N: es el número de Dimensiones del espacio (las dimensiones de los espacios que se han conjugado para la génesis del Tensor).
- m: Orden del Tensor.

Así, por ejemplo:

Siendo N=2, tendríamos:

- $2^{nada} = 1$ Componente. Escalar. Ejemplos.
- $2^i = 2$ Componentes. Vector bidimensional. Ejemplos.
- $2^{ij} = 4$ Componentes. Tensor de segundo orden, bidimensional en el sentido de formado desde el producto tensorial de dos espacios vectoriales). Ejemplos.
- $2^{ijk} = 8$ Componentes. Tensor de Tercer Orden…. Ejemplos.

Siendo N=3, tendríamos:

- $3^0 = 1$ Componente. Escalar. Ejemplos.
- $3^i = 3$ Componentes. Vector tridimensional. Ejemplos.
- $3^{ij} = 9$ Componentes. Tensor de segundo orden, tridimensional en el sentido de formado desde el producto tensorial de tres espacios vectoriales). Ejemplos.
- $3^{ijk} = 27$ Componentes. Tensor de Tercer Orden…. Ejemplos.

Siendo N=4, tendríamos (muy importante en R.G.):

- $4^0 = 1$ Componente. Escalar. Ejemplos.
- $4^i = 4$ Componentes. Cuadrivector. Ejemplos.

- $4^{ij} = 16$ Componentes. Tensor de segundo orden, cuatridimensional en el sentido de formado desde el producto tensorial de cuatro espacios vectoriales). Ejemplos.
- $4^{ijk} = 64$ Componentes. Tensor de Tercer Orden…. Ejemplos.

Así, por ejemplo, un Tensor del tipo:

- A^i_j, A_{ij},… tendría una forma desarrollada como, por ejemplo:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

Donde $i = 2$ *y* $j = 3$

Nótese que es bidimensional $i \cdot j$.

Para ser tridimensional haría falta en vez de una matriz $i \cdot j \cdot k$, un cubo.

- A_{ijk}, $A_i{}^j{}_k$,… tendría una forma desarrollada como, por ejemplo:

$$A_{ijk} = \begin{pmatrix} A_{ijk} & A_{ijk} & A_{ijk} \\ A_{ijk} & A_{ijk} & A_{ijk} \\ A_{ijk} & A_{ijk} & A_{ijk} \end{pmatrix}$$

Donde $i = 3$ *y* $j = 3$

- Para casos de más dimensiones, declinamos el intento de una representación intuitiva-visual. Ahí nos manejaremos exclusivamente mediante desarrollos algebraicos.

Siendo esto así, podremos definir las siguientes variaciones de un Tensor:

- $\overline{T}_{ij} = T_{ji}$. Tensor Transpuesto (lo que antes era columna, ahora es fila y viceversa).
- $T^{-1}T = I$. Tensor Inverso.
- $T_{ij} = T_{ji}$. Tensor Simétrico.

Los elementos de la diagonal principal pueden adoptar cualquier calor, pero los restantes deben ser simétricos respecto a dicha diagonal. Por ejemplo:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- $T_{ij} = -T_{ji}$. Tensor Antisimétrico o Hemisimétrico.

Los elementos deben cumplir la condición de la antisimetría, es decir: la diagonal debe estar compuesta de elementos nulos y a cada lado de la diagonal deben haber elementos opuestos:

Y debe darse algo así como:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ -5 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ya debemos tener claro que un tensor $M = N^m$ de rango m en el espacio N-dimensional es un objeto de N^m componentes que se combinan con múltiples vectores base para formar una cantidad invariante e independiente del Sistema de Coordenadas desde el que se mida el observador.

- Un tensor de orden 0 es un escalar[72].
  Es decir, requiere solo un número real en cualquier sistema de coordenadas para ser descrito.

- Un tensor de orden 1 es un vector. En general, un vector requiere n componentes para ser descrito. En un espacio tridimensional, un vector se define mediante tres componentes. La transformación de coordenadas de un vector de un espacio a otro se realiza mediante una transformación lineal. De esta manera, un vector es un tensor de orden uno porque requiere n números para definirlo.
  Por ejemplo:
  $$\overline{T} = T_n e^n \rightarrow T_1 e^1 + T_2 e^2 + T_3 e^3 + \cdots + T_n e^n$$

- Un tensor de orden 2 es una matriz o una forma cuadrática. Siguiendo la misma lógica, el siguiente elemento es el que requiere $n \cdot n = n^2$, componentes para ser descrito.
  Por ejemplo:
  $$\overline{T} = T_{ij} e^i \otimes e^j = T_{11} e^1 \otimes e^1 + T_{12} e^1 \otimes e^2 + \cdots$$

- Un tensor de orden 3 tendría la forma de:
  $$\overline{T} = T_{ijk} e^i \otimes e^j \otimes e^k$$

  Es decir, entidades que pertenezcan a:
  $$\overline{T} \in T_p M \otimes T_p M \otimes T_p M$$

  O dicho de otro modo, una función que necesita de tres vectores:
  $$\overline{T}_{(\vec{A},\vec{B},\vec{C})}$$
  Y devuelven un escalar.
  Es más, si hiciéramos el producto escalar entre algo como lo siguiente:
  $$\left(e^i \otimes e^j \otimes e^k\right) \cdot (e^m \otimes e^n \otimes e^p) = g^{im} g^{jn} g^{kp}$$

[72] Piénsese en una función que no necesita 'alimentarse' de ningún vector.

Veamos la tipología posible de los tensores:

$T^{ij} \rightarrow e^i \otimes e^j \rightarrow$ Tensor de TIPO (2,0)

$T_{ij} \rightarrow e_i \otimes e_j \rightarrow$ Tensor de TIPO (0,2)

$T^i{}_j \rightarrow e^i \otimes e_j \rightarrow$ Tensor de TIPO (1,1)

$T^i{}_{jk} \rightarrow e^i \otimes e_j \otimes e_k \rightarrow$ Tensor de TIPO (1,2)

$T^{ij}{}_k \rightarrow e^i \otimes e^j \otimes e_k \rightarrow$ Tensor de TIPO (2,1)

Obsérvese que los subíndices están bastante alejados de la letra principal como dejando hueco para que los índices puedan bajar (o subir) a ocupar su lugar. Esto de hecho es así. Como sabemos, podemos subir y bajar índices también en los tensores. Recordemos cómo subíamos y bajábamos índices (natural/dual) en las coordenadas:

Según el criterio de sumación de Einstein: $C^i = \delta^{ij} \cdot C_j$

Según el criterio de sumación de Einstein: $C_i = \delta_{ij} \cdot C^j$

Es decir, que un tensor del tipo $T^i{}_{jk}$, podemos convertirlo en uno del tipo T_{pjk} así:

$$T_{pjk} \equiv \delta_{pi} T^i{}_{jk}$$

Que para un espacio vectorial T_pM de tres dimensiones $\{e_1, e_2, e_3\}$ sería:

$$T_{pjk} \equiv \delta_{pi} T^i{}_{jk} \equiv \delta_{p1} T^1{}_{jk} + \delta_{p2} T^2{}_{jk} + \delta_{p3} T^3{}_{jk}$$

Esto es un poco lioso, lo veremos más claro en los ejemplos.

Así, para cerrar esta adenda, recordemos que:

- Un Tensor de orden 0 es un escalar.
- Un Tensor contravariante de orden 1 (es un vector) se transforma según la forma:

$$T^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} T^j$$

$$T^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^1} T^1 + \frac{\partial T^i}{\partial x^2} T^2 + \frac{\partial T^i}{\partial x^3} T^3 + \cdots + \frac{\partial x^i}{\partial x^n} T^n$$

(OBSERVACIÓN. Para tensores de componentes covariantes, los numeradores y denominadores se cambian de rol)

- Un Tensor contravariante de orden 2 se transforma según la forma:

$$T^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^j}{\partial x^q}T^{pq}$$

(OBSERVACIÓN. Para tensores de componentes covariantes, los numeradores y denominadores se cambian de rol)

- Un Tensor Mixto de Orden 2 se transforma según la forma:

$$T^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial x^j}T^p_q$$

- Tensores de Orden Superior. Por ejemplo, un Tensor como:

$$T^{pqr}_{st}$$

  Es un tensor mixto de orden 5, contravariante de rango 3 y covariante de rango 2 si ante cambio de coordenadas se transforma de la siguiente manera:

$$T^{pqr}_{st} = \frac{\partial x^p}{\partial x^i}\frac{\partial x^q}{\partial x^j}\frac{\partial x^r}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial x^s}\frac{\partial x^m}{\partial x^t}T^{ijk}_{lm}$$

Adenda 3. El Tensor de Krönecker

Hagamos ahora algunas definiciones importantes. En primer lugar recordemos que definíamos un tensor como:

$$M = N^m$$

Para no complicar mucho el asunto vamos a revisar el Tensor de Krönecker como un Tensor de segundo orden, es decir, que tiene dos índices $m = 2 \rightarrow i, j$. Si Las dimensiones del espacio fueran 3, el Tensor de Krönecker tendría la forma:

$$\delta = N^m = 3^2 = 9 \text{ componentes para el Tensor} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Observamos que tenemos una i contravariante y una j covariante. Sin embargo, es perfectamente viable definir el Tensor de manera alternativa como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{ó} \quad \delta^{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Algunas de las propiedades del Tensor de Krönecker son:

- ***A. Ejerce como operador de substitución:***

$$A_j \delta_{ji} = A_i$$

Puesto que los únicos términos que 'sobreviven' son:

$$i = 1 \rightarrow A_1\delta_{11} + A_2\delta_{21} + A_3\delta_{31} = A_1$$

$$i = 2 \rightarrow A_1\delta_{12} + A_2\delta_{22} + A_3\delta_{32} = A_2$$

$$i = 3 \rightarrow A_1\delta_{13} + A_2\delta_{23} + A_3\delta_{33} = A_3$$

Es decir, que podemos usarlo perfectamente para sustituir un índice por otro.

Veámoslo también en este ejemplo (vamos a considerar N=2, porque si no esto se alarga un infinito… marcamos en azul los que 'sobreviven'):

$$\delta_{ij} \cdot \delta_{jk} = \delta_{ik}$$

Desarrollemos el ***sumatorio***. Recordemos que al haber índices repetidos en los factores, estamos ante un sumatorio, a ver qué obtenemos. En primer lugar consideremos que puesto que sólo δ_{11} y δ_{22} son iguales a 1 (el resto es 0), sólo 'sobreviven' los elementos que estén multiplicados por deltas con índices iguales. Una vez depurado esto, aplicamos la propiedad (A), es decir:

(OBSERVACIÓN. Marcamos con colores el origen de los índices: i, j, k y tachamos aquello que se anula por ser un producto por cero)

(OBSERVACIÓN 2. Nótese que en este ejemplo tenemos dos índices libres, que no se repiten en los factores que conforman cada sumando: i, k)

$$i = 1, k = 1 \rightarrow \delta_{11}\delta_{11} + \cancel{\delta_{12}\delta_{21}} = \delta_{11}\delta_{11}$$

Que, por la misma propiedad (A), es lo mismo que:

$$i = 1, k = 1 \rightarrow \delta_{11}\delta_{11} = \delta_{11}$$

Hacemos lo mismo con el resto de posibilidades:

$$i = 2, k = 1 \rightarrow \cancel{\delta_{21}\delta_{11}} + \cancel{\delta_{22}\delta_{21}}$$

En este caso 'mueren' ambos sumandos. No extraemos información alguna.

$$i = 1, k = 2 \rightarrow \cancel{\delta_{11}\delta_{12}} + \cancel{\delta_{12}\delta_{22}}$$

También 'mueren' ambos sumandos. No extraemos información alguna.

$$i = 2, k = 2 \rightarrow \cancel{\delta_{21}\delta_{12}} + \delta_{22}\delta_{22} = \delta_{22}\delta_{22}$$

Que, de nuevo, por la propiedad (A):

$$i = 2, k = 2 \rightarrow \delta_{22}\delta_{22} = \delta_{22}$$

Es decir, que podemos concluir que:

$$\delta_{ij} \cdot \delta_{jk} = \delta_{ik}$$

- ***B.*** $\boldsymbol{\delta_{ii} = N}$***:***

Esto es obvio por sí mismo pues:

$$i = 1,2,3, \dots, N$$

Y, recordemos, estamos ante un sumatorio, de manera que:

$$i = 1 \rightarrow \delta_{11} = 1$$

$$i = 1,2 \rightarrow \delta_{11} + \delta_{22} = 1 + 1 = 2$$

$$i = 1,2,3 \rightarrow \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3$$

…

- ***C.*** $\boldsymbol{\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_{ij}}$ *y* $\boldsymbol{\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^j} = \delta_{ij}}$***:***

  Esto también se ve con bastante facilidad pues como sabemos que:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

  Así que[2]:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = 1 \text{ } \textit{cuando, efectivamente,} \text{ } x^i = x^j\textit{, es decir, que} \text{ } i = j$$

  Por otro lado, también resulta obvio que:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = 0 \text{ } \textit{cuando, efectivamente,} \text{ } x^i \neq x^j \text{ } \textit{(son variables diferentes, ex: x e y), es decir, que} \text{ } i \neq j$$

  Que es exactamente la definición del Delta de Krönecker:

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Veamos varios ejemplos de aplicación de estas propiedades.

Ejemplo 1.

Supongamos una expresión genérica como la siguiente:

[2] Es una función con una determinada variable independiente derivada por dicha variable independiente. Recuérdese que los superíndices ***no son 'elevado a'*** sino dimensiones diferentes, es decir:

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1 \text{ ; } \frac{\partial y}{\partial y} = 1; \frac{\partial z}{\partial z} = 1; \dots$$

En cambio:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = 0 \text{ ; } \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \text{ ; } \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(a_{ij}x_j)$$

En este caso supongamos que a_{ij} es constante y x_j es una variable. Así, podríamos desarrollar nuestra expresión como:

$$a_{ij}\frac{\partial x_j}{\partial x_k}$$

Sabemos que, por la propiedad (C):

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \delta_{jk}$$

Es decir, que será 1 si $j = k$ ó 0 si $j \neq k$

Luego podemos reescribir como:

$$a_{ij}\frac{\partial x_j}{\partial x_k} \rightarrow a_{ij}\delta_{jk}$$

Que, por la propiedad (A), sabemos que:

$$a_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}$$

Ejemplo 2.

Supongamos una expresión genérica como la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(a_{pq}x_p x_q)$$

Supongamos, de nuevo que a_{pq} es una constante, luego:

$$a_{pq}\frac{\partial(x_p x_q)}{\partial x_k}$$

Pensemos sobre esto: cabe la posibilidad de que x_k sea la misma variable que x_p o que sea la misma que x_q, o que todas sean iguales o que ninguna sean iguales. Sea como sea, el único modo en que podemos representar estas posibilidades sería:

$$a_{pq}\frac{\partial x_p}{\partial x_k}x_q + a_{pq}\frac{\partial x_q}{\partial x_k}x_p$$

Esto, por la propiedad (C), se nos queda como[3]:

$$a_{pq}\delta_{pk}x_q + a_{pq}\delta_{qk}x_p$$

Que por la propiedad (A), podemos reescribir como:

[3] $a_{pq}\delta_{pk}x_q$ en este caso, la propiedad (A) sigue plenamente vigente… no es necesario que el subíndice esté 'pegado', circundando el delta. Basta con que haya repetición.

$$a_{qk}x_q + a_{pk}x_p$$

Ojo a este paso. ***Como sabemos que cuando hay índices repetidos es que hay un sumatorio (imaginemos uno larguísimo), resulta que dichos índices, los repetidos, son absolutamente sustituibles, da igual el que pongamos, es lo mismo***, por lo que podríamos decir que (tomo la 'q' porque sencillamente me da más coraje, yo qué sé, qué más da…, lo importante es que compartan índice libre, en este caso la 'k'):

$$a_{qk}x_q + a_{qk}x_q = 2a_{qk}x_q$$

Es decir que:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{pq}x_p x_q\right) = 2a_{qk}x_q$$

De momento no vamos a tratar de visualizar esto pues, en realidad, lo que encierran estas propiedades no es para nada difícil. Sencillamente recordemos que los tensores de orden >3 hay que imaginarlos como matrices tridimensionales: matrices que tienen múltiples capas 'hacia dentro del papel'. Claro, en esos casos las combinaciones posibles se disparan… es caótico en sentido de orden, pero el fundamento es absolutamente simple.

Adenda 4. Tensor de Levi-Civita o Tensor ϵ de Permutación.

El Tensor de Permutación ε se define como:

$$\epsilon^{i,j,k,\ldots,z} = \varepsilon_{i,j,k,\ldots,z} = \begin{cases} 1\ si\ i,j,k,\ldots,z\ es\ una\ permutación\ par\ de\ 1,2,3 \\ -1\ si\ i,j,k,\ldots,z\ es\ una\ permutación\ impar\ de\ 1,2,3 \\ 0\ para\ el\ resto\ de\ casos \end{cases}$$

Esto es mucho más fácil verlo que explicarlo.

Supongamos un Tensor de orden 3 (con tres índices) y que todos son diferentes, y están expresado algo así como:

$$\epsilon^{123} \text{ ó } \epsilon^{231} \text{ ó } \epsilon^{321}$$

¿Cómo, cuántas veces, han permutado los índices para llegar de una forma ordenada primaria: 123, a cualquier otra?

Veamos:

Para llegar de ϵ^{123} a ϵ^{231}, ¿qué permutaciones se han hecho?

- 2 permutaciones: cambiar el 1 por el 3 y, después, el 3 por el 2. Es decir: un número par de permutaciones, por lo que al valor del Tensor Alternante será: 1.

En cambio para llegar de ϵ^{123} a ϵ^{321}, ¿cuántas permutaciones de índices se han hecho?

- 1 sola permutación: el 3 por el 1. Impar, es decir, que el valor del Tensor Alternante será: -1.

Hay un modo aún más simple de verlo. Si nos fijamos en los índices podremos ver que leyéndolos en bucle (una vez lleguemos al último retornamos al primero, como cuando decimos muchas veces una palabra hasta que suena rara), de izquierda a derecha veremos un patrón de crecimiento, en cuyo caso el valor del Tensor de Permutación será 1:

231231231231231…

…o de decrecimiento, en cuyo caso el valor del Tensor de Permutación será -1:

321321321321321…

Cuando no se dé ninguno de estos casos porque, por ejemplo, haya repeticiones, el valor del tensor será cero.

(OBSERVACIÓN. El Tensor de Permutación puede aparecer representado con la letra griega épsilon (ε) o con la letra latina (e) por lo que habrá que tener especial cuidado con no confundirlo con un vector de una base vectorial. En nuestro caso, para evitar confusiones, utilizaremos épsilon)

Veamos algunos ejemplos:

$$\epsilon^{123} = \epsilon^{312} = \epsilon^{231} = 1$$

$$\epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1$$

También es importante considerar que esto funciona exactamente igual con combinaciones contravariantes/covariantes como, por ejemplo:

$$\epsilon^{123} = \epsilon_{123} = 1 \;\; // \;\; \epsilon_{132} = \epsilon^{132} = -1 \;\; // \;\; \epsilon^{122} = \epsilon_{122} = 0$$

Veamos algunos ejemplos de la utilidad de este Tensor.

Ejemplo 1.

Expresar el producto vectorial de los vectores $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ mediante ϵ.

Recordemos que sabemos que la multiplicación de vectores coplanares en un sistema cartesiano se resuelve como:

$$\begin{array}{lll} \hat{\imath} \times \hat{\imath} = 0 & \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = 0 & \hat{k} \times \hat{k} = 0 \\ \hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} & \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath} & \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \\ \hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k} & \hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath} & \hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath} \end{array}$$

Esto, expresado en función del Tensor de Permutación ε, es:

$$\vec{e}_j \times \vec{e}_k = \epsilon_{ijk}\vec{e}_i$$

(OBSERVACIÓN. Hemos marcado en rojo p y q para resaltar que son índices libres, pues no se repiten en ambos factores ϵ y $\vec{e}$. Variarán a su voluntad mientras el índice i 'esperará pacientemente' a que recorran todas las posibilidades y, ojo, sólo sobrevivirán algunos)

¿Qué quiere decir esto? A nada que pensemos un poco sobre esto se hace evidente. Estamos ante algo así como tres dimensiones que, según se combinen, dan un resultado, positivo, negativo (o nulo) en alguna dirección. Efectivamente, si hay un orden determinado,

tendremos un vector apuntando a una dirección. Si el orden es inverso, el sentido será el contrario (el producto vectorial no conmuta). Si se repite algún término, el resultado es nulo.

Identifiquemos los diferentes valores posibles de r con las tres direcciones posibles de un espacio tridimensional (ojo que las posibilidades son 27, pues $N^m \rightarrow N = 3, m = 3$). Veamos algunas combinaciones posibles. Empecemos por algunas evitando repeticiones de índices:

(OBSERVACIÓN. ¡Importante recordar que esto son sumatorios que habría que desarrollar!)

- Para $i = 1$ tendríamos que i 'hace' de $\hat{\imath}$. El tensor quedaría como:

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \epsilon_{123}\vec{e}_1 = \vec{e}_i$$

(vemos que de izda. a dcha. el bucle de índices son crecientes, luego ϵ es +1)

$$\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$$

- Para $i = 2$ tendríamos que i 'hace' de $\hat{\jmath}$. El tensor quedaría como:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = \epsilon_{213}\vec{e}_2 = -\vec{e}_j$$

(vemos que de izda. a dcha. el bucle de índices son decrecientes, luego ϵ es -1)

$$\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$$

- Para $i = 3$ tendríamos que i 'hace' de $\hat{k}$. El tensor quedaría como:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \epsilon_{312}\vec{e}_3 = \vec{e}_k$$

(vemos que de izda. a dcha. el bucle de índices son crecientes, luego ϵ es 1)

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$$

Veamos más combinaciones, ahora, con posibles repeticiones:

- Para $i = 3$ tendríamos que i 'hace' de $\vec{e}_3$, es decir, de $\hat{k}$. Pero ya podemos incluir repeticiones, así que:

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \epsilon_{322}\vec{e}_3 = 0$$

(vemos que existen repeticiones de índices, luego ϵ es 0)

$$\hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = 0$$

- Sin embargo…para $i = 3$ tendríamos que i 'hace' de $\vec{e}_3$, es decir, de $\hat{k}$. Pero ya podemos incluir repeticiones, así que:

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = \epsilon_{332}\vec{e}_3 = 0$$

(vemos que existen repeticiones de índices, luego ϵ es 0)

$\hat{k} \times \hat{\jmath} = 0$… ¿Ehn? ¿Qué pasa aquí?

Sencillamente, que esta combinación, en sí misma, es absurda de entrada, por eso debe ser cero. *Queda anulada en las fases preliminares.* Si las otras combinaciones, en que j y k coinciden, se anulan procedimentalmente, éstas se anulan axiomáticamente pues, de hecho, es imposible que un vector en $\hat{k}$, multiplicado vectorialmente por otro vector, siga apuntando en $\hat{k}$. Es

absurdo en sí mismo, de entrada, como axioma. Lo que pasa aquí es que los índices j y k oscilan entre valores que no pueden ser iguales al que ya ocupe i porque al desarrollar el sumatorio, dichas combinaciones posibles se han anulado previamente. Veámoslo en el siguiente ejemplo: $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$

Antes recordemos qué hacíamos tradicionalmente para calcularlo:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}$$

Esto es:

$$(A_y B_z - A_z B_y)\hat{e}_x$$

$$-(A_x B_z - A_z B_x)\hat{e}_y \rightarrow (A_z B_x - A_x B_z)\hat{e}_y$$

$$(A_x B_y - A_y B_x)\hat{e}_z$$

Pero todo esto nos lo podemos *ahorrar* con el Símbolo de Levi-Civita.

Recordemos que:

$$\epsilon^{i,j,k,\dots,z} = \varepsilon_{i,j,k,\dots,z} = \begin{cases} 1 \; si \; i,j,k,\dots,z \; es \; una \; permutación \; par \; de \; 1,2,3 \\ -1 \; si \; i,j,k,\dots,z \; es \; una \; permutación \; impar \; de \; 1,2,3 \\ 0 \; para \; el \; resto \; de \; casos \end{cases}$$

Donde:

$$i = 1 \rightarrow \hat{e}_x$$

$$i = 2 \rightarrow \hat{e}_y$$

$$i = 3 \rightarrow \hat{e}_z$$

Ahora vamos a definir las componentes en términos del símbolo de Levi-Civita.

- Componentes en $i = 1$, es decir, eje x, del producto $\vec{A} \times \vec{B}$. Téngase en cuenta que el resultado de esto 'irá en la dirección' del eje x, $i = 1, \hat{\imath}$, …como queramos llamarlo. El tensor (mejor decir símbolo) de Levi-Civita, para esta componente en el eje x del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$, sería algo así como:

$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} A_j B_k$$

Si llamamos a las dimensiones como 1,2,3 en el sentido de x, y, z, lo que estaríamos calculando sería lo siguiente:

$$(\vec{A} \times \vec{B})_1 = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{1jk} A_j B_k$$

Ahora debemos recorrer todas las posibilidades de cambio de j y k y ver qué resultados sobreviven para el caso en que $i = 1$.

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_1 = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{1jk} A_j B_k =$$

$$= \epsilon_{111}A_1B_1 + \epsilon_{112}A_1B_2 + \epsilon_{113}A_1B_3 + \epsilon_{121}A_2B_1 + \epsilon_{122}A_2B_2 + \epsilon_{123}A_2B_3 + \epsilon_{131}A_3B_1 + \epsilon_{132}A_3B_2 + \epsilon_{133}A_3B_3$$

Marquemos en rojo lo que se anula:

$$= \epsilon_{111}A_1B_1 + \epsilon_{112}A_1B_2 + \epsilon_{113}A_1B_3 + \epsilon_{121}A_2B_1 + \epsilon_{122}A_2B_2 + \epsilon_{123}A_2B_3 + \epsilon_{131}A_3B_1 + \epsilon_{132}A_3B_2 + \epsilon_{133}A_3B_3$$

Es decir, que nos queda:

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_1 = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{1jk} A_j B_k = \epsilon_{123}A_2B_3 + \epsilon_{132}A_3B_2$$

Esto nos está diciendo, si seguimos evaluando el símbolo de Levi-Civita, que:

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_1 = \epsilon_{123}A_2B_3 + \epsilon_{132}A_3B_2$$

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_1 = (+1)A_2B_3 + (-1)A_3B_2 = A_2B_3 - A_3B_2$$

Que es perfectamente coherente con lo que teníamos en el método tradicional de cálculo del producto vectorial.

Simétricamente, para $i = 2$:

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_2 = \epsilon_{2jk} A_j B_k$$

Ya sabemos que las únicas combinaciones que sobrevivirán son aquellas en que j y k no coincidan con i, es decir:

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_2 = \epsilon_{2jk} A_j B_k = \epsilon_{231}A_3B_1 + \epsilon_{213}A_1B_3$$

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_2 = (+1)A_3B_1 + (-1)A_1B_3$$

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_2 = A_3B_1 - A_1B_3$$

Que es perfectamente compatible con los resultados obtenidos del modo tradicional.

Sabiendo esto, igualmente, podremos decir que para $i = 3$:

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_3 = A_1B_2 - A_2B_1$$

(OBSERVACIÓN. Los signos más y menos los sabemos directamente por el orden decreciente o creciente de los índices 'hacia la derecha')

Adenda 5. La contracción de Tensores.

Supongamos que tenemos un tensor del tipo:

$$\overline{T} = T_{ij}\, e^i \otimes e^j$$

Y un vector del tipo:

$$\vec{A} = A^j e_j$$

Y quisiéramos relacionar ambos elementos.

De entrada observamos que tenemos un problema pues, como sabemos, pertenecen a *mundos diferentes* ya que el tensor pertenece a un espacio vectorial que es el resultado del producto tensorial de dos espacios vectoriales y el vector es un elemento del espacio vectorial, digamos, simple y, por lo tanto, no podemos realizar un producto escalar entre ellos. Definamos provisionalmente una relación, una operación que se pueda realizar entre ambos elementos, con el signo ©[4].

Fijémonos, muy importante, que coinciden en un índice, es decir, atendiendo sólo a las componentes:

$$T_{ij}©A^j = T_{i1}©A^1 + T_{i2}©A^2 + T_{i3}©A^3 + \cdots + T_{ij}©A^j$$

¿Son relacionables de alguna manera estas dos entidades? Y sobre todo, ¿produce esta relación un nuevo tensor?

Veámoslo con un ejemplo de espacio vectorial simple de dos dimensiones T_pM y su correspondiente $T_pM \otimes T_pM$. El tensor sería:

$$\overline{T} = T_{11}\, e^1 \otimes e^1 + T_{12}\, e^1 \otimes e^2 + T_{21}\, e^2 \otimes e^1 + T_{22}\, e^2 \otimes e^2$$

Y el vector:

$$\vec{A} = A^1 e_1 + A^2 e_2$$

Observemos que el índice que comparten el vector y el tensor es la j, es decir, el segundo índice del tensor. Esto quiere decir que, de los elementos de la 'base tensorial', nos interesa fijarnos especialmente en la 'parte' que marcamos en rojo (parte entre comillas porque ya sabemos que el elemento de la 'base tensorial' es un todo único):

$$\overline{T} = T_{11}\, e^1 \otimes e^1 + T_{12}\, e^1 \otimes e^2 + T_{21}\, e^2 \otimes e^1 + T_{22}\, e^2 \otimes e^2$$

Es decir, sólo están los elementos: e^1 y e^2.

Digamos entonces que el nuevo Tensor (de Orden 1) sería:

$$B = B_1 e^1 + B_2 e^2$$

---

[4] Realmente no es necesario usar símbolo alguno pues, cuando estamos ante una expresión del siguiente tipo:

$$T_{ij}A^k B^m$$

Sabemos que es el producto escalar entre dos elementos del mismo 'mundo', pero, cuando nos encontramos con esto:

$$T_{ij}A^j \quad // \quad T_{ij}A^i$$

Tenemos toda la información necesaria para saber que se trata de una Contracción del Tensor.

Y puesto que decimos que (recordemos que el vector pertenece a un espacio vectorial de dos dimensiones):

$$T_{ij}A^j = T_{i1}A^1 + T_{i2}A^2$$

Digamos que hemos forzado a que la 'Función Tensor' se conforme con comerse un solo vector. Así, resultaría que la relación $T_{ij}A^j$ arrojaría un resultado del tipo:

$$B = B_1e^1 + B_2e^2 = (T_{11}A^1 + T_{12}A^2)e^1 + (T_{21}A^1 + T_{22}A^2)e^2$$

Que efectivamente es un Tensor contraído. Un tensor que se ha reducido en un orden y que, por lo tanto, ahora es de orden 1, es decir, efectivamente: un vector bidimensional cualquiera (bidimensional porque el vector que lo ha obligado a contraerse pertenece a un espacio vectorial de dos dimensiones).

-2.3-

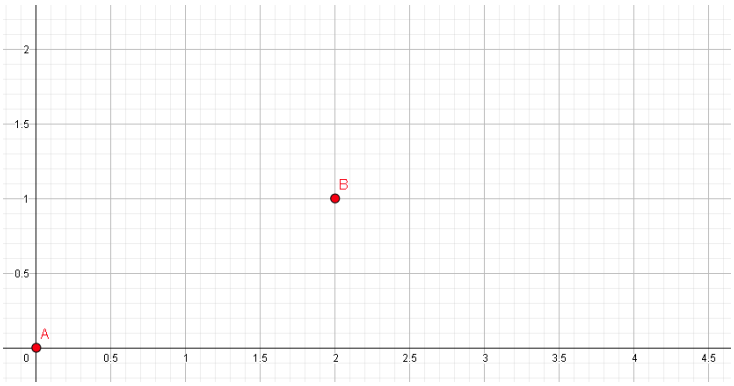
Geodesias

Todos sabemos que la distancia más corta entre dos puntos en un plano es la línea recta. Sin embargo, si curvamos esa superficie bidimensional en la que situamos los dos puntos entre los que vamos a realizar medida… ¿Cuál es la distancia más corta? Efectivamente, para un habitante que habite esa 'Planilandia' seguirá siendo una línea recta pero para nosotros, observadores privilegiados que observamos, alejados, desde fuera, cómo se ha curvado el espacio, veremos con claridad que lo que el 'planilandero' cree que es una recta es, realmente, una curva. La curva, inserta en la superficie curvada, que marca la distancia más corta entre dos puntos.

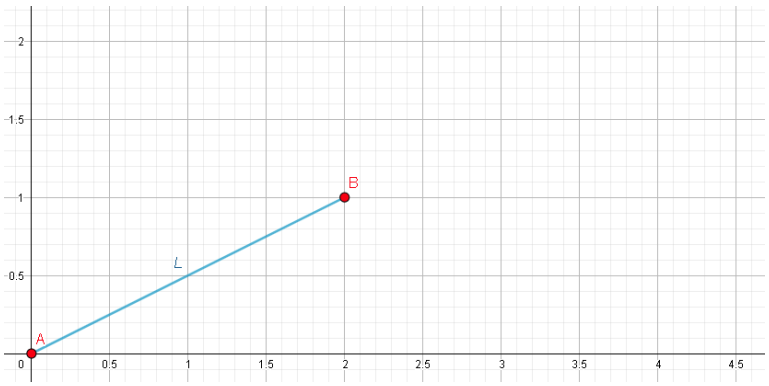
¿Cómo podemos calcular la longitud de esa curva? Ya hemos visto algo acerca de cómo parametrizar, medir y optimizar longitudes de segmentos curvos en las páginas 116,117, 118 y siguientes, cuando hablábamos, en el libro primero, acerca de la Relatividad Especial y las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Retomemos ahora aquellos razonamientos. Para ello recalquemos el procedimiento que vamos a realizar: a) vamos a parametrizar y medir un segmento (previsiblemente una curva) y después, b) vamos a optimizarlo mediante la Fórmula de Euler-Lagrange.

Para empezar, supongamos que tenemos un espacio euclídeo, plano, R^2, en el que ubicamos 2 puntos: $A(0,0), B(2,1)$.



Por supuesto, siendo dicho espacio perfectamente plano, la distancia más corta entre dichos puntos sería la recta *L:*



Que tendría la forma de:

$$y = ax + b$$

Puesto que esta recta debe pasar por estos dos puntos debe cumplir que:

- $A(0,0)$

$$y = ax + b$$
$$0 = a0 + b \rightarrow b = 0$$

- $B(2,1)$

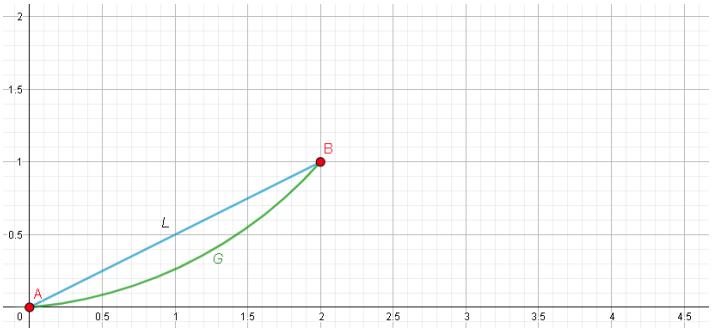
$$y = ax + b$$
$$1 = a2 + 0 \rightarrow = \frac{1}{2}$$

Es decir, que la recta *L* es:

$$y = \frac{1}{2}x$$

Ahora, pensemos en curva *G* cualquiera pasa también por los puntos *A* y *B:*

(OBSERVACIÓN. Cuando optimicemos la curva para convertirla en el 'camino más corto' entre los dos puntos, por supuesto, en este espacio, con su métrica, nos debe dar una recta, es decir, la recta que ya tenemos)



Cuya forma debe ser:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Puesto que esta recta debe pasar por estos dos puntos también debe cumplir que:

- $A(0,0)$

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$0 = a0^2 + b0 + c \rightarrow c = 0$$

- $B(2,1)$

$$1 = a2^2 + b2 + c$$
$$1 = a4 + b2 + 0$$

Como lo único que nos interesa es que la curva pase por los dos puntos que hemos descrito, nos basta con cualquier solución que satisfaga esta condición. Optemos, casi al azar, por que:

$$b = 0$$

Luego,

$$a = \frac{1}{4}$$

De manera que nuestra curva genérica cualquiera puede ser, perfectamente:

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

(OBSERVACIÓN. Podemos verificar con perfecta simplicidad que dicha expresión satisface la condición de pasar por los dos puntos que hemos establecido)

Ahora, para medir la longitud de esa curva (tal y como hicimos en el libro anterior y exponemos como primera fase, punto (a), de nuestro procedimiento) debemos parametrizar la curva mediante, por ejemplo, un parámetro λ. Recordemos el modo en que calculábamos la longitud de una curva parametrizada[5]:

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} d\lambda \qquad [6]$$

Así que, tal y como hicimos en su momento, parametricemos la curva en función de λ mediante una expresión arbitraria cualquiera, que nos sea cómoda, y ahora abordemos las dos expresiones que tenemos: la de la recta y la de la curva. ¿Por qué manejar las dos expresiones? Porque queremos comparar cada paso para ambos segmentos y comprobar que estamos siguiendo el procedimiento apropiado. Así:

- La recta:

Supongamos una parametrización $x = 2\lambda + 1$, luego y, en la recta, será:

[5] Véanse pp. 116,117,188 y ss.

[6] Recordemos que allí, en el libro primero, aún apenas usábamos el convenio de sumación de Einstein sino que expresábamos el sumatorio de manera desarrollada.

$$y = \frac{1}{2}x \rightarrow y = \frac{1}{2}(2\lambda + 1) \rightarrow y = \lambda + \frac{1}{2}$$

- La curva:

Ya sabemos que en la expresión anterior x ha sido sustituida por λ, luego tendremos que:

$$x = \lambda$$

$$y = \frac{1}{4}\lambda^2$$

Ahora para aplicar la fórmula de la longitud de una curva que hemos propuesto necesitamos conocer la métrica del espacio. Ya sabemos que estamos en un espacio euclídeo por lo que métrica para dos dimensiones[7] es:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, tenemos (añadimos las derivadas que nos van a hacer falta):

- La recta *L*:

$$\left.\begin{matrix} x = 2\lambda + 1 \\ y = \lambda + \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{d\lambda} = 2 \\ \frac{dy}{d\lambda} = 1 \end{cases}$$

Así, en este caso, nuestra expresión:

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}}\, d\lambda$$

Que desarrollada, sería:

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{g_{11} \frac{dx}{d\lambda}\frac{dx}{d\lambda} + g_{12} \frac{dx}{d\lambda}\frac{dy}{d\lambda} + g_{21} \frac{dy}{d\lambda}\frac{dx}{d\lambda} + g_{22} \frac{dy}{d\lambda}\frac{dy}{d\lambda}}\, d\lambda$$

Lo que está marcado en rojo se anula por estar multiplicado por los elementos 'cero' de la métrica luego, finalmente, nos queda que:

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{g_{11} \frac{dx}{d\lambda}\frac{dx}{d\lambda} + g_{22} \frac{dy}{d\lambda}\frac{dy}{d\lambda}}\, d\lambda$$

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1}\, d\lambda \rightarrow S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{5}\ d\lambda$$

¿Qué valores de λ debemos usar? Pues aquellos que permitan el recorrido de nuestra función que va desde $x = 0$ a $x = 2$. Puesto que hemos parametrizado como:

[7] Nótese que a la métrica, como en Relatividad General va a empezar a estar relacionada con campos gravitatorios, vamos a dejar de llamarla eta (η) y vamos a empezar a referirla como $g_{ij\ldots}$.

$$x = 2\lambda + 1$$

Vemos que λ debe ir desde $\lambda_1 = -1/2$ hasta $\lambda_2 = 1/2$, por lo que, finamente nos queda que:

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{5}\ d\lambda \ \rightarrow\ \sqrt{5}\cdot\lambda\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \rightarrow \sqrt{5}\cdot\frac{1}{2} - \left(\sqrt{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \rightarrow \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \cong 2.2360$$ [8]

Veamos ahora el caso de la curva cuyo valor para la longitud, como es previsible, debería ser mayor al de la recta.

- La curva *G*:

$$\left.\begin{matrix} x = \lambda \\ y = \frac{1}{4}\lambda^2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{d\lambda} = 1 \\ \frac{dy}{d\lambda} = \frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{g_{11}\frac{dx}{d\lambda}\frac{dx}{d\lambda} + g_{22}\frac{dy}{d\lambda}\frac{dy}{d\lambda}}\, d\lambda$$

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4}\lambda^2}\right) d\lambda$$

Y puesto que en este caso λ va desde 0 hasta 2, tendríamos que:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{4+\lambda^2} + 2\,\mathrm{arcsinh}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)\Big]_0^2 \cong 2.2959$$

Que, efectivamente, es una longitud mayor que en el caso de la recta.

Ahora, recordemos que queremos minimizar la curva. Analicemos de nuevo el asunto para ir acercándonos al proceso de optimización. ¿Qué hemos hecho?

Teníamos una expresión:

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\sqrt{g_{11}\frac{dx}{d\lambda}\frac{dx}{d\lambda} + g_{12}\frac{dx}{d\lambda}\frac{dy}{d\lambda} + g_{21}\frac{dy}{d\lambda}\frac{dx}{d\lambda} + g_{22}\frac{dy}{d\lambda}\frac{dy}{d\lambda}}\right) d\lambda$$

¿Qué variables estaban implicadas?

$$x\ ,\ y\ ,\ \frac{dx}{d\lambda}\ ,\ \frac{dy}{d\lambda}$$

(OBSERVACIÓN. Es más que obvio que g_{ij} ejerce como constante en esta función)

Para que nuestra expresión haya sido plenamente operativa hemos introducido una parametrización de x e y en función de lamba, es decir, algo como:

[8] Que si miramos en nuestro esquema geométrico y tenemos presente el Teorema de Pitágoras vemos que es perfectamente coherente. De hecho, hubiéramos parametrizado la expresión como la hubiéramos parametrizado el resultado sería siempre el mismo.

$$x_{(\lambda)} \quad , \quad y_{(\lambda)}$$

Y derivar.

Así hemos llegado a una función de funciones, a una *metafunción,* a un ***Funcional*** (de nuevo, recordemos la nota 132 del Liber Primvs) al que 'damos de comer' una curva y nos devuelve 'digerido' (cada uno que imagine el modo de salida como desee) un escalar:

$$I\left[x_{(\lambda)}, y_{(\lambda)}\right] = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F_{\left(x, y, \frac{dx}{d\lambda}, \frac{dy}{d\lambda}\right)}\, d\lambda$$

Donde $x_{(\lambda)}$ y $y_{(\lambda)}$ son las componentes de una curva.

Para facilitar un poco el desarrollo, imaginemos que estamos sólo ante una dependencia (después será perfectamente exportable a más dimensiones):

$$I\left[x_{(\lambda)}\right] = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F_{\left(x, \frac{dx}{d\lambda}\right)}\, d\lambda$$

Ahora, para optimizar esta 'curva', para buscar el valor mínimo, ¿cómo procedemos? Efectivamente tendremos que ir acercándonos al uso de la Fórmula de Euler-Lagrange.

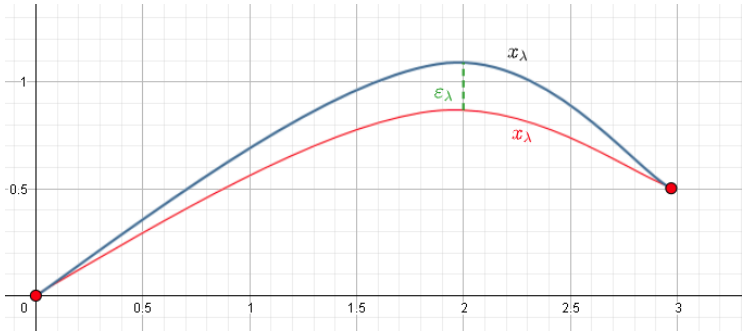
Para recordar cómo aplicarla, partamos de una hipótesis: imaginemos que ya hemos encontrado la solución, la función perfecta (la marcamos en rojo):

$$x_{(\lambda)}$$

Así, suponiendo que dicha solución es la buena, tendremos que dar por sentado que una expresión como ésta arroja el resultado mínimo posible:

$$I\left[x_{(\lambda)}\right] = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F_{\left(x, \frac{dx}{d\lambda}\right)}\, d\lambda = mínimo$$

Pero, claro, lo más probable es que no hayamos encontrado a la primera la solución perfecta, sino alguna con algún tipo de desviación sobre la perfecta, es decir, una curva aproximada a la curva perfecta:



Donde la curva 'imperfecta' es, por ejemplo en el punto 2:

$$x_{(\lambda)} = x_{(\lambda)} + \varepsilon_{(\lambda)}$$

Y $\varepsilon_{(\lambda)}$ es un diferencial del orden $(\varepsilon_{(\lambda)})^2 \approx 0$ y además en los puntos inicial y final, por ejemplo, λ_1, λ_2, resulta que $\varepsilon_{(\lambda_1)} = \varepsilon_{(\lambda_2)} = 0$.

En este caso, el Funcional que definimos antes, si le aportamos como INPUT la función 'imperfecta' quedaría reconfigurado como:

$$I\left[x_{(\lambda)}\right] = I\left[x_{(\lambda)} + \varepsilon_{(\lambda)}\right]$$

La variación que hay entre $x_{(\lambda)}$ y $x_{(\lambda)}$ es minúscula, diferencial: $\varepsilon_{(\lambda)}$ y podríamos definirla como:

$$\delta I \equiv I\left[x_{(\lambda)} + \varepsilon_{(\lambda)}\right] - \left[x_{(\lambda)}\right]$$

Es decir:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F_{\left(x_{(\lambda)}+\varepsilon_{(\lambda)}, \frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}+\frac{d\varepsilon_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)} d\lambda - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F_{\left(x_{(\lambda)}, \frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)} d\lambda$$

O lo que es lo mismo:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F_{\left(x_{(\lambda)}+\varepsilon_{(\lambda)}, \frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}+\frac{d\varepsilon_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)} - F_{\left(x_{(\lambda)}, \frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)} d\lambda$$

Y queremos que esto sea igual a cero, es decir, que el área comprendida entre las dos curvas, la perfecta posible y la imperfecta que posiblemente tengamos sea igual a cero:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[F_{\left(x_{(\lambda)}+\varepsilon_{(\lambda)}, \frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}+\frac{d\varepsilon_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)} - F_{\left(x_{(\lambda)}, \frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)}\right] d\lambda = 0$$

Esto, mediante el Teorema de Taylor podemos aproximarlo del siguiente modo[9]:

$$f_{\left(x_{(\lambda)}+\varepsilon_{(\lambda)}, \frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}+\frac{d\varepsilon_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)} \approx f_{\left(x_{(\lambda)}, \frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)} + \left[\frac{\partial f}{\partial x_{(\lambda)}}\varepsilon_{(\lambda)} + \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)}\left(\frac{d\varepsilon}{d\lambda}\right)\right] + \cdots$$

Y ahora, la magia algebraica, si pasamos el primer término de la derecha a la izquierda resulta que tenemos que:

$$f_{\left(x_{(\lambda)}+\varepsilon_{(\lambda)}, \frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}+\frac{d\varepsilon_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)} - f_{\left(x_{(\lambda)}, \frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)} \approx \left[\frac{\partial f}{\partial x_{(\lambda)}}\varepsilon_{(\lambda)} + \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)}\left(\frac{d\varepsilon_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)\right]$$

Donde el término de la izquierda, efectivamente, no es otra cosa que:

$$\delta I \equiv I\left[x_{(\lambda)} + \varepsilon_{(\lambda)}\right] - \left[x_{(\lambda)}\right]$$

[9] A modo de guía recordemos que el Teorema de Taylor, para funciones de más de una variable, tiene aproximadamente esta forma:

$$f_{(x+a,y+b)} \approx f_{(x,y)} + \left[\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial y}b\right] + \cdots$$

Por lo que, mediante el Teorema de Taylor, hemos llegado a que esta expresión:

$$\left[F_{\left(x_{(\lambda)}+\varepsilon_{(\lambda)},\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}+\frac{d\varepsilon_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)}-F_{\left(x_{(\lambda)},\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)}\right]$$

Es asintóticamente igual a:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_{(\lambda)}}\varepsilon_{(\lambda)}+\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)}\left(\frac{d\varepsilon_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)\right]$$

Por lo que podemos replantear el asunto como:

$$\delta I=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[\frac{\partial f}{\partial x_{(\lambda)}}\varepsilon_{(\lambda)}+\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)}\left(\frac{d\varepsilon_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)\right]d\lambda$$

Y queremos que esto sea igual a cero, es decir, queremos la función, la curva, perfecta:

$$\delta I=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[\frac{\partial f}{\partial x_{(\lambda)}}\varepsilon_{(\lambda)}+\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)}\left(\frac{d\varepsilon_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)\right]d\lambda=0$$

Ahora vamos a tratar de sacar $\varepsilon_{(\lambda)}$ como factor común para poder acercar la expresión a una forma que nos permita realizar la optimización mediante la Fórmula de Euler-Lagrange[10]. Así, para ello, consideremos que la expresión anterior es la misma que:

$$\delta I=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{\partial f}{\partial x_{(\lambda)}}\varepsilon_{(\lambda)}\,d\lambda+\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)}\left(\frac{d\varepsilon_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)d\lambda=0$$

El primer término ya lo tenemos solucionado, pues el factor $\varepsilon_{(\lambda)}$ ya está separado. Sin embargo, el término que hemos marcado en color verde está multiplicado por $\left(\frac{d\varepsilon_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)$. Desarrollémoslo para acercarlo a la forma que necesitamos. Para ello recurriremos a la integración por partes (la integral de un producto).

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)}\left(\frac{d\varepsilon_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)d\lambda$$

Como sabemos que la integración por partes es:

[10] El mismo desarrollo que vamos a realizar ahora ya lo hicimos en la nota 132 del Liber Primvs.

$$\int u\, dw = uw - \int w\, du$$

Podemos establecer que:

$$u = \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)}$$

$$dw = \frac{d\varepsilon_{(\lambda)}}{d\lambda}$$

De manera que, para obtener todos los elementos necesarios para proceder con la integración por partes, tendremos que:

$$u = \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)} \qquad du = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)}\right) d\lambda$$

$$w = \varepsilon_{(\lambda)} \qquad dw = \frac{d\varepsilon_{(\lambda)}}{d\lambda}\, d\lambda$$

Luego, esto:

$$\int u\, dw = uw - \int w\, du$$

Se reescribe como:

$$= \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)} \varepsilon_{(\lambda)} \Bigg]_{\lambda_1}^{\lambda_2} - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varepsilon_{(\lambda)}\, \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)}\right) d\lambda$$

Ahora replanteemos nuestra expresión completa que, recordemos, era:

$$\delta I = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\partial f}{\partial x_{(\lambda)}} \varepsilon_{(\lambda)}\, d\lambda + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)} \left(\frac{d\varepsilon_{(\lambda)}}{d\lambda}\right) d\lambda$$

Como:

$$\delta I = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\partial f}{\partial x_{(\lambda)}} \varepsilon_{(\lambda)}\, d\lambda + \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)} \varepsilon_{(\lambda)} \Bigg]_{\lambda_1}^{\lambda_2} - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varepsilon_{(\lambda)}\, \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)}\right) d\lambda$$

Pero recordemos que dijimos que:

$$\varepsilon_{(\lambda_1)} = \varepsilon_{(\lambda_2)} = 0$$

Luego el término del centro, cuando evaluemos, será cero, por lo que la expresión definitivamente nos quedará como:

$$\delta I = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\partial f}{\partial x_{(\lambda)}} \varepsilon_{(\lambda)}\, d\lambda - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varepsilon_{(\lambda)}\, \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)}\right) d\lambda$$

Aquí podemos ya sacar $\varepsilon_{(\lambda)}$ como factor común, es decir:

$$\delta I = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\frac{\partial f}{\partial x_{(\lambda)}} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)}\right)\right] \varepsilon_{(\lambda)}\; d\lambda$$

Y recordemos que queríamos que el cambio del Funcional fuera igual a cero:

$$\delta I = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\frac{\partial f}{\partial x_{(\lambda)}} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)}\right)\right] \varepsilon_{(\lambda)}\; d\lambda = 0$$

Cosa que podemos conseguir haciendo que:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_{(\lambda)}} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)}\right)\right] = 0$$

Que no es otra cosa que, ciertamente, la Fórmula de Euler-Lagrange[11].

Y esto es perfectamente aplicable a más de una dimensión como, por ejemplo, el caso inicial de dos dimensiones que proponíamos:

$$I[x_{(\lambda)}, y_{(\lambda)}] = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F_{(x,y,\frac{dx}{d\lambda},\frac{dy}{d\lambda})}\, d\lambda$$

Que podríamos resolver aplicando la Fórmula de Euler-Lagrange del siguiente modo (por componentes):

$$\delta I = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\left[\frac{\partial f}{\partial x_{(\lambda)}} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)}\right)\right] \varepsilon_{x(\lambda)} + \left[\frac{\partial f}{\partial y_{(\lambda)}} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dy_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)}\right)\right] \varepsilon_{y(\lambda)}\right] d\lambda = 0$$

Y, para que esta igualdad se cumpla, debe darse que:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_{(\lambda)}} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)}\right)\right] = 0$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y_{(\lambda)}} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dy_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)}\right)\right] = 0$$

[11] Véase nota 132 del Liber Primvs.

Obviamente ya vemos que hemos tenido que proceder mediante derivadas parciales ya que hay más de una variable (es un espacio de dos dimensiones[12]).

Desarrollémoslo. Recordemos que estábamos en un espacio euclídeo por lo que la métrica será:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De manera que en la expresión de longitud de nuestra curva, como ya hemos visto, sólo sobrevivirán los siguientes términos:

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\sqrt{g_{11} \frac{dx}{d\lambda}\frac{dx}{d\lambda} + g_{22} \frac{dy}{d\lambda}\frac{dy}{d\lambda}} \right) d\lambda$$

Es decir:

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\sqrt{g_{11} \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + g_{22} \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2} \right) d\lambda$$

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\sqrt{1 \cdot \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2} \right) d\lambda$$

Trabajemos sobre la variable $x^i \quad \rightarrow \quad i = 1 \quad \rightarrow x^1$, es decir: x. Todo lo que hagamos sobre la x será perfectamente simétrico con y por lo que, cuando acabemos con la x se lo aplicaremos, sin mirar los pormenores, a la y.

Por otro lado estamos obligados a que se cumpla la Fórmula de Euler-Lagrange que, ahora, proponemos como una *igualdad* entre términos. Es decir, proponemos por E-L que (obsérvese que le quitamos ya el superíndice porque ahora ya sí que trabajamos con una variable, una dimensión, concreta: la x):

$$\frac{\partial f}{\partial x_{(\lambda)}} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)} \right)$$

[12] Recordemos que esta expresión, según el convenio de sumación de Einstein para n dimensiones sería:

$$I[x^i{}_{(\lambda)}] = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F_{\left(x^i{}_{(\lambda)}, \frac{dx^i{}_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)} \, d\lambda$$

Donde, es obvio, que:

$$x^i \rightarrow x^1, x^2, x^3, \ldots \rightarrow x, y, z, \ldots, n \text{ dimensiones}$$

Analicemos el resultado en el lado izquierdo de nuestra *igualdad* Euler-Lagrange. ¿cuál es nuestra función 'longitud'?

$$f = \sqrt{\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2} \quad [13]$$

Está, como observamos, en función de $\frac{dx}{d\lambda}$. Sin embargo, según el término izquierdo de la igualdad E-L, debemos derivar parcialmente respecto de $x_{(\lambda)}$, por lo que el tendremos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_{(\lambda)}} = \frac{\partial\left(\sqrt{\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2}\right)}{\partial x_{(\lambda)}} = 0$$

Ahora, ¿qué sucede con el segundo término? Veamos:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial\sqrt{\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2}}{\partial\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)}\right)$$

Hagamos la derivada parcial de lo que hay dentro del paréntesis y que hemos marcado en rojo[14] (observemos que es la derivada de una raíz y a la que también hemos de aplicar la regla de la cadena):

$$= \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{2\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}}{2\sqrt{\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2}}\right) \rightarrow \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}}{\sqrt{\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2}}\right)$$

Que, como decimos, debe ser igual a cero (recordemos la 'igualdad E-L). Es decir:

---

[13] Obsérvese que donde antes poníamos…:

$$\sqrt{1\cdot\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + 1\cdot\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2}$$

… ahora ponemos:

$$\sqrt{\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2}$$

Ello ni implica, realmente, cambio alguno. Sencillamente en la primera expresión, pues una función de funciones, dx era el diferencial de una función de lambda. No lo explicitábamos por darse por perfectamente entendido. Ahora, como vamos a hacer el desarrollo, digamos, interno, preferimos ponerlo para que en todo momento estemos orientados.

[14] Nótese que hay dos procesos de derivación: una derivada en base a lambda $\frac{d}{d\lambda}$. Y una derivada parcial, digamos, 'contenida' en el paréntesis: $\frac{\partial\sqrt{\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2+\left(\frac{dy_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2}}{\partial\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)}$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}}{\sqrt{\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2+\left(\frac{dy_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2}}\right)=0$$

Es decir, que toda la parte 'interna' que hemos marcado en rojo debe ser una constante, pues su derivada es cero. Así tendríamos que:

$$\frac{\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}}{\sqrt{\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2+\left(\frac{dy_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2}}=CTE_x$$

Ya hemos dicho anteriormente que para el caso de la variable $y_{(\lambda)}$ el asunto es perfectamente simétrico, por lo que tendríamos que:

$$\frac{\frac{dy_{(\lambda)}}{d\lambda}}{\sqrt{\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2+\left(\frac{dy_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2}}=CTE_y$$

Ahora, si quisiéramos dejar estas dos expresiones, exclusivamente en función de $\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}$ y $\frac{dy_{(\lambda)}}{d\lambda}$ podemos dividir ambas expresiones (pues ahora veremos que esta agrupación nos interesa):

$$\frac{\frac{\frac{dy}{d\lambda}}{\sqrt{\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2+\left(\frac{dy_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2}}}{\frac{\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}}{\sqrt{\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2+\left(\frac{dy_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)^2}}}\rightarrow\frac{\frac{dy}{d\lambda}}{\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}}$$

Que, igualmente, nos arrojaría un resultado también constante:

$$\frac{\frac{dy_{(\lambda)}}{d\lambda}}{\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}}=\frac{CTE_y}{CTE_x}=cte$$

Es decir, observemos:

$$\frac{\frac{dy_{(\lambda)}}{d\lambda}}{\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}}=cte$$

$$\frac{dy_{(\lambda)}}{d\lambda}=cte\cdot\left(\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}\right)$$

Si multiplicamos a ambos lados de la expresión por $d\lambda$:

$$\cancel{d\lambda} \cdot \left(\frac{dy_{(\lambda)}}{\cancel{d\lambda}}\right) = cte \cdot \left(\frac{dx_{(\lambda)}}{\cancel{d\lambda}}\right) \cdot \cancel{d\lambda}$$

$$dy_{(\lambda)} = cte \cdot dx_{(\lambda)}$$

Ojo a esta maravilla. Despejemos los diferenciales:

$$\int dy_{(\lambda)} = \int cte \cdot dx_{(\lambda)}$$

Esto es:

$$y_{(\lambda)} = cte \cdot \int dx_{(\lambda)}$$

$$y_{(\lambda)} = cte \cdot x_{(\lambda)} + Constante\ integración$$

Es decir, que efectivamente, en el espacio euclídeo, al optimizar una curva para que siga el camino más corto entre dos puntos, obtenemos, como era de esperar, la ecuación de una recta:

$$y = ax + b$$

En resumen, y esto es aplicable a cualquier espacio con una métrica conocida, la longitud de una curva la podemos calcular mediante la expresión:

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\sqrt{g_{ij} \frac{dx^i_{(\lambda)}}{d\lambda} \frac{dx^j_{(\lambda)}}{d\lambda}} \right) d\lambda \quad [15]$$

Longitud que después optimizaremos mediante la Fórmula de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i_{(\lambda)}} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{dx^i_{(\lambda)}}{d\lambda} \right)} \right)$$

Ojo, nótese que hemos marcado la 'i' de la expresión de la longitud en rojo y la 'i' de la Fórmula de Euler-Lagrange en color azul porque no son la misma 'i'. Expliquémonos. Téngase en cuenta que en la expresión de la longitud podemos tener dos, o más variables, que se van combinando mediante permutaciones, es decir, mediante combinaciones del tipo (supongamos sólo dos dimensiones posibles):

$$i, j = (1,1), (1,2), (2,1), (2,2) \rightarrow (x, x), (x, y), (y, x), (y, y)$$

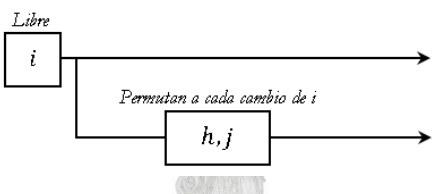
Sin embargo, en la expresión de E-L lo que tenemos es directamente una variable de todas las posibles. Es decir, ahora necesitaremos una sola 'i', un índice que recorra n dimensiones, donde $x^i_{(\lambda)}$ podrá ser: $x_{(\lambda)}, y_{(\lambda)}, z_{(\lambda)}, r_{(\lambda)}, \ldots$

Es muy importante ser conscientes de que esas 'ies' no son la misma. Es fácil confundirse con esto pero creemos que lo que acabamos de decir lo aclara bastante. Hay que estar atento a estas posibles confusiones. De hecho, para tratar de evitarlas vamos a cambiar el índice de la expresión de la longitud:

---

[15] Obviamente, en el caso que nos ocupa, estamos ante un espacio bidimensional pues hay dos variables que conmutan. Es cierto que las variables i, j podrían tomar valores infinitos, desde 1 hasta N pero, claro sólo combinan 2 a 2 por lo que es obvio que estaríamos ante un espacio de dos dimensiones, donde sus variables pueden combinarse mediante 4 situaciones posibles. Necesitamos dos índices justamente por eso, porque las 4 combinaciones posibles re quieren que los valores de i y j sean iguales en algún momento pero, también, diferentes. Sin embargo, en breve, para esta misma expresión vamos a cambiar i por h para evitar confusiones ya que esta i de la expresión de la longitud representa un número que cambia según la necesidad de combinación, de permutación, con otro índice (j). Digamos que es un una especie de 'índice de evolución permutante'. Sin embargo en la siguiente expresión que usaremos a continuación, la forma genérica de la Fórmula de Euler-Lagrange, la i que va a aparecer ($x^i_{(\lambda)}$) representa un índice que no permuta, digamos que corre libre hacia el infinito marcando el ritmo de la evolución permutante de los índices que dependen de él. Digamos que la i de la Fórmula de Euler-Lagrange que hemos marcado de azul en la siguiente expresión quye encontremos en el hilo principal es un 'índice de evolución lineal', no se combina con nadie, mira al infinito y corre hacia él libremente. Algo parecido a lo que recogemos en el siguiente esquema:

MAPA DE ÍNDICES



$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\sqrt{g_{hj} \frac{dx^h_{(\lambda)}}{d\lambda} \frac{dx^j_{(\lambda)}}{d\lambda}} \right)$$

Por otro lado, para ahorrarnos trabajo, vamos a definir (por pura convención interna nuestra) la siguiente notación:

$$\left(\frac{dx^{índice}_{(\lambda)}}{d\lambda} \right) = u^{índice}_{(\lambda)}$$

De manera que tendremos nuestra expresión de la longitud como:

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\sqrt{g_{hj} \frac{dx^h_{(\lambda)}}{d\lambda} \frac{dx^j_{(\lambda)}}{d\lambda}} \right) d\lambda \rightarrow S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\sqrt{g_{hj} u^h_{(\lambda)} u^j_{(\lambda)}} \right) d\lambda$$

Y nuestra Fórmula de E-L como:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i_{(\lambda)}} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial (u^i_{(\lambda)})} \right) \quad [16]$$

Como sabemos que la función es una raíz cuadrada podemos plantear la derivación:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i_{(\lambda)}} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{hj} u^h_{(\lambda)} u^j_{(\lambda)}}}{\partial (u^i_{(\lambda)})} \right)$$

Es decir (por la regla de la cadena), como:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i_{(\lambda)}} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{2\sqrt{g_{hj} u^h_{(\lambda)} u^j_{(\lambda)}}} \cdot \frac{\partial}{\partial (u^i_{(\lambda)})} \left(g_{hj} u^h_{(\lambda)} u^j_{(\lambda)} \right) \right) \quad [17]$$

Como estamos en un mundo de dos dimensiones: $u^1_{(\lambda)}$, $u^2_{(\lambda)}$ (que es lo único que nos deja permutar el hecho de que haya sólo dos índices 'por debajo' h, j), es decir: $\frac{dx^1_{(\lambda)}}{d\lambda}$, $\frac{dx^2_{(\lambda)}}{d\lambda}$ o lo

---

[16] Por lo que hemos dicho en la última página es obvio que este índice es otro diferente al 'h' de la expresión de la longitud:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i_{(\lambda)}} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{dx^i_{(\lambda)}}{d\lambda} \right)} \right)$$

[17] Téngase en cuenta que la $u^i_{(\lambda)}$ recorrerá todos los valores posibles, desde 1 … hasta… N que hayan adotado h y j en sus diferentes combinaciones posibles y que, al tratarse la expresión de una derivada parcial respecto de la variable $u^i_{(\lambda)}$ (función variable, no lo olvidemos), ésta, en cada caso, 'luchará', 'metabolizará', según su propia naturaleza, la expresión combinada que haya en el numerador en cada iteración.

que es lo mismo: $\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda}, \frac{dy_{(\lambda)}}{d\lambda}$. Desarrollemos, de lo que hemos marcado en rojo, lo que aún hay que derivar parcialmente y que hemos circunvalado con una línea discontinua. Observemos cómo, para cada una de las variables, efectivamente, era muy importante distinguir los índices para no confundirlos. Vamos con $u^1_{(\lambda)}$,es decir, derivar parcialmente respecto $\frac{dx^1_{(\lambda)}}{d\lambda}$. Antes de abordar esta derivación parcial es importante tener en cuenta que el término g_{hj} puede estar en función de alguna variable, cualquiera de las posibles $x^i_{(\lambda)}$ pero, en ningún caso, lo está en función de algo parecido a $\frac{dx^i_{(\lambda)}}{d\lambda}$, por ello, a la hora de derivar parcialmente respecto a $u^i_{(\lambda)} \rightarrow \frac{dx^i_{(\lambda)}}{d\lambda}$, dicho elemento (g_{hj}) se comporta como una constante que acompaña a la variable sobre la que se deriva. Veámoslo desplegado para dos dimensiones:

$$\frac{\partial}{\partial(u^1_{(\lambda)})}\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial(u^1_{(\lambda)})}\left(g_{11}u^1_{(\lambda)}u^1_{(\lambda)} + g_{12}u^1_{(\lambda)}u^2_{(\lambda)} + g_{21}u^2_{(\lambda)}u^1_{(\lambda)} + g_{22}u^2_{(\lambda)}u^2_{(\lambda)}\right)$$

(OBSERVACIÓN. Hemos marcado el índice $i = 1$ en rojo para que se vea cómo, ciertamente, permanece fijo en 1 mientras que los índices h y j han ido cambiando adoptando todos los valores de las posibles combinaciones de su recorrido. Vemos, pues, la gran utilidad de haber cambiado de letra y haber usado h en vez de repetir con la i)

Derivemos parcialmente, como estamos indicando, respecto a $u^1_{(\lambda)}$:

$$\frac{\partial\left(g_{11}(u^1_{(\lambda)})^2 + g_{12}u^1_{(\lambda)}u^2_{(\lambda)} + g_{21}u^2_{(\lambda)}u^1_{(\lambda)} + g_{22}(u^2_{(\lambda)})^2\right)}{\partial(u^1_{(\lambda)})} =$$

$$= g_{11}2u^1_{(\lambda)} + g_{12}u^2_{(\lambda)} + g_{21}u^2_{(\lambda)} + 0$$

Ahora, recordemos que los elementos g_{hj} son elementos de una matriz métrica, es decir, que, necesariamente, se trata de una matriz simétrica donde:

$$g_{12} = g_{21}$$

Por lo que podremos decir que:

$$= g_{11}2u^1_{(\lambda)} + 2g_{12}u^2_{(\lambda)}$$

Más estéticamente:

$$= 2g_{11}u^1_{(\lambda)} + 2g_{12}u^2_{(\lambda)}$$

Volvemos a marcar los subíndices en rojo que provienen del subíndice que teníamos en: $\frac{\partial}{\partial\left(u_{(\lambda)}^{1}\right)}$ pues al derivar parcialmente sólo han sobrevivido los casos en que $i = h$ de manera que en el resultado final obtenido podemos sustituir h por i. Por otro lado, vemos que hay índices, marcados en azul, que, de nuevo empiezan a recorrer valores mientras el 1 (la i) se ha quedado fijo y no son j. Para no confundirnos con la j que usamos antes, que ya ha sido evaluada y "eliminada" (al igual que la h) en el proceso de derivación por partes, llamemos a este índice con una letra nueva: k. Así, de manera genérica, podríamos decir que:

$$\frac{\partial}{\partial\left(u^{i}_{(\lambda)}\right)}\left(g_{hj}u^{h}_{(\lambda)}u^{j}_{(\lambda)}\right)=2g_{ik}u^{k}_{(\lambda)} \qquad 18$$

[18] Esto se hace aún más evidente si desarrollamos la siguiente dimensión:

$$\frac{\partial}{\partial\left(u^{2}_{(\lambda)}\right)}\left(g_{hj}u^{h}_{(\lambda)}u^{j}_{(\lambda)}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\left(u^{2}_{(\lambda)}\right)}\left(g_{11}u^{1}_{(\lambda)}u^{1}_{(\lambda)}+g_{12}u^{1}_{(\lambda)}u^{2}_{(\lambda)}+g_{21}u^{2}_{(\lambda)}u^{1}_{(\lambda)}+g_{22}u^{2}_{(\lambda)}u^{2}_{(\lambda)}\right)$$

$$=\left(0+g_{21}u^{1}_{(\lambda)}+g_{21}u^{1}_{(\lambda)}+g_{22}2u^{2}_{(\lambda)}\right)$$

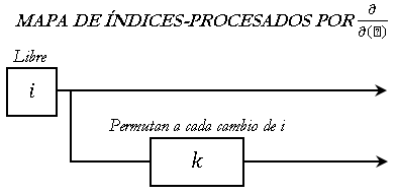
$$=\left(0+2g_{21}u^{1}_{(\lambda)}+2g_{22}u^{2}_{(\lambda)}\right)=\frac{\partial}{\partial\left(u^{2}_{(\lambda)}\right)}\left(g_{hj}u^{h}_{(\lambda)}u^{j}_{(\lambda)}\right)=2g_{2k}u^{k}_{(\lambda)}$$

Es decir, efectivamente, como decíamos: $\frac{\partial}{\partial\left(u^{i}_{(\lambda)}\right)}\left(g_{hj}u^{h}_{(\lambda)}u^{j}_{(\lambda)}\right)=2g_{ik}u^{k}_{(\lambda)}$

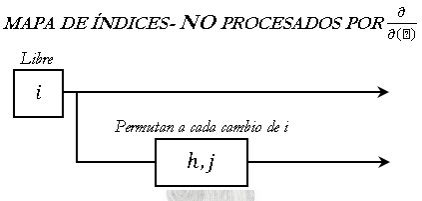
Observemos, esto muy importante para no desorientarse, que la h, por el procesamiento al que ha sido sometida a través de la derivación parcial por $\frac{\partial}{\partial\left(u^{i}_{(\lambda)}\right)}$ ha sido totalmente procesada, como 'destruída', de manera que el valor de ese índice, una vez procesado, siempre va a coincidir con el valor dominante de i, por lo que podemos eliminar la h y sustituirla por una i.

Además es conveniente también cambiar la j ya que tras el procesamiento al que ha sido sometido todo por la derivada parcial $\frac{\partial}{\partial\left(u^{i}_{(\lambda)}\right)}$ parece que se pueden perder valores por lo que es conveniente introducir un ínidce nuevo, por ejemplo k, que recoja un recorrido limpio desde 1 hacia adelante, hasta donde tenga que llegar en relación a su combinación (si es que la acaba teniendo con alguna otra variable… ya veremos que sí) y bajo la dependencia de i. 'k' sería, de momento, mientras no lo combinemos con nada más, un índice de evolución lineal que tendrá que recorrer todas sus posibilidades (infinitas mientras no esté acompañado de otro índice. Como decimos, en breve veremos que sí lo está… en realidad está acompañador por i pero, claro, eso lo deja en la misma incómoda situación de evolución infinita…) haciendo esperar eternamente a 'i' para cambiar.

Pero es que, además, nos encontramos con dos mapas de índices que están evolucionando en paralelo. Ahora, mismo, un mapa de índices procesados por las derivadas parciales:



Y, por otro lado un mapa de índices No procesados por las derivadas parciales:



Es decir que podemos decir que la Fórmula de Euler-Lagrange para la optimización de la longitud de una curva en un espacio de métrica dada (ya metemos la función en la expresión):

$$\frac{\partial f}{\partial x^i_{(\lambda)}} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial \sqrt{g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}}}{\partial\left(u^i_{(\lambda)}\right)}\right)$$

Puede ser descrita de manera general como:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i_{(\lambda)}} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{2\sqrt{g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}}}\cdot 2g_{ik}\cdot u^k_{(\lambda)}\right) \quad [19]$$

Expresión que, como es obvio, podemos seguir reduciendo:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i_{(\lambda)}} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}}}\cdot g_{ik}\cdot u^k_{(\lambda)}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^i_{(\lambda)}} = \frac{d}{d\lambda}\left(\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(g_{ik}\right)\cdot\left(u^k_{(\lambda)}\right)\right) \quad [20]$$

Es fundamental, respecto a estos mapas, tener en consideración que en ambos casos, la i es la misma, un índice que correrá hacia el infinito a saltos cuando las variables que dependen de él permuten oportunamente. En el el caso de la k solitaria, claro, i va a esperar eternamente (eso va a cambiar en breve), pero en el caso de la h, j, la i cambiará cuando h y j hayan agotado todas sus combinaciones posibles.

[19] Veamos un ejemplo desarrollado, desplegando la expresión según el Convenio de Sumación de Einstein (esto va a ser largo, tela…):

$$\frac{\partial f}{\partial x^1_{(\lambda)}} = \frac{1}{2\sqrt{g_{11}u^1_{(\lambda)}u^1_{(\lambda)}}}\cdot 2g_{11}u^1_{(\lambda)} + \frac{1}{2\sqrt{g_{12}u^1_{(\lambda)}u^2_{(\lambda)}}}\cdot 2g_{11}u^1_{(\lambda)} + \frac{1}{2\sqrt{g_{21}u^2_{(\lambda)}u^1_{(\lambda)}}}\cdot 2g_{11}u^1_{(\lambda)} + \frac{1}{2\sqrt{g_{22}u^2_{(\lambda)}u^2_{(\lambda)}}}\cdot 2g_{11}u^1_{(\lambda)}$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{g_{11}u^1_{(\lambda)}u^1_{(\lambda)}}}\cdot 2g_{12}u^2_{(\lambda)} + \frac{1}{2\sqrt{g_{12}u^1_{(\lambda)}u^2_{(\lambda)}}}\cdot 2g_{12}u^2_{(\lambda)} + + \frac{1}{2\sqrt{g_{21}u^2_{(\lambda)}u^1_{(\lambda)}}}\cdot 2g_{12}u^2_{(\lambda)} + \frac{1}{2\sqrt{g_{22}u^2_{(\lambda)}u^2_{(\lambda)}}}$$
$$\cdot 2g_{12}u^2_{(\lambda)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^2_{(\lambda)}} = \frac{1}{2\sqrt{g_{11}u^1_{(\lambda)}u^1_{(\lambda)}}}\cdot 2g_{21}u^1_{(\lambda)} + \frac{1}{2\sqrt{g_{12}u^1_{(\lambda)}u^2_{(\lambda)}}}\cdot 2g_{21}u^1_{(\lambda)} + \frac{1}{2\sqrt{g_{21}u^2_{(\lambda)}u^1_{(\lambda)}}}\cdot 2g_{21}u^1_{(\lambda)} + \frac{1}{2\sqrt{g_{22}u^2_{(\lambda)}u^2_{(\lambda)}}}\cdot 2g_{21}u^1_{(\lambda)}$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{g_{11}u^1_{(\lambda)}u^1_{(\lambda)}}}\cdot 2g_{22}u^2_{(\lambda)} + \frac{1}{2\sqrt{g_{12}u^1_{(\lambda)}u^2_{(\lambda)}}}\cdot 2g_{22}u^2_{(\lambda)} + + \frac{1}{2\sqrt{g_{21}u^2_{(\lambda)}u^1_{(\lambda)}}}\cdot 2g_{22}u^2_{(\lambda)} + \frac{1}{2\sqrt{g_{22}u^2_{(\lambda)}u^2_{(\lambda)}}}$$
$$\cdot 2g_{22}u^2_{(\lambda)}$$

Recordemos, por otro lado, que hasta ahora sólo estábamos calculando la parte interna del paréntesis del término derecho de la Fórmula de Euler-Lagrange.

[20] Los factores los separamos por criterio de paréntesis y por aquello a lo que están elevados.

Realicemos ahora la ***derivación por*** $\boldsymbol{d\lambda}$ que nos queda aún por hacer en el término derecho. Por la ley de la derivada de un producto sabemos que:

$$(A \cdot B \cdot C)' = A'BC + AB'C + ABC'$$

Es decir que:

$$= \frac{d}{d\lambda}\left(\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (g_{ik}) \cdot \left(u^k_{(\lambda)}\right)\right)$$

Será (separando las tres partes para que se vea claro):

$$= \frac{d\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}}}{d\lambda} \cdot (g_{ik}) \cdot \left(u^k_{(\lambda)}\right)$$

$$+\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d(g_{ik})}{d\lambda} \cdot \left(u^k_{(\lambda)}\right)$$

$$+\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (g_{ik}) \cdot \frac{d\left(u^k_{(\lambda)}\right)}{d\lambda}$$

Ahora, antes de proceder a desarrollar estas derivadas parciales, recordemos por un momento que estamos en un espacio cambiante; un espacio en el que las bases cambian según sean las coordenadas; un espacio cuya métrica está en función del lugar donde miremos, en función de x, y (pensemos en un espacio bidimensional para esta breve aclaración). Pensemos que lo hemos definido mediante, por ejemplo, una función cuadrática luego, al derivar, la x, y ha sobrevivido hasta llegar a la métrica por lo que los elementos de ésta siguen en función de x, y[21]. Es decir, que la métrica (para un espacio bidimensional, seguimos sin querer complicarnos demasiado la vida) sería algo del tipo:

$$g = \begin{pmatrix} g_{(x,y)_{11}} & g_{(x,y)_{12}} \\ g_{(x,y)_{21}} & g_{(x,y)_{22}} \end{pmatrix}$$

[21] Véase el capítulo sobre las Bases Coordenadas.

Y puesto que por la regla de la cadena sabemos que la derivada de una función multivariante por una variable diferente a las suyas se hace según el siguiente procedimiento:

$$\frac{d}{d\lambda}f_{(x,y)} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\lambda} \rightarrow \frac{d}{d\lambda}u_{(\lambda)}^{x,y} = \frac{\partial u_{(\lambda)}}{\partial x}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial u_{(\lambda)}}{\partial y}\frac{dy}{d\lambda}$$

Que mediante el Convenio de Sumación de Einstein podemos expresar resumidamente como:

$$\frac{d}{d\lambda}u_{(\lambda)}^{i} = \frac{\partial u_{(\lambda)}^{i}}{\partial x^{p}}\frac{dx^{p}}{d\lambda} \qquad 22$$

Y, por mera convención, de manera similar a lo que ya hemos hecho, con el único fin de escribir menos, llamemos a:

$$\frac{dx^{p}}{d\lambda} = u^{p}$$

Y a la parte verde, que ya vemos que siempre será igual, también podríamos asignarle un nickname, una especie de shortcut:

$$\frac{\partial ¿\,?}{\partial x^{p}} = \partial_{p} ¿\,?$$

De manera que la expresión:

$$\frac{d}{d\lambda}u_{(\lambda)}^{i} = \frac{\partial u_{(\lambda)}^{i}}{\partial x^{p}}\frac{dx^{p}}{d\lambda}$$

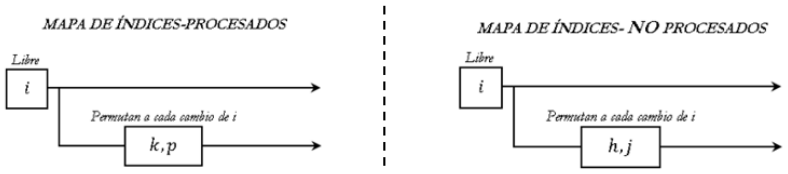
Podamos expresarla, ahorrando mucho espacio, como:

$$\frac{d}{d\lambda}u_{(\lambda)}^{i} = \partial_{p}u^{p}$$

Así, teniendo en cuenta esto y, sobre todo, recordando que g_{ik} son elementos de una matriz que están en función de una o más variables, procedamos a analizar la siguiente expresión que ya tenemos:

---

22 Usamos el superíndice 'p' porque aún no lo hemos usado. Por otro lado, y mucho más importante, obsérvese que 'p', cuando recorra sus posibilididaes, dará paso al cambio de i. ¿Qué quiere decir esto? Fijémonos dónde cae este índice p en nuestro mapa de índices, en la parte, 'procesada'. De momento sabemos que i es su 'padre' es decir, que i no cambiará hasta que p no haya hecho todo el recorrido que necesite, justo como hacía k, es decir, que está a su mismo nivel (el de k):



La comparación de ambos mapas nos va a ser muy útil para comprender un cambio de índices que vamos a hacer en breve pues…¿ no desempeñan h,j y k,p un rol parecido?... Los dos índices que conmutan entre ellos haciendo esperar a la misma i… veremos…

$$= \frac{d\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}}}{d\lambda} \cdot (g_{ik}) \cdot (u^k_{(\lambda)}) + \left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d(g_{ik})}{d\lambda} \cdot (u^k_{(\lambda)}) + \left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (g_{ik}) \cdot \frac{d(u^k_{(\lambda)})}{d\lambda}$$

Vamos a estudiar y re-expresar, según las convenciones propuestas, el término azul:

$$\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d(g_{ik})}{d\lambda} \cdot (u^k_{(\lambda)})$$

Que podemos replantear como[23]:

$$\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \partial_p g_{ik} \cdot \left(u^p_{(\lambda)}\right) \cdot (u^k_{(\lambda)})$$

Es decir que, recordemos, de nuestra aplicación concreta de la Fórmula de Euler-Lagrange a la longitud de nuestra curva:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i_{(\lambda)}} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial u^i_{(\lambda)}}\right)$$

Ya tenemos todo lo desplegado que hemos podido el término derecho que marcamos en verde, es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i_{(\lambda)}} =$$

$$\frac{d\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}}}{d\lambda} \cdot (g_{ik}) \cdot (u^k_{(\lambda)}) + \left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \partial_p g_{ik} \cdot \left(u^p_{(\lambda)}\right) \cdot (u^k_{(\lambda)}) + \left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (g_{ik}) \cdot \frac{d(u^k_{(\lambda)})}{d\lambda}$$

Ahora dirijamos nuestra atención al término izquierdo de nuestra Fórmula de Euler-Lagrange, el que hemos marcado en rojo:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i_{(\lambda)}}$$

Donde:

$$f = (g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)})^{\frac{1}{2}}$$

Es decir que tenemos que abordar la siguiente expresión:

---

[23] Téngase en cuenta que con el factor central, el que hemos reescrito hemos hecho lo siguiente:

$$\frac{d}{d\lambda}g_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^p}\frac{dx^p}{d\lambda}$$

Obviamente sabemos que esto es un sumatorio. Un sumatorio de derivadas parciales de la función multivariable g, que es cada elemento de una matriz métrica que cambiará según sea la coordenada, por ejemplo, x, y donde se mire en el espacio. Y a ese elemento multivariante se le aplcica una derivada parcial en función, cada vez, de una variable x^p que debe tener recorrido desde 1 hasta n (por eso llamamos a la variable de derivación parcial x^p, por usar una letra aún no usada). Esto, como ya sabemos, podemos expresarlo así:

$$\partial_p g_{ik} \cdot u^p_{(\lambda)}$$

$$\frac{\partial\left(\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{\partial x^i_{(\lambda)}}$$

Esto es, aplicando la Regla de la Cadena (marcamos en verde la 'parte de la R.C.'):

$$\frac{\partial\left(\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{\partial x^i_{(\lambda)}} = \frac{1}{2}\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)}{\partial x^i_{(\lambda)}}$$

Y, puesto que del numerador de la parte que hemos marcado en verde, lo único que está en función de $x^i_{(\lambda)}$ es g_{hj}[24], es decir, que $u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}$ ejercen como constantes, dicha derivación parcial quedará como:

$$= \frac{1}{2}\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial\left(g_{hj}\right)}{\partial x^i_{(\lambda)}}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}$$

Que según la nomenclatura que hemos convenido, podemos expresar como:

$$= \frac{1}{2}\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\partial_i g_{hj}\right)u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}$$

Atrevámonos ahora a poner nuestra Fórmula de Euler-Lagranje entera (nos vamos a cagar… en rojo el lado izquierdo y en verde el lado derecho):

$$\frac{1}{2}\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\partial_i g_{hj}\right)u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)} =$$

$$\frac{d\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}}}{d\lambda} \cdot \left(g_{ik}\right) \cdot \left(u^k_{(\lambda)}\right) + \left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \partial_p g_{ik} \cdot \left(u^p_{(\lambda)}\right) \cdot \left(u^k_{(\lambda)}\right) + \left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(g_{ik}\right) \cdot \frac{d\left(u^k_{(\lambda)}\right)}{d\lambda}$$

Ahora, operando en busca de comodidad, si multiplicamos a ambos de la expresión por:

$$\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Nos quitaremos casi todas las apariciones de tan molesto término, es decir, que nos quedará:

$$\frac{1}{2}\left(\partial_i g_{hj}\right)u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)} = \left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{d\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}}}{d\lambda}\right] \cdot \left(g_{ik}\right) \cdot \left(u^k_{(\lambda)}\right) + \partial_p g_{ik} \cdot \left(u^p_{(\lambda)}\right) \cdot \left(u^k_{(\lambda)}\right) + \left(g_{ik}\right) \cdot \frac{d\left(u^k_{(\lambda)}\right)}{d\lambda}$$

Y ahora, vamos a intentar despejar el último elemento del término derecho, es decir, que vamos a pasar a la izquierda aquello que podamos:

$$\frac{1}{2}\left(\partial_i g_{hj}\right)u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)} - \left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{d\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}}}{d\lambda}\right] \cdot \left(g_{ik}\right) \cdot \left(u^k_{(\lambda)}\right) - \partial_p g_{ik} \cdot \left(u^p_{(\lambda)}\right) \cdot \left(u^k_{(\lambda)}\right) = \left(g_{ik}\right) \cdot \frac{d\left(u^k_{(\lambda)}\right)}{d\lambda}$$

[24] Puede parecer un poco lioso pero ya lo hemos explicado. Recordemos: los elementos de la matriz métrica están en función de las variables originales de la función con la que se 'construyó' el espacio.

Ahora, para terminar este "despejado" que estamos buscando, nos falta *cargarnos* de alguna manera el factor (g_{ik}). Recordemos que estamos hablando de una matriz $i \cdot k$, es decir, que para convertirla en la Identidad tendremos que multiplicar por su matriz inversa pero, en esta terminología einsteniana, ¿cómo expresamos el producto de una matriz por su inversa? Veamos muy brevemente el comportamiento de la notación bajo el producto de matrices.

Supongamos dos matrices A y B:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

La matriz C resultante del producto entre A y B, será:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

Observemos el baile de índices:

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$$

$$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$$

$$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}$$

$$A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$$

$$A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j}$$

Es decir:

$$C_{ij} = A_{ik}B_{kj}$$

Y, como ya sabemos por el modo en que convertíamos componentes de variantes a contravariantes, mediante las matrices inversas, subiendo y bajando índices, tendremos que cargarnos el elemento (g_{ik}) para despejar $\frac{d(u^k_{(\lambda)})}{d\lambda}$, como estábamos diciendo antes de este paréntesis sobre el producto de matrices en la notación de Einstein, mediante el siguiente procedimiento (multiplicamos por la izquierda, recordemos que el producto escalar entre matrices no es conmutativo):

$$(g^{mi}) \cdot (g_{ik}) \quad {}^{25}$$

Es decir, multiplicarlo por una matriz inversa construida de manera que nos lleve a la Identidad, es decir, por el delta de Levi-Civita:

$$(g^{mi}) \cdot (g_{ik}) = \delta^m_k$$

El término que esté multiplicado por este delta de Krönecker, obviamente, sólo sobrevivirá cuando $m = k$, es decir que para que nuestra expresión:

[25] Es obvio que necesitamos un índice nuevo, usemos m, que aún no lo hemos usado.

$$\frac{1}{2}(\partial_i g_{hj})u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)} - \left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}\left[d\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\cdot(g_{ik})\cdot(u^k_{(\lambda)}) - \partial_p g_{ik}\cdot(u^p_{(\lambda)})\cdot(u^k_{(\lambda)}) = (g_{ik})\cdot\frac{d(u^k_{(\lambda)})}{d\lambda}$$

Permanezca íntegra, debe darse que $m = k$, por lo que podremos sustituir los índices k por m, es decir, que tendremos que:

$$\frac{1}{2}(g^{mi})(\partial_i g_{hj})u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)} - (g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)})^{\frac{1}{2}}\left[d\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\cdot(g^{mi})(g_{ik})\cdot(u^k_{(\lambda)}) - (g^{mi})(\partial_p g_{ik})\cdot(u^p_{(\lambda)})\cdot(u^k_{(\lambda)}) =$$

$$(g^{mi})(g_{ik})\cdot\frac{d(u^k_{(\lambda)})}{d\lambda}$$

Es decir:

$$\frac{1}{2}(g^{mi})(\partial_i g_{hj})u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)} - (g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)})^{\frac{1}{2}}\left[d\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\delta^m_k\cdot(u^k_{(\lambda)}) - (g^{mi})(\partial_p g_{ik})\cdot(u^p_{(\lambda)})\cdot(u^k_{(\lambda)}) = \delta^m_k\cdot\frac{d(u^k_{(\lambda)})}{d\lambda}$$

O, lo que es lo mismo, suponiendo el $\delta^m_k = 1$[26]:

$$\frac{1}{2}(g^{mi})(\partial_i g_{hj})u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)} - (g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)})^{\frac{1}{2}}\left[d\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}}\right](u^{\boldsymbol{m}}_{(\lambda)}) - (g^{mi})(\partial_p g_{ik})\cdot(u^p_{(\lambda)})\cdot(u^k_{(\lambda)}) = \frac{d(u^{\boldsymbol{m}}_{(\lambda)})}{d\lambda}$$

Esto, habitualmente, en los manuales se recoge con todos los términos con derivadas parciales en un mismo lado:

$$\frac{d(u^{\boldsymbol{m}}_{(\lambda)})}{d\lambda} + (g^{mi})(\partial_p g_{ik})u^p_{(\lambda)}u^k_{(\lambda)} - \frac{1}{2}(g^{mi})(\partial_i g_{hj})u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)} = -\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}\left[d\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}}\right](u^{\boldsymbol{m}}_{(\lambda)})$$

Donde podemos sacar factor común (ya pasamos de los colores, pues desde la reordenación ya no tiene sentido):

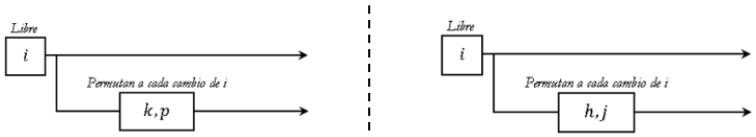
$$\frac{du^m_{(\lambda)}}{d\lambda} + \frac{1}{2}(g^{mi})\left[2(\partial_p g_{ik})u^p_{(\lambda)}u^k_{(\lambda)} - (\partial_i g_{hj})u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right] = -\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}\left[d\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]u^m_{(\lambda)}$$

Ahora debemos reflexionar sobre cómo los índices que hemos marcado en rojo y azul son totalmente simétricas, es decir, tal y como adelantamos en la nota 48, desempeñan exactamente el mismo papel. Así, para acabar de simplificar nuestra expresión podemos, con perfecta coherencia, hacer la aparente 'cabriola' de renombrar los índices del siguiente modo:

$$\frac{du^m_{(\lambda)}}{d\lambda} + \frac{1}{2}(g^{mi})\left[2(\partial_p g_{ik})u^p_{(\lambda)}u^k_{(\lambda)} - (\partial_i g_{pk})u^p_{(\lambda)}u^k_{(\lambda)}\right] = -\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}\left[d\left(g_{hj}u^h_{(\lambda)}u^j_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]u^m_{(\lambda)}$$

[26] Obviamente las k devienen en m sólo en estos casos.

Esto parecería que no puede estar bien en la vida, que este cambio de índices es absolutamente arbitrario e inconsistente porque, claro, con las letras $h \to p$ y $j \to k$, ok, medio cuela pero parece, casi seguro, que no podríamos usar la letra p así como así, ya que tiene un *conteo* ya comprometido… ¿o no? Efectivamente, si miramos la nota 48 vemos que es una variable, un índice, equiparable a j [27]:



Ya da igual que estén "procesados o no" (en realidad siempre ha dado igual) porque, sencillamente, y esto es lo que nos importa, desempeñan exactamente el mismo role. Por ello, podemos seguir adelante con nuestra propuesta, de manera que ahora podemos sacar factor común del siguiente modo (hemos aprovechado para cambiar los términos, según la convención en el término derecho de la expresión aunque, como veremos en breve, no era siquiera necesario):

$$\frac{du^m_{(\lambda)}}{d\lambda} + \frac{1}{2}(g^{mi})[2(\partial_p g_{ik}) - (\partial_i g_{pk})]u^p_{(\lambda)}u^k_{(\lambda)} = -\left(g_{pk}u^p_{(\lambda)}u^k_{(\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{d\left(g_{pk}u^p_{(\lambda)}u^k_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}}}{d\lambda}\right]u^m_{(\lambda)}$$

Para terminar de aproximar nuestra expresión a la forma canónica con que aparece en los manuales vamos a sacar ese 2 que aún queda en la parte que hemos marcado en azul. Realmente, digámoslo así, no sería prácticamente necesario ya que las matrices métricas que vamos a manejar siempre van a ser matrices simétricas y por tanto, este desarrollo no es necesario. Pero ante la eventualidad de que tratemos con espacios muy, muy, muy raros, muy torsionados (en la realidad esto apenas se ve, son más bien experimentos mentales) desarrollemos esto para incluir la posibilidad de métricas no simétricas:

$$2(\partial_p g_{ik}) = \partial_p g_{ik}u^p_{(\lambda)}u^k_{(\lambda)} + \partial_p g_{ik}u^p_{(\lambda)}u^k_{(\lambda)}$$

Que podemos reescribir como (marcamos en rojo los cambios):

$$= \partial_p g_{ik}u^p_{(\lambda)}u^k_{(\lambda)} + \partial_k g_{ip}u^k_{(\lambda)}u^p_{(\lambda)}$$

Puesto que el producto entre $u^k_{(\lambda)}u^p_{(\lambda)}$ es conmutativo, podemos volver a expresarlo como:

$$= \partial_p g_{ik}u^p_{(\lambda)}u^k_{(\lambda)} + \partial_k g_{ip}u^p_{(\lambda)}u^k_{(\lambda)}$$

---

[27] En el esquema vemos claramente que k y p están justo al mismo nivel de dependencia (digamos de grado 1) de i que h y j. Es decir:

- i marcará 1 y k y p se pondrán a contar conmutando entre ellos.
  - $k, p \to (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$ y dará paso al cambio en i…
- i marcará 2 y k y p se pondrán a contar conmutando entre ellos.
  - $k, p \to (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$ y dará paso al cambio en i…
- …y así sucesivamente… (en realidad tantas veces como dimensiones haya, en este caso, dos dimensiones)

Pero, claro, ¿no es justamente eso lo que hacen h y j? Efectivamente, así es. Por ello son índices que podemos intercambiar perfectamente para simplificar nuestra expresión.

Que, finalmente, podremos incluirlo en nuestra expresión global como[28]:

$$\frac{du^m_{(\lambda)}}{d\lambda}+\frac{1}{2}(g^{mi})[\partial_p g_{ik}+\partial_k g_{ip}-\partial_i g_{pk}]u^p_{(\lambda)}u^k_{(\lambda)}=-\left(g_{pk}u^p_{(\lambda)}u^k_{(\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{d\left(g_{pk}u^p_{(\lambda)}u^k_{(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{2}}}{d\lambda}\right]u^m_{(\lambda)}$$

Y ahora, finalmente, vamos a ver qué hacemos con el término que tenemos en la derecha. Vamos anticipando que queremos que sea cero y, para ello, basta con que consigamos que el elemento que hemos marcado en rojo sea una constante de manera que la derivada, respecto a lambda, de dicha constante sea cero y, por lo tanto, anule del todo el término derecho.

Para conseguir que dicho elemento sea una constante, más concretamente: 1, basta con encontrar una parametrización específica para ello.

Ya dijimos, en su momento, que podríamos parametrizar las curvas del modo que nos viniera en gana. Ello arrojaría, sencillamente, una integral más o menos compleja. Sin embargo, existe un modo de parametrización que garantiza que la expresión de la curva sea 1. Digamos una parametrización que se adapta, se amolda a la función para que sea 1[29]. Cuando se hace una parametrización tan feliz, en vez de lambda o cualquier otro símbolo que elijamos, se suele usar la letra s, de manera que nuestra expresión global quedaría del siguiente modo:

$$\frac{du^m_{(\lambda)}}{dS}+\frac{1}{2}(g^{mi})[\partial_p g_{ik}+\partial_k g_{ip}-\partial_i g_{pk}]u^p_{(\lambda)}u^k_{(\lambda)}=-\left(g_{pk}u^p_{(\lambda)}u^k_{(\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{d(1)^{-\frac{1}{2}}}{dS}\right]u^m_{(\lambda)}$$

Y, claro, la derivada que queda en el corchete es cero y, por lo tanto, ya hemos conseguido llegar a[30]:

$$\frac{du^m_{(\lambda)}}{ds}+\frac{1}{2}(g^{mi})[\partial_p g_{ik}+\partial_k g_{ip}-\partial_i g_{pk}]u^p_{(\lambda)}u^k_{(\lambda)}=0$$

Que, finalmente, es la fucking ecuación de una Geodésica.

---

[28] Observemos que, efectivamente, la matriz aparece en sus dos versiones para suponer, si es el caso, la no simetría.

[29] Insertar nota 8.59:00

[30] No se ha hecho nada raro. Sencillamente, hemos parametrizado, hemos mirado el problema desde el punto de vista que tiene la solución más fácil para, así, alcanzar la forma genérica que podamos aplicar a casos más complicados. Si no parametrizamos 'felizmente' en el lado derecho nos saldrá un tocho de algo pero, claro, si antes nos lo curramos y parametrizamos de la manera apropiada, llegaremos a una expresión mucho más fácil. Es como cuando se integra por partes y se eligen las variables más favorables para que la integral final sea más abordable.
Si cuando se parametriza, digamos, al azar con un parámetro lambda, los cambios en lambda no tienen porqué implicar el mismo cambio en la variable original. Digamos que el parámetro puede tener una especie de *orientación arbitraria*. Sin embargo, cuando parametrizamos 'felizmente' lo que hemos hecho es alinear la parametrización de manera que ésta esté como alineada, orientada del mismo modo que el cambio de la variable parametrizada de manera que un cambio en lambda (en realidad ya sería 'S') implicaría el mismo cambio en la variable parametrizada.

Vamos a realizar un ejercicio para ver qué tal funciona todo esto. Supongamos un espacio bidimensional con métrica:

$$g_{im} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$$

$$a = 1 + \frac{b}{y}$$

¿Cuál la expresión para una Geodésica en este espacio?

$$\frac{du^m_{(b)}}{ds} + \frac{1}{2}(g^{mi})[\partial_p g_{ik} + \partial_k g_{ip} - \partial_i g_{pk}]u^p_{(b)}u^k_{(b)} = 0$$

Veamos, en primer lugar simplifiquemos la métrica y calculemos su inversa:

$$g_{im} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \quad g^{mi} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

¿Qué combinaciones de índices pueden subsistir en la siguiente expresión?

$$\frac{du^m_{(b)}}{ds} + \frac{1}{2}(g^{mi})[\partial_p g_{ik} + \partial_k g_{ip} - \partial_i g_{pk}]u^p_{(b)}u^k_{(b)} = 0$$

Veamos las diferentes combinaciones de índices posibles.

Las variables que, digamos, marcan el ritmo de cambio, las que 'desencadenan las hostilidades' son m e i.

Para los casos en que $m \neq i$, si nos fijamos en la matriz métrica, vemos que es obvio que el sumando derecho de nuestra expresión queda anulado por estar multiplicado por cero. En tales casos, la expresión quedará como:

$$\frac{du^m_{(b)}}{dS} = 0$$

Ya haremos algún desarrollo adicional de esto pero, de momento, nos basta. Dirijamos nuestra atención hacia terrenos más sugestivos: los casos en que $m = i$. Centrémonos en la parte más *compleja* de la expresión:

$$[\partial_p g_{ik} + \partial_k g_{ip} - \partial_i g_{pk}]$$

- $m = 1, i = 1.$
  - $p = 1, k = 1 \rightarrow [\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}]$
    Sobrevive:

    $$\partial_1 g_{11}$$

    Donde ∂_1 es la derivada respecto a x^1, que es x, y sabemos que ningun término de la métrica está en función de x por lo que será todo igual a cero:

    $$\partial_1 g_{11} = \frac{\partial(g_{11})}{\partial x^1} = \frac{\partial\left(-1 - \frac{b}{y}\right)}{\partial x} = 0$$

  - $p = 1, k = 2 \rightarrow [\partial_1 g_{12} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}]$
    Aquí, el único que sobrevive es el que hemos marcado en rojo:

    $$\partial_2 g_{11} = \frac{\partial(g_{11})}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(-1 - \frac{b}{y}\right)}{\partial y} = \frac{b}{y^2}$$

- $p = 2, k = 1 \rightarrow [\partial_2 g_{11} + \partial_1 g_{12} - \partial_1 g_{21}]$
  Lo único que sobrevive es lo rojo:

$$\partial_2 g_{11} = \frac{\partial\left(-1 - \frac{b}{y}\right)}{\partial y} = \frac{b}{y^2}$$

- $p = 2, k = 2 \rightarrow [\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}]$
  Sobrevive:

$$-\partial_1 g_{22} = \frac{-\partial(g_{22})}{\partial x^1} = \frac{-\partial\left(\frac{1}{\left(1 + \frac{b}{y}\right)}\right)}{\partial x} = 0$$

Sabemos que estamos en dos dimensiones. Desarrollemos, ya que estamos, el caso para $x^1_{(b)} \rightarrow x_{(b)}$ (no olvidemos que $x_{(b)}$ es una una función de b….e y…).

Recordemos la expresión (suma de Einstein):

$$\frac{du^1_{(b)}}{ds} + \frac{1}{2}(g^{11})[\partial_p g_{ik} + \partial_k g_{ip} - \partial_i g_{pk}]u^p_{(b)}u^k_{(b)} = 0$$

Tenemos que meter, provisionalmente las $u^p_{(\lambda)}u^k_{(\lambda)}$ para responder a la casuística (nada casual, por otro lado) en que estaban sus valores cuando los términos han sobrevivido:

$$\frac{du^1_{(b)}}{ds} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a}\right)[\partial_2 g_{11}u^1_{(b)}u^2_{(b)} + \partial_2 g_{11}u^2_{(b)}u^1_{(b)}] = 0$$

El producto $u^1_{(b)}u^2_{(b)}$ es conmutativo, por lo que:

$$\frac{du^1_{(b)}}{ds} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a}\right)[\partial_2 g_{11}u^1_{(b)}u^2_{(b)} + \partial_2 g_{11}u^1_{(b)}u^2_{(b)}] = 0$$

$$\frac{du^1_{(b)}}{ds} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a}\right)[2\partial_2 g_{11}u^1_{(b)}u^2_{(b)}] = 0$$

$$\frac{du^1_{(b)}}{ds} - \frac{1}{a}\frac{\partial(g_{11})}{\partial x^2}u^1_{(b)}u^2_{(b)} = 0$$

$$\frac{du^1_{(b)}}{ds} - \frac{1}{a}\frac{\partial(-a)}{\partial x^2}u^1_{(b)}u^2_{(b)} = 0$$

$$\frac{du^m_{(b)}}{ds} - \frac{1}{a}\frac{b}{y^2}u^1_{(b)}u^2_{(b)} = 0$$

$$\frac{du^m_{(b)}}{ds} - \left(\frac{1}{1 + \frac{b}{y}}\right)\left(\frac{b}{y^2}\right)u^1_{(b)}u^2_{(b)} = 0$$

$$\frac{du^1_{(b)}}{ds} - \frac{b}{y^2 + by}u^1_{(b)}u^2_{(b)} = 0$$

Recordemos ahora que[31]:

[31] No olvidemos que ds es una parametrización ultrafeliz. Será algún tocho del tipo (esto nos lo inventamos con el único fin de ilustrar la parametrización):

$$x = 2b - \sqrt[y]{49y}$$

En este caso no nos interesa lo que sea. Sólo que arroja una expresión de la geodésica igualada a cero:

$$\frac{du^1_{(b)}}{ds} + \frac{1}{2}(g^{11})[\partial_p g_{ik} + \partial_k g_{ip} - \partial_i g_{pk}]u^p_{(b)}u^k_{(b)} = 0$$

$$u^1_{(b)} = \frac{dx^1_{(b)}}{ds} = \frac{dx}{ds} \qquad u^2_{(b)} = \frac{dx^2_{(b)}}{ds} = \frac{dy}{ds}$$

Y que:

$$\frac{du^1_{(b)}}{ds} = \frac{d\left(\frac{dx^1_{(b)}}{ds}\right)}{ds} \rightarrow \frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right)$$

Es decir, la derivada segunda de x:

$$\frac{d^2x}{ds}$$

Luego, finalmente, para la componente en x, nuestra expresión de la geodésica:

$$\frac{du^1_{(b)}}{ds} + \frac{1}{2}(g^{11})[\partial_p g_{ik} + \partial_k g_{ip} - \partial_i g_{pk}]u^p_{(b)}u^k_{(b)} = 0$$

Queda como:

$$\frac{d^2x}{ds} - \frac{b}{y^2 + by}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} = 0$$

Que también puede ser expresado como:

$$\boxed{\ddot{x} - \frac{b}{y^2 + by}\dot{x}\dot{y} = 0}$$

Vamos ahora con la componente $x^2_{(b)}$, es decir: y.

$$\frac{du^2_{(b)}}{ds} + \frac{1}{2}(g^{22})[\partial_p g_{ik} + \partial_k g_{ip} - \partial_i g_{pk}]u^p_{(b)}u^k_{(b)} = 0$$

$$[\partial_p g_{ik} + \partial_k g_{ip} - \partial_i g_{pk}]$$

- $m = 2, i = 2.$
  - $p = 1, k = 1 \rightarrow [\partial_1 g_{21} + \partial_1 g_{21} - \partial_2 g_{11}]$
    Sobrevive:
    $$-\partial_2 g_{11} = \frac{-\partial\left(1 + \frac{b}{y}\right)}{\partial y} = \frac{b}{y^2}$$
  - $p = 1, k = 2 \rightarrow [\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12}]$
    Aquí, el único que sobrevive es el que hemos marcado en rojo:
    $$\partial_1 g_{22} = \frac{\partial(g_{22})}{\partial x^1} = \frac{-\partial\left(\frac{1}{\left(1 + \frac{b}{y}\right)}\right)}{\partial x} = 0$$
  - $p = 2, k = 1 \rightarrow [\partial_2 g_{21} + \partial_1 g_{22} - \partial_2 g_{21}]$
    Lo único que sobrevive es lo rojo:
    $$\partial_1 g_{22} = \frac{\partial(g_{22})}{\partial x^1} = \frac{-\partial\left(\frac{1}{\left(1 + \frac{b}{y}\right)}\right)}{\partial x} = 0$$

- $p = 2, k = 2 \rightarrow [\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}]$
  Sobrevive:

$$\partial_2 g_{22} = \frac{\partial(g_{22})}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{1}{\left(1+\frac{b}{y}\right)}\right)}{\partial y} = \frac{b}{(b+y)^2}$$

Es decir, que nuestra expresión:

$$\frac{du^2_{(b)}}{ds} + \frac{1}{2}(g^{22})[\partial_p g_{ik} + \partial_k g_{ip} - \partial_i g_{pk}]u^p_{(b)}u^k_{(b)} = 0$$

Se va transformando en:

$$\frac{du^2_{(b)}}{ds} + \frac{1}{2}(g^{22})[\partial_2 g_{22}u^2_{(b)}u^2_{(b)} + (-\partial_2 g_{11})u^1_{(b)}u^1_{(b)}] = 0$$

$$\frac{du^2_{(b)}}{ds} + \frac{1}{2}(a)\left[\left(\frac{b}{(b+y)^2}\right)u^2_{(b)}u^2_{(b)} + \left(\frac{b}{y^2}\right)u^1_{(b)}u^1_{(b)}\right] = 0$$

$$\frac{du^2_{(b)}}{ds} + \frac{\left(1+\frac{b}{y}\right)}{2}\left[\left(\frac{b}{(b+y)^2}\right)(u^2_{(b)})^2 + \left(\frac{b}{y^2}\right)(u^1_{(b)})^2\right] = 0$$

$$\boxed{\ddot{y} + \frac{\left(1+\frac{b}{y}\right)}{2}\left[\left(\frac{b}{(b+y)^2}\right)(\dot{y})^2 + \left(\frac{b}{y^2}\right)(\dot{x})^2\right] = 0}$$

-2.4-

Herramientas para el estudio del cambio en espacios curvos.

Derivada Covariante. Transportes paralelos. Derivada de Lie.

$\int$

Antes de proceder a desarrollar el concepto que abordaremos en el presente capítulo definamos en qué consiste eso de "Transportes paralelos". Para ello vamos a imaginar tres escenarios.

1- Un espacio de tres dimensiones tabulado, medido, mediante una cuadrícula cartesiana, es decir, el espacio tridimensional euclídeo de toda la vida.
Si en dicho espacio trazamos un vector unidad apuntando, por ejemplo, hacia arriba, en la dirección z, con origen en la coordenada (0,0,0) y cabeza en la coordenada (0,0,1) y, a continuación, quisiéramos desplazarlo a otro punto de manera que conserve su orientación, tan sólo tendríamos que mover la coordenada de inicio y la coordenada final nos resultará perfectamente predecible… totalmente intuitiva. Por ejemplo, si movemos el origen del vector a la coordenada (1,1,1), la cabeza del vector acabará en (1,1,2), manteniendo el paralelismo con el vector en su posición original. Este escenario ya lo conocemos bien, es intuitivo y no requerirá nuestra atención en este capítulo debido, a priori, a su trivialidad.

2- Espacio de tres dimensiones pero esta vez medido mediante un sistema de coordenadas esféricas. Importante, porque la representación gráfica nos puede jugar una mala pasada: el espacio es 3D pero el sistema de coordenadas que usamos es el de coordenadas esféricas en el que r, θ, φ son los parámetros con que definiremos las coordenadas iniciales y finales de los vectores. Para visualizar lo que decimos, imaginemos un vector unidad cuyo origen esté en $(0,0,0)$ (ángulos θ y φ medidos en radianes) y cuya cabeza acabe en $(1,0,0)$ y ahora desplacemos de manera paralela el origen del vector, por ejemplo, a una coordenada $(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})$. Efectivamente la cosa ahora no es tan intuitiva porque, efectivamente, la "rectitud" del vector podemos imaginarla (en definitiva lo movemos, como en el escenario (a), de manera que conservemos el paralelismo con el vector en su posición inicial) pero, en cambio, las coordenadas se han ido "torciendo" según sea la región del espacio en que estemos por lo que el cálculo de las nueva coordenada final del vector no será tan intuitivo como en el modelo euclídeo. En este caso, y lo veremos también en este capítulo, para poder conservar el paralelismo del vector tendremos que estudiar un poco cómo cambian las coordenadas según nos movamos según una "rectitud euclídea" bajo una "malla curva". Algebraicamente es fácil…. Pero hay que ponerse, ya no es tan a ojo como en el casi de la cuadrícula recta-euclídea.

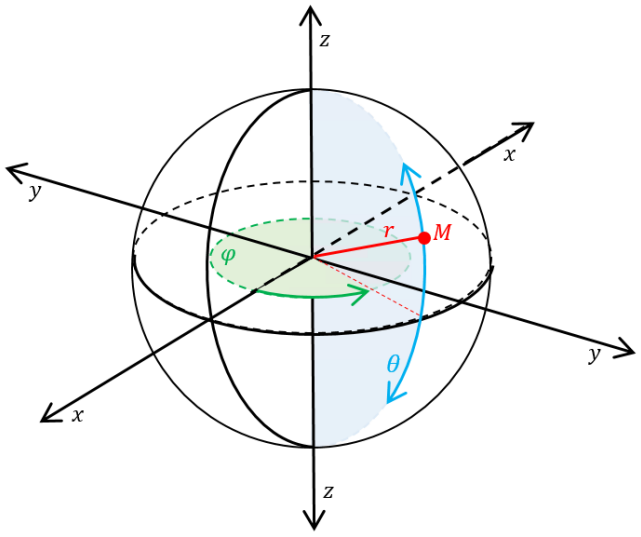
3- Antes de exponer el siguiente escenario es necesario añadir un matiz muy importante que debemos considerar. Ciertamente, nosotros que estamos conversando a través del presente texto, estamos desempeñando, la mayoría de las veces, varios roles, en este caso: a) el rol de una persona que vive inserta en la superficie bidimensional curva de una esfera (en la cáscara bidimensional que mencionaremos en este punto) pero, por otro lado, también somos

capaces de desempeñar un rol b) el de un observador omnisciente que, fuera de la superficie de la esfera es capaz de percibir las cosas desde un punto de vista cartesiano 3D. En la mayoría de los manuales consultados se salta de una visión a otra sin avisar desde dónde se "está hablando" y ello es fuente de numerosas confusiones. Estemos atentos a esta circunstancia. Así, cuando miremos como un habitante de dicho espacio curvo de dos dimensiones curvo, estaremos insertos en la superficie de la esfera. Estaremos presos, por decirlo de alguna manera, en la cáscara de una naranja. El espacio, en sí, es curvo y, ojo, de dos dimensiones. Aquí ser paralelo implica cosas un poco extrañas. Salgámonos de ese rol y situémonos en el rol de un observador 3d omnisciente: para que un vector sea realmente paralelo (es decir, que visto desde fuera, un observador externo, pueda decir que el vector 'puro' se está moviendo paralelamente) implica que, desde dentro de la superficie el vector (o mejor, su proyección en la superficie) debe comportarse de una manera determinada. Ya lo veremos con más detalle más adelante pero, en definitiva, para que un vector sea paralelo realmente (visto desde fuera) desde dentro tendrá un comportamiento determinado. En este caso (cuando estemos tratando de interpretar qué ve un esferalandero) seguiremos usando las coordenadas esféricas, muy útiles y ahorrativas para estos casos, pero, por ejemplo, la dimensión r, quedará bloqueada, pues no podemos alejarnos o acercarnos al centro: estamos atrapados en la superficie. Éste es el transporte paralelo que nos interesa especialmente en este capítulo, tal y como vamos a ver.

Vamos a empezar a abordar el escenario (b). A lo largo del capítulo podríamos llegar a tener la sensación de que estamos hablando del escenario (c) pero, mantengámonos firmes: mientras no avisemos de lo contrario, seguiremos en el escenario (b).

Para empezar es necesario que antes tengamos en mente el sistema y funcionamiento de las coordenadas esféricas. Para ello nos basta con retrotraernos al Capítulo 1.3 del Liber Primvs, nota 41. Recordemos que en un Sistema de Coordenadas Esféricas tenemos tres variables a considerar:

- El radio r, cuya longitud puede oscilar entre $(0, \infty)$.
- El ángulo θ, cuyo recorrido es [0º,180º] (en radianes $(0,\pi)$).
- El ángulo φ, cuyo recorrido es [0,360] (en radianes $(0,2\pi)$).



Por otro lado, la relación, la transformación que hay entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas esféricas son las que se recogen a continuación (ya se demostraron en el Liber Primvs):

$$x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi$$

$$y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$$

$$z = r \cdot \cos\theta$$

Esta transformación, para obtener los vectores de la base del espacio vectorial en coordenadas esféricas según una combinación lineal de la base cartesiana, podemos expresarla de manera genérica del siguiente modo:

$$e_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial \alpha} e_{x^i} \quad \text{donde} \quad \alpha \text{ recorre los valores: } r, \theta, \varphi$$

Es decir:

$$e_\alpha = \frac{\partial x^1}{\partial \alpha} e_{x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial \alpha} e_{x^2} + \frac{\partial x^3}{\partial \alpha} e_{x^3} \rightarrow e_r = \frac{\partial x}{\partial r} e_x + \frac{\partial y}{\partial r} e_y + \frac{\partial z}{\partial r} e_z$$

$$e_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} e_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} e_y + \frac{\partial z}{\partial \theta} e_z$$

$$e_\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi} e_x + \frac{\partial y}{\partial \varphi} e_y + \frac{\partial z}{\partial \varphi} e_z$$

Veamos, ahora, cómo funcionan estas transformaciones en directo. Calculemos los vectores base de un espacio vectorial en coordenadas esféricas. Sabiendo que:

$$x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi$$

$$y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$$

$$z = r \cdot \cos\theta$$

- $e_r = \frac{\partial x}{\partial r} e_x + \frac{\partial y}{\partial r} e_y + \frac{\partial z}{\partial r} e_z$

$$e_r = \frac{\partial (r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi)}{\partial r} e_x + \frac{\partial (r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi)}{\partial r} e_y + \frac{\partial (r \cdot \cos\theta)}{\partial r} e_z$$

$$e_r = \sin\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_x + \sin\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_y + \cos\theta \;\; e_z$$

- $e_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} e_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} e_y + \frac{\partial z}{\partial \theta} e_z$

$$e_\theta = \frac{\partial (r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi)}{\partial \theta} e_x + \frac{\partial (r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi)}{\partial \theta} e_y + \frac{\partial (r \cdot \cos\theta)}{\partial \theta} e_z$$

$$e_\theta = r \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_x + r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_y + r \cdot (-\sin\theta) \;\; e_z$$

$$e_\theta = r \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_x + r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_y - r \cdot \sin\theta \;\; e_z$$

- $e_\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi} e_x + \frac{\partial y}{\partial \varphi} e_y + \frac{\partial z}{\partial \varphi} e_z$

$$e_\varphi = \frac{\partial (r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi)}{\partial \varphi} e_x + \frac{\partial (r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi)}{\partial \varphi} e_y + \frac{\partial (r \cdot \cos\theta)}{\partial \varphi} e_z$$

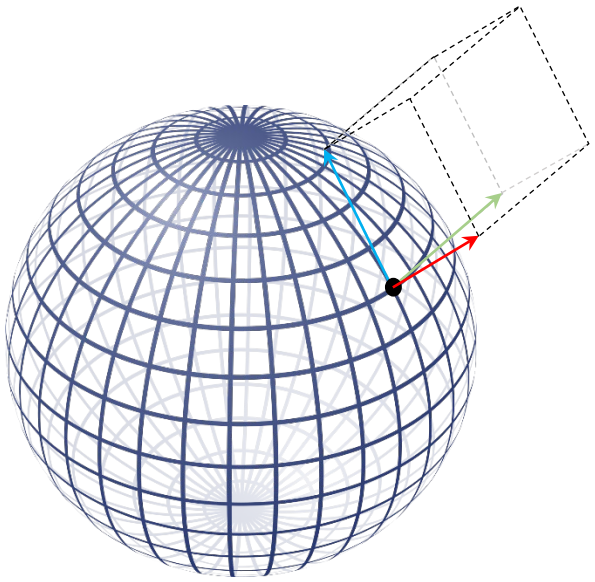
$$e_\varphi = r \cdot \sin\theta \cdot (-\sin\varphi)\ \ e_x + r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi\ \ e_y + 0\ \ e_z$$

$$e_\varphi = -r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi\ \ e_x + r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi\ \ e_y$$

(OBSERVACIÓN. Obviamente se trata de una base coordenada, es decir, que cambiará según sea el punto, la coordenada, en la que se mire. Es cierto que la base e_r es constante ante el cambio de r pero… recordemos, cuando nos movemos arbitrariamente, lo normal es que no sólo cambie r, sino que también lo hagan el resto de coordenadas que, como vemos, producen cambios en los vectores de la base)

Es decir, ya podemos expresar la "base esférica" de nuestro espacio vectorial mediante una combinación lineal de los vectores de la "base cartesiana". Una cuestión muy importante a tener en consideración en esta nueva base esférica es que se trata de una ***base coordenada***, es decir, una base que cambia según sea la coordenada donde se mire. Veámoslo con más detalle.

Los vectores base, situados en un espacio tridimensional, tendrían una disposición como la siguiente:



(OBSERVACIÓN. Dicha base no tiene porqué estar en "superficie". Lo hemos puesto así para que se vislumbre bien pero recordemos que, de momento, no estamos en una superficie de dos dimensiones curva, sino en un espacio tridimensional tabulado mediante coordenadas esféricas, es decir, el vector podría estar perfectamente más hacia dentro o hacia fuera de la esfera que hemos dibujado, pero en este caso sólo hemos representado una de sus capas, como su fuera una cebolla. Sólo representamos la "capa externa" en la que hemos situado el vector base)

Observemos que cada uno apunta en la dirección del cambio de su coordenada, es decir:

- e_r es perpendicular a la tangente del punto en que toca la ***esfera-capa*** de coordenadas (¡recordemos que aún no estamos en una superficie, que sólo es un modo de hablar para entendernos!) y, por supuesto, está en una línea que pasa por el centro de la *esfera auxiliar*. Su módulo es 1 (bastaría multiplicarlo por sí mismo para comprobarlo, es bastante obvio).
- e_θ es tangente al punto de la *esfera auxiliar* y va, digamos, en la dirección 'polo norte-polo sur'. Su módulo es r (es decir, es más largo que 1, bueno, depende del radio pero, en general, más grande… recordemos que hemos dicho que se trata de una base coordenada, que cambia según la coordenada).
- e_φ es tangente al punto de la *esfera auxiliar* y, digamos, discurre en una dirección 'este-oeste'. Su módulo es $r \sin\theta$ (aquí se ve claramente el carácter coordenado, cambiante, de la base).
    - Veamos el cálculo de su módulo:

$$e_\varphi \cdot e_\varphi = \left(-r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_x + r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_y\right) \cdot \left(-r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_x + r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_y\right)$$

Teniendo en cuenta que:

$$e_x \cdot \; e_x = 1, \;\; e_y \cdot \; e_y = 1 \qquad \text{y} \qquad e_x \cdot \; e_y = 0, \;\; e_y \cdot \; e_x = 0$$

Nos queda que:

$$e_\varphi \cdot e_\varphi = r^2(\sin\theta)^2(\sin\varphi)^2 + r^2(\sin\theta)^2(\cos\varphi)^2$$

$$e_\varphi \cdot e_\varphi = r^2 \sin^2\theta\,[(\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2]$$

$$e_\varphi \cdot e_\varphi = r^2 \sin^2\theta\,(1)$$

$$|e_\varphi| = \sqrt{r^2 \sin^2\theta} = r \sin\theta$$

Ahora pensemos sobre esto: ¿cómo varían estos vectores según sea el punto en el que miremos?

En primer lugar, pensemos en un escenario absolutamente simple: un espacio vectorial, plano, bidimensional, con propiedades euclídeas y con una base cartesiana definida. Como es obvio, los vectores de la base serán exactamente los mismos nos movamos a la coordenada que nos movamos, es decir, que, como e_x (además de e_y, e_z, …) es constante y por lo tanto, tendremos que:

$$\frac{\partial e_{x^i}}{\partial x^j} = 0$$

Ahora vamos a seguir trabajando en un espacio de tres dimensiones, plano, perfectamente euclídeo, no deformado pero, las coordenadas que vamos a usar no son las cartesianas y, por

ello, el comportamiento va a ser diferente pues, de entrada ya sabemos que la base que usemos va a ser coordenada, es decir, va a ser diferente, dependiente de tres parámetros (r, θ, φ), según sea el punto donde miremos. Puede parecer que es más dificultoso: '¿para qué salirnos de las cómodas coordenadas y base cartesianas?'… sin embargo, veremos que tras un pequeño esfuerzo inicial, los cálculos de física relativista, que se producen en espacios curvos, se simplificarán notablemente al trabajar en un escenario tridimensional desde un punto de vista esférico. Será más fácil pero nos encontramos, ciertamente, con que perdemos la cómoda 'constancia' de los vectores de la base cartesiana. Ahora, en un sistema de coordenadas esféricas, trabajaremos con una base e_r, e_θ, e_φ que, como decimos, cambiarán su dirección, incluso su módulo en algunos casos, según sea la coordenada en que los busquemos.

Como es obvio, se hace fundamental estudiar el modo en que cambian los vectores de la base analizando sus derivadas, sus 'ratios de cambio'. Veamos.

- ¿Cuál es el comportamiento de e_r …

  - …cuando cambia la coordenada r?

    $$\frac{\partial e_r}{\partial r} = \frac{\partial\left(\sin\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_x + \sin\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_y + \cos\theta \;\; e_z\right)}{\partial r} = 0$$

    Es decir, que vemos que e_r es constante ante cambios de la coordenada r (el numerador no tiene nada en función de r).

  - …cuando cambia θ?

    $$\frac{\partial e_r}{\partial \theta} = \frac{\left(\sin\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_x + \sin\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_y + \cos\theta \;\; e_z\right)}{\partial \theta}$$

    $$\frac{\partial e_r}{\partial \theta} = \cos\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_x + \cos\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_y - \sin\theta \;\; e_z$$

  - …cuando cambia φ?

    $$\frac{\partial e_r}{\partial \varphi} = \frac{\left(\sin\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_x + \sin\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_y + \cos\theta \;\; e_z\right)}{\partial \theta}$$

    $$\frac{\partial e_r}{\partial \varphi} = -\sin\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_x + \sin\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_y + 0 \;\; e_z$$

Y ya tendríamos definido e_r. Sin embargo, antes de proseguir, hay algo que nos incomoda: que dicha base, digamos esférica, sigue expresada en función de la base cartesiana. Realmente, no hay problema con ello pero, ¿por qué no trabajar directamente ya en el mundo esférico? ¿Cómo podríamos expresar la base esférica en función de ella misma? Pues recurriendo a su

base dual[103]. Y, para construir la base dual, recordemos, necesitamos conocer la métrica del espacio. Procedamos.

Recordemos que estamos en un espacio tridimensional, euclídeo y, por lo tanto, podríamos estar tentados a decir que la métrica es:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero, recordemos: no estamos usando la base cartesiana, sino la base *alternativa* esférica $g_{i'j'}$ [104]. Así, nuestra base será (usamos ya la notación comentada en la nota anterior):

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} e_r e_r & e_r e_\theta & e_r e_\varphi \\ e_\theta e_r & e_\theta e_\theta & e_\theta e_\varphi \\ e_\varphi e_r & e_\varphi e_\theta & e_\varphi e_\varphi \end{pmatrix}$$

Esto que vamos a hacer ahora es absolutamente simple aunque muy tedioso. Hay que hacerlo… alguna vez hay que pegarse estos curros, aunque sea para entretenerse haciendo sudokus. Vamos elemento a elemento.

- $g_{rr}=e_r e_r$

  $= (\sin\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_x + \sin\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_y + \cos\theta \;\; e_z) \cdot (\sin\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_x + \sin\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_y + \cos\theta \;\; e_z)$ [105]

$$= (\sin^2\theta \cdot cos^2\varphi \;\; + \sin^2\theta \cdot \sin^2\varphi \;\; + \cos^2\theta \;\;)$$

$$= \sin^2\theta\,(cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\theta$$

$$g_{rr}=e_r e_r = sin^2\theta\,(1) + cos^2\theta \rightarrow sin^2\theta + cos^2\theta = 1$$

---

[103] Veamos alguna otra cosa que podríamos hacer con la Base Dual. Supongamos un vector cualquiera expresado en la base esférica:

$$\vec{A} = 3e_r + 5e_\theta + 7e_\varphi$$

Si multiplicamos en ambos lados de la expresión, por ejemplo, por el vector base dual e^φ:

$$e^\varphi \vec{A} = 3e^\varphi e_r + 5e^\varphi e_\theta + 7e^\varphi e_\varphi$$

Veremos que, por las propiedades de la Base Dual (recordemos su delta de Krönecker):

$$e^\varphi \vec{A} = 3(0) + 5(0) + 7(1)$$

$$e^\varphi \vec{A} = 7$$

Es decir, que multiplicando un vector por una base en su modo dual, obtenemos la componente contravariante de ese vector para esa misma base pero natural.

[104] La métrica construida desde la base *original* sería la cartesiana g_{ij}, la *alternativa* la esférica $g_{i'j'}$ y la base *alternativa dual* $g^{i'j'}$. Sin embargo, para no andarnos con tantos índices primados vamos a olvidarnos de la base cartesiana. Directamente hemos nacido en el mundo de coordenadas esféricas y por lo tanto, la métrica construida con la base natural esférica será g_{ij}, ya sin primas. Es, en definitiva, nuestra base natural: la primera que nos encontramos 'al abrir los ojos en nuestro mundo de coordenadas esféricas'.

[105] Recordemos las deltas de Krönecker y cómo sólo sobreviven bases que se multiplican por sí mismas. Las que son diferentes se anulan en 0.

- $g_{r\theta}=e_r e_\theta$

$$= (\sin\theta\cdot\cos\varphi\ \ e_x+\sin\theta\cdot\sin\varphi\ \ e_y+\cos\theta\ \ e_z)\cdot(r\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi\ \ e_x+r\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi\ \ e_y-r\cdot\sin\theta\ \ e_z)$$

$$= (r\cdot\cos\theta\cdot cos^2\varphi\cdot\sin\theta)+(r\cdot\cos\theta\cdot sin^2\varphi\cdot\sin\theta)-(r\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta)$$

$$= r\cdot\cos\theta\sin\theta\,[(cos^2\varphi)+(sin^2\varphi)-(1)]$$ [106]

$$= r\cdot\cos\theta\sin\theta\,[0]$$

$$g_{r\theta}=e_r e_\theta = 0$$

(OBSERVACIÓN. El resto lo hacemos como sudoku en la playa. Ha sido ideal para echar el rato)

- $g_{r\varphi}=e_r e_\varphi$

$$= (\sin\theta\cdot\cos\varphi\ \ e_x+\sin\theta\cdot\sin\varphi\ \ e_y+\cos\theta\ \ e_z)\cdot(-r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi\ \ e_x+r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi\ \ e_y)$$

$$= (-r\cdot sin^2\,\theta\cdot cos^2\,\varphi)+(r\cdot sin^2\,\theta\cdot cos^2\,\varphi)=0$$

$$g_{r\varphi}=e_r e_\varphi = 0$$

- $g_{\theta r}=e_\theta e_r = e_r e_\theta = 0$

- $g_{\theta\theta}=e_\theta e_\theta$

$$= (r\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi\ \ e_x+r\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi\ \ e_y-r\cdot\sin\theta\ \ e_z)\cdot(r\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi\ \ e_x+r\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi\ \ e_y-r\cdot\sin\theta\ \ e_z)$$

$$= r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi+r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi+r^2\sin^2\theta$$

$$= r^2\cos^2\theta[\cos^2\varphi+\sin^2\varphi]+r^2\sin^2\theta$$

$$= r^2\cos^2\theta[1]+r^2\sin^2\theta$$

$$= r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta$$

$$= r^2[\cos^2\theta+\sin^2\theta]$$

$$= r^2[1]$$

$$g_{\theta\theta}=e_\theta e_\theta = r^2$$

[106] No hace falta indicar que hemos sacado factor común: $r\cdot\cos\theta\sin\theta$…¿o sí? XD.

- $g_{\theta\varphi}=e_\theta e_\varphi$

$$= (r\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi\ \ e_x + r\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi\ \ e_y - r\cdot\sin\theta\ \ e_z)\cdot(-r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi\ \ e_x + r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi\ \ e_y)$$

$$= -r^2 sin\theta cos\theta sin\varphi cos\varphi + r^2 sin\theta cos\theta sin\varphi cos\varphi = 0$$

$$g_{\theta\varphi}=e_\theta e_\varphi = 0$$

- $g_{\varphi r}=e_\varphi e_r = e_r e_\varphi = 0$

- $g_{\varphi\theta}=e_\varphi e_\theta = e_\theta e_\varphi = 0$

- $g_{\varphi\varphi}=e_\varphi e_\varphi$

$$= (-r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi\ \ e_x + r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi\ \ e_y)\cdot(-r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi\ \ e_x + r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi\ \ e_y)$$

$$= r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi$$

$$= r^2\sin^2\theta[\sin^2\varphi + \cos^2\varphi]$$

$$= r^2\sin^2\theta[1]$$

$$g_{\varphi\varphi}=e_\varphi e_\varphi = r^2\sin^2\theta$$

Finalmente, la matriz métrica que nos queda para nuestro espacio euclídeo pero conformado mediante coordenadas esféricas es:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\,sin^2\,\theta \end{pmatrix}$$

Y su inversa (podemos calcularlo mediante cualquier software al uso):

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^1\!/_{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & {}^1\!/_{(r^2\,sin^2\,\theta)} \end{pmatrix}$$

Ahora, si queremos calcular los vectores de la base dual, recordemos (lo vimos en su capítulo específico) que:

$$e^i = g^{ij}e_j$$

Es decir, que podemos construir los vectores de la Base Dual mediante una combinación lineal de los vectores de la Base Natural:

$$e^r = g^{rr}e_r + g^{r\theta}e_\theta + g^{r\varphi}e_\varphi$$

$$e^r = 1e_r + 0e_\theta + 0e_\varphi$$

$$e^r = e_r$$

De manera análoga obtengamos el resto de vectores de la base dual expresados según la base natural:

$$e^\theta = g^{\theta r}e_r + g^{\theta\theta}e_\theta + g^{\theta\varphi}e_\varphi$$

$$e^\theta = 0e_r + \left({}^1/_{r^2}\right)e_\theta + 0e_\varphi$$

Y, por último:

$$e^\varphi = g^{\varphi r}e_r + g^{\varphi\theta}e_\theta + g^{\varphi\varphi}e_\varphi$$

$$e^\varphi = 0e_r + 0e_\theta + \frac{1}{(r^2\,sin^2\,\theta)}e_\varphi$$

Así podemos concluir que la relación que hay entre los vectores de la base esférica natural y dual es:

$$e^r = e_r$$

$$e^\theta = \frac{1}{r^2}e_\theta$$

$$e^\varphi = \frac{1}{r^2\,sin^2\,\theta}e_\varphi$$

Con esta nueva información que tenemos, volvamos a estudiar las derivadas, el comportamiento ante el cambio, de los vectores de la ***base natural esférica***. De entrada retomemos la información que nos pueda ser útil:

$$e_r = \sin\theta\cdot\cos\varphi\;\; e_x + \sin\theta\cdot\sin\varphi\;\; e_y + \cos\theta\;\; e_z$$

$$e_\theta = r\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi\;\; e_x + r\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi\;\; e_y - r\cdot\sin\theta\;\; e_z$$

$$e_\varphi = -r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi\;\; e_x + r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi\;\; e_y$$

Ahora retornemos al estudio del cambio por donde íbamos (de hecho, repitamos e_r, aunque ya lo tuvéramos). Calculemos los vectores de la base natural según su misma base:

- ***¿Cuál es el comportamiento de e_r ...***

$$e_r = \sin\theta\cdot\cos\varphi\;\; e_x + \sin\theta\cdot\sin\varphi\;\; e_y + \cos\theta\;\; e_z$$

  - …cuando cambia r?

$$\frac{\partial e_r}{\partial r} = \frac{\partial\left(\sin\theta\cdot\cos\varphi\ \ e_x + \sin\theta\cdot\sin\varphi\ \ e_y + \cos\theta\ \ e_z\right)}{\partial r} = 0$$

Es decir, que e_r es constante ante cambios de r.

- …cuando cambia θ?

$$\frac{\partial e_r}{\partial\theta} = \frac{\left(\sin\theta\cdot\cos\varphi\ \ e_x + \sin\theta\cdot\sin\varphi\ \ e_y + \cos\theta\ \ e_z\right)}{\partial\theta}$$
$$\frac{\partial e_r}{\partial\theta} = \cos\theta\cdot\cos\varphi\ \ e_x + \cos\theta\cdot\sin\varphi\ \ e_y - \sin\theta\ \ e_z$$

Pero, observemos la definición que tenemos de:

$$e_\theta = r\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi\ \ e_x + r\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi\ \ e_y - r\cdot\sin\theta\ \ e_z$$

Es justo la misma pero multiplicada por r, es decir que podríamos hacer algo como esto:

$$\frac{\partial e_r}{\partial\theta} = \frac{1}{r}e_\theta$$

- …cuando cambia φ?

$$\frac{\partial e_r}{\partial\varphi} = \frac{\left(\sin\theta\cdot\cos\varphi\ \ e_x + \sin\theta\cdot\sin\varphi\ \ e_y + \cos\theta\ \ e_z\right)}{\partial\theta}$$
$$\frac{\partial e_r}{\partial\varphi} = -\sin\theta\cdot\sin\varphi\ \ e_x + \sin\theta\cdot\cos\varphi\ \ e_y + 0\ \ e_z$$

Que de nuevo es simplificable gracias a una feliz *coincidencia*:

$$\frac{\partial e_r}{\partial\varphi} = \frac{1}{r}e_\varphi$$

Antes de seguir con el estudio del cambio en el resto de vectores unifiquemos esto que hemos hecho con e_r. Como ya sabemos, podemos hacer una definición: ***la derivada de un vector de la base esférica en base a una coordenada esférica que cambia puede expresarse mediante una combinación lineal de los vectores de la base esférica*** *(como es perfectamente normal).*

$$\frac{\partial e_r}{\partial r} = \Gamma^r_{rr}e_r + \Gamma^\theta_{rr}e_\theta + \Gamma^\varphi_{rr}e_\varphi$$

Como sabemos que:

$$\frac{\partial e_r}{\partial r} = 0$$

Necesariamente:

$$\Gamma^r_{rr} = 0 \quad // \quad \Gamma^\theta_{rr} = 0 \quad // \quad \Gamma^\varphi_{rr} = 0$$

(OBSERVACIÓN. A estas Gammas se las llama ***Símbolo de Christoffel****)*

Simétricamente:

$$\frac{\partial e_r}{\partial \theta} = \Gamma^r_{r\theta} e_r + \Gamma^\theta_{r\theta} e_\theta + \Gamma^\varphi_{r\theta} e_\varphi$$

Y sabemos que:

$$\frac{\partial e_r}{\partial \theta} = \frac{1}{r} e_\theta$$

Luego:

$$\Gamma^r_{r\theta} = 0 \quad // \quad \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r} \quad // \quad \Gamma^\varphi_{r\theta} = 0$$

E igualmente:

$$\frac{\partial e_r}{\partial \varphi} = \Gamma^r_{r\varphi} e_r + \Gamma^\theta_{r\varphi} e_\theta + \Gamma^\varphi_{r\varphi} e_\varphi$$

Sabiendo que:

$$\frac{\partial e_r}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} e_\varphi$$

Luego:

$$\Gamma^r_{r\varphi} = 0 \quad // \quad \Gamma^\theta_{r\varphi} = 0 \quad // \quad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}$$

Sigamos con el estudio del cambio por donde íbamos.

- *¿Cuál es el comportamiento de e_θ …*

$$e_\theta = r \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \quad e_x + r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \quad e_y - r \cdot \sin\theta \quad e_z$$

  - …cuando cambia r?

$$\frac{\partial e_\theta}{\partial r} = \frac{\partial\left(r \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \quad e_x + r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \quad e_y - r \cdot \sin\theta \quad e_z\right)}{\partial r}$$

$$= \cos\theta \cdot \cos\varphi \quad e_x + \cos\theta \cdot \sin\varphi \quad e_y - \sin\theta \quad e_z$$

Que, si nos fijamos, es exactamente igual a $\frac{e_\theta}{r}$, de manera que:

$$\frac{\partial e_\theta}{\partial r} = \frac{1}{r} e_\theta$$

$$\frac{\partial e_\theta}{\partial r} = \Gamma^r_{\theta r} e_r + \Gamma^\theta_{\theta r} e_\theta + \Gamma^\varphi_{\theta r} e_\varphi$$

$$\Gamma^r_{\theta r} = 0 \quad // \quad \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r} \quad // \quad \Gamma^\varphi_{\theta r} = 0$$

- …cuando cambia θ?

$$\frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial\left(r \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \quad e_x + r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \quad e_y - r \cdot \sin\theta \quad e_z\right)}{\partial\theta}$$

$$= -\,r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \quad e_x - r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \quad e_y - r \cdot \cos\theta \quad e_z$$

Que justamente es:

$$\frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} = -r e_r$$

$$\frac{\partial e_\theta}{\partial r} = \Gamma^r_{\theta\theta} e_r + \Gamma^\theta_{\theta\theta} e_\theta + \Gamma^\varphi_{\theta\theta} e_\varphi$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r \quad // \quad \Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0 \quad // \quad \Gamma^\varphi_{\theta\theta} = 0$$

- …cuando cambia φ?

$$\frac{\partial e_\theta}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \quad e_x + r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \quad e_y - r \cdot \sin\theta \quad e_z\right)}{\partial\varphi}$$

$$= -r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \quad e_x + r \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \quad e_y$$

Y aquí se nos acabaron las 'felices coincidencias'. Podemos desarrollar esto hasta llegar a una expresión, como deseamos, en función de los vectores de la base esférica pero hay un camino más corto que ya hemos esbozado anteriormente en la nota 103.

Sabemos que $\frac{\partial e_\theta}{\partial \varphi}$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de la base esférica. Y, como decimos, por la nota 103, sabemos el modo de calcular las componentes de esa combinación. Es decir, siendo que:

$$\frac{\partial e_\theta}{\partial \varphi} = \Gamma^r_{\theta\varphi} e_r + \Gamma^\theta_{\theta\varphi} e_\theta + \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} e_\varphi$$

Como decimos, sabemos que si queremos conocer una componente determinada, por ejemplo, de e_φ, bastaría con multiplicar todo el vector por el dual: e^φ[107]. Es decir:

$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = e^{\varphi}\frac{\partial e_\theta}{\partial \varphi}$$

¿Qué necesitamos para mirar todas las componentes de todo el vector resultado de la derivación parcial? Obviamente, en primer lugar, la propia derivada, es decir:

$$\frac{\partial e_\theta}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left(r\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi \quad e_x + r\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi \quad e_y - r\cdot\sin\theta \quad e_z\right)}{\partial\varphi}$$

$$= -r\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi \quad e_x + r\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi \quad e_y$$

Después necesitaremos los diferentes vectores de la base dual para, al multiplicar por el vector $(\frac{\partial e_\theta}{\partial \varphi})$ ya derivado, obtener sus componentes en cada 'dirección'. Veamos: los vectores en su modo covariante, calculados mediante la expresión que ya conocemos ($e^i = g^{ij}e_j$) son:

$$e^r = 1\cdot e_r \rightarrow e^r = sin\,\theta\,cos\,\varphi \quad e_x + sin\,\theta\,sin\,\varphi \quad e_y + cos\,\theta \quad e_z$$

$$e^\theta = {}^1\!/_{r^2}\cdot e_\theta \rightarrow e^\theta = \frac{cos\,\theta\,cos\,\varphi}{r} \quad e_x + \frac{cos\,\theta\,sin\,\varphi}{r} \quad e_y - \frac{sin\,\theta}{r} \quad e_z$$

$$e^\varphi = {}^1\!/_{(r^2\,sin^2\,\theta)}\cdot e_\varphi \rightarrow e^\varphi = \frac{-\,sin\,\varphi}{r\,sin\,\theta} \quad e_x + \frac{cos\,\varphi}{r\,sin\,\theta} \quad e_y$$

Y ahora, multipliquemos $\frac{\partial e_\theta}{\partial \varphi}$ por cada uno de estos vectores para conocer cada una de sus componentes:

$$\Gamma^{r}_{\theta\varphi} = e^{r}\frac{\partial e_\theta}{\partial \varphi}$$

$$= \left(\sin\theta\cos\varphi \quad e_x + \sin\theta\sin\varphi \quad e_y + \cos\theta \quad e_z\right)\left(-r\cos\theta\sin\varphi \quad e_x + r\cos\theta\cos\varphi \quad e_y\right)$$

$$= -r\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi + r\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi$$ [108]

$$\Gamma^{r}_{\theta\varphi} = 0$$

$$\Gamma^{\theta}_{\theta\varphi} = e^{\theta}\frac{\partial e_\theta}{\partial \varphi}$$

[107] Téngase en cuenta que, por la definición misma de la base dual, al multiplicar la base dual por los vectores de la base natural que no sean su correspondiente, se anulará y sólo sobrevivirá, en este caso, phi: $e_\varphi e^\varphi = 1$

[108] Sobra decir que de este producto sólo sobreviven, por las propiedades de una base compuesta por vectores linealmente independientes, los casos $e_i \cdot e_j$ en los que $i = j$.

$$= \left(\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\ e_x + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\ e_y - \frac{\sin\theta}{r}\ e_z\right)\left(-r\cos\theta\sin\varphi\ \ e_x + r\cos\theta\cos\varphi\ \ e_y\right)$$

$$= -r\cos\theta\cos\varphi\cos\theta\cdot\sin\varphi + \cos\theta\sin\varphi\cos\theta\cdot\cos\varphi$$

$$\Gamma^{\theta}_{\theta\varphi} = 0$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = e^{\varphi}\frac{\partial e_\theta}{\partial\varphi}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \left(\frac{\cos\varphi\ \ e_y}{r\sin\theta} - \frac{\sin\varphi\ \ e_x}{r\sin\theta}\right)\left(-r\cos\theta\sin\varphi\ \ e_x + r\cos\theta\cos\varphi\ \ e_y\right)$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \frac{r\cdot\cos\theta\,sin^2\varphi}{r\sin\theta} + \frac{r\cdot\cos\theta\,cos^2\varphi}{r\sin\theta} = \frac{r\cdot\cos\theta}{r\sin\theta}(sin^2\varphi + cos^2\varphi)$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = ctg\theta$$

Es decir que, finalmente, tenemos que:

$$\frac{\partial e_\theta}{\partial\varphi} = \Gamma^{r}_{\theta\varphi}e_r + \Gamma^{\theta}_{\theta\varphi}e_\theta + \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}e_\varphi$$

$$\Gamma^{r}_{\theta\varphi} = 0 \quad // \quad \Gamma^{\theta}_{\theta\varphi} = 0 \quad // \quad \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \cot\theta$$

Sigamos con el estudio del cambio según nuestro hilo principal. Ahora nos toca e_φ.

- *¿Cuál es el comportamiento de e_φ …*

$$e_\varphi = -r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi\ \ e_x + r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi\ \ e_y$$

  - …cuando cambia r?

$$\frac{\partial e_\varphi}{\partial r} = \frac{\partial\left(-r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi\ \ e_x + r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi\ \ e_y\right)}{\partial r}$$

$$= -\sin\theta\cdot\sin\varphi\ \ e_x + \sin\theta\cdot\cos\varphi\ \ e_y$$

$$\frac{\partial e_\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}e_\varphi$$

$$\Gamma^{r}_{\varphi r} = 0 \quad // \quad \Gamma^{\theta}_{\varphi r} = 0 \quad // \quad \Gamma^{\varphi}_{\varphi r} = \frac{1}{r}$$

  - …cuando cambia θ?

$$\frac{\partial e_\varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial\left(-r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_x + r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_y\right)}{\partial\theta}$$

$$= -r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_x + r \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_y$$

De nuevo no tenemos 'coincidencias felices' por lo que procederemos como ya hemos hecho anteriormente: multiplicando por el vector en la base dual en su forma covariante. En primer lugar recopilemos los datos que necesitamos:

$$e_\varphi = -r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_x + r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_y$$

$$\frac{\partial e_\varphi}{\partial \theta} = -r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_x + r \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_y$$

$$e^r = \sin\theta\cos\varphi \;\; e_x + \sin\theta\sin\varphi \;\; e_y + \cos\theta \;\; e_z$$

$$e^\theta = \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} \;\; e_x + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} \;\; e_y - \frac{\sin\theta}{r} \;\; e_z$$

$$e^\varphi = \frac{-\sin\varphi}{r\sin\theta} \;\; e_x + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} \;\; e_y$$

Luego, yendo componente a componente:

$$\frac{\partial e_\varphi}{\partial \theta} = \Gamma^r_{\varphi\theta} e_r + \Gamma^\theta_{\varphi\theta} e_\theta + \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} e_\varphi$$

$$\Gamma^r_{\varphi\theta} = e^r \frac{\partial e_\varphi}{\partial \theta}$$

$$= \left(\sin\theta\cos\varphi \;\; e_x + \sin\theta\sin\varphi \;\; e_y + \cos\theta \;\; e_z\right) \cdot \left(-r\cos\theta\sin\varphi \;\; e_x + r\cos\theta\cos\varphi \;\; e_y\right)$$

$$= -\sin\theta\cos\varphi\, r\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\sin\varphi\, r\cos\theta\cos\varphi$$

$$\Gamma^r_{\varphi\theta} = 0$$

$$\Gamma^\theta_{\varphi\theta} = e^\theta \frac{\partial e_\varphi}{\partial \theta}$$

$$= \left(\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} \;\; e_x + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} \;\; e_y - \frac{\sin\theta}{r} \;\; e_z\right) \cdot \left(-r\cos\theta\sin\varphi \;\; e_x + r\cos\theta\cos\varphi \;\; e_y\right)$$

$$= -cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi + cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\Gamma^\theta_{\varphi\theta} = 0$$

$$\Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = e^\varphi \frac{\partial e_\varphi}{\partial \theta}$$

$$= \left(\frac{-\sin\varphi}{r\sin\theta} \;\; e_x + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} \;\; e_y\right) \cdot \left(-r\cos\theta\sin\varphi \;\; e_x + r\cos\theta\cos\varphi \;\; e_y\right)$$

$$= \frac{\cos\theta\, sin^2\varphi}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta\, cos^2\varphi}{\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}(sin^2\varphi + cos^2\varphi) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}(1)$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \cot\theta$$

Es decir que para $\frac{\partial e_\varphi}{\partial\theta}$, tenemos que las componentes son:

$$\Gamma^{r}_{\varphi\theta} = 0 \quad // \quad \Gamma^{\theta}_{\varphi\theta} = 0 \quad // \quad \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \cot\theta$$

- …cuando cambia φ?

$$\frac{\partial e_\varphi}{\partial\varphi} = \frac{\partial\left(-r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi\ \ e_x + r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi\ \ e_y\right)}{\partial\varphi}$$

$$= -r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi\ \ e_x - r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi\ \ e_y$$

De nuevo estamos sin 'coincidencias felices'… vamos, pues, al lío:

$$\frac{\partial e_\varphi}{\partial\varphi} = \Gamma^{r}_{\varphi\varphi}e_r + \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}e_\theta + \Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi}e_\varphi$$

$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = e^r\frac{\partial e_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$= \left(\sin\theta\cos\varphi\ \ e_x + \sin\theta\sin\varphi\ \ e_y + \cos\theta\ \ e_z\right)\cdot\left(-r\sin\theta\cos\varphi\ \ e_x - r\sin\theta\sin\varphi\ \ e_y\right)$$

$$= -rsin^2\theta cos^2\varphi - rsin^2\theta sin^2\varphi$$

$$= -rsin^2\theta(cos^2\varphi + sin^2\varphi) = -rsin^2\theta(1)$$

$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = -rsin^2\theta$$

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = e^\theta\frac{\partial e_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$= \left(\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\ \ e_x + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\ \ e_y - \frac{\sin\theta}{r}\ \ e_z\right)\cdot\left(-r\sin\theta\cos\varphi\ \ e_x - r\sin\theta\sin\varphi\ \ e_y\right)$$

$$= -\cos\theta\sin\theta\, cos^2\varphi - \cos\theta\sin\theta\, sin^2\varphi$$

$$= -\cos\theta\sin\theta\,(cos^2\varphi + sin^2\varphi) = -\cos\theta\sin\theta\,(1)$$

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\cos\theta\sin\theta$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi} = e^{\varphi}\frac{\partial e_{\varphi}}{\partial \varphi}$$

$$= \left(\frac{-\sin\varphi}{r\sin\theta}\ e_x + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\ e_y\right)\cdot\left(-r\sin\theta\cos\varphi\ \ e_x - r\sin\theta\sin\varphi\ \ e_y\right)$$

$$= \cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi = 0$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi} = 0$$

Es decir que para $\frac{\partial e_{\varphi}}{\partial \varphi}$, tenemos que las componentes son:

$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\theta \quad // \quad \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\cos\theta\sin\theta \quad // \quad \Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi} = 0$$

Veamos conjuntamente todos los valores que hemos obtenido para el cambio de los vectores de la ***base esférica*** de un ***espacio euclídeo*** de ***3 dimensiones*** observado desde un punto de vista de coordenadas esféricas[109]:

- Cambio de e_r:

$$\frac{\partial e_r}{\partial r} = \Gamma^r_{rr} e_r + \Gamma^\theta_{rr} e_\theta + \Gamma^\varphi_{rr} e_\varphi \text{ (lo que cambia } e_r \text{ cuando nos movemos en la coordenada } r)$$

$$\Gamma^r_{rr} = 0 \quad // \quad \Gamma^\theta_{rr} = 0 \quad // \quad \Gamma^\varphi_{rr} = 0$$

$$\frac{\partial e_r}{\partial \theta} = \Gamma^r_{r\theta} e_r + \Gamma^\theta_{r\theta} e_\theta + \Gamma^\varphi_{r\theta} e_\varphi \text{ (lo que cambia } e_r \text{ cuando nos movemos en la coordenada } \theta)$$

$$\Gamma^r_{r\theta} = 0 \quad // \quad \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r} \quad // \quad \Gamma^\varphi_{r\theta} = 0$$

$$\frac{\partial e_r}{\partial \varphi} = \Gamma^r_{r\varphi} e_r + \Gamma^\theta_{r\varphi} e_\theta + \Gamma^\varphi_{r\varphi} e_\varphi \text{ (lo que cambia } e_r \text{ cuando nos movemos en la coordenada } \varphi)$$

$$\Gamma^r_{r\varphi} = 0 \quad // \quad \Gamma^\theta_{r\varphi} = 0 \quad // \quad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}$$

- Cambio de e_θ:

$$\frac{\partial e_\theta}{\partial r} = \Gamma^r_{\theta r} e_r + \Gamma^\theta_{\theta r} e_\theta + \Gamma^\varphi_{\theta r} e_\varphi \text{ (lo que cambia } e_\theta \text{ cuando nos movemos en la coordenada } r)$$

$$\Gamma^r_{\theta r} = 0 \quad // \quad \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r} \quad // \quad \Gamma^\varphi_{\theta r} = 0$$

$$\frac{\partial e_\theta}{\partial r} = \Gamma^r_{\theta\theta} e_r + \Gamma^\theta_{\theta\theta} e_\theta + \Gamma^\varphi_{\theta\theta} e_\varphi \text{ (lo que cambia } e_\theta \text{ cuando nos movemos en la coordenada } \theta)$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r \quad // \quad \Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0 \quad // \quad \Gamma^\varphi_{\theta\theta} = 0$$

$$\frac{\partial e_\theta}{\partial \varphi} = \Gamma^r_{\theta\varphi} e_r + \Gamma^\theta_{\theta\varphi} e_\theta + \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} e_\varphi \text{ (lo que cambia } e_\theta \text{ cuando nos movemos en la coordenada } \varphi)$$

$$\Gamma^r_{\theta\varphi} = 0 \quad // \quad \Gamma^\theta_{\theta\varphi} = 0 \quad // \quad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \cot\theta$$

- Cambio de e_φ:

$$\frac{\partial e_\varphi}{\partial r} = \Gamma^r_{\varphi r} e_r + \Gamma^\theta_{\varphi r} e_\theta + \Gamma^\varphi_{\varphi r} e_\varphi \text{ (lo que cambia } e_\varphi \text{ cuando nos movemos en la coordenada } r)$$

$$\Gamma^r_{\varphi r} = 0 \quad // \quad \Gamma^\theta_{\varphi r} = 0 \quad // \quad \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial e_\varphi}{\partial \theta} = \Gamma^r_{\varphi\theta} e_r + \Gamma^\theta_{\varphi\theta} e_\theta + \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} e_\varphi \text{ (lo que cambia } e_\varphi \text{ cuando nos movemos en la coordenada } \theta)$$

$$\Gamma^r_{\varphi\theta} = 0 \quad // \quad \Gamma^\theta_{\varphi\theta} = 0 \quad // \quad \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \cot\theta$$

$$\frac{\partial e_\varphi}{\partial \varphi} = \Gamma^r_{\varphi\varphi} e_r + \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} e_\theta + \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} e_\varphi \text{ (lo que cambia } e_\varphi \text{ cuando nos movemos en la coordenada } \varphi)$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\theta \quad // \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\cos\theta \sin\theta \quad // \quad \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = 0$$

---

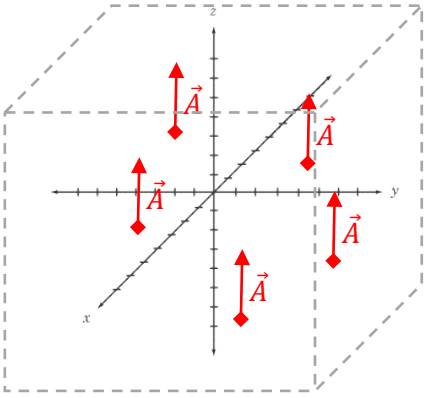
[109] Es interesante observar que, en las Gammas (***Símbolos de Christoffel***)que hemos referenciado, una vez fijado un símbolo arriba la parte de abajo es perfectamente simétrica, dando el mismo resultado.
Por otro lado, a modo de referencia mnemotécnica podemos establecer que:

Veamos una ampliación de esto que acabamos de concluir.

Supongamos un campo vectorial, es decir, una sección de espacio en el que, en cada punto, puedo dibujar un vector según una definición genérica que damos. Por ejemplo, para un espacio R^3, imaginemos un campo vectorial que se define por una expresión general cualquiera como:

$$\vec{A} = 3e_z$$

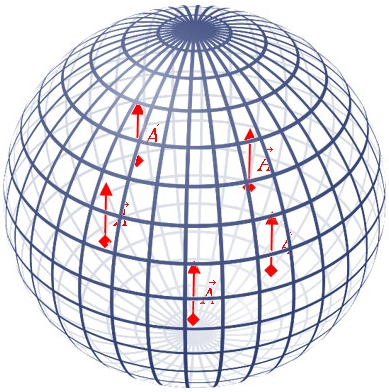
Que podemos poner en cualquier punto de nuestro campo vectorial (en todos los casos el vector es, obviamente, paralelo a su 'réplica'):



En el espacio cartesiano, ante 'problemas cartesianos', el asunto no reviste más problemas. Sin embargo, como sabemos, para problemas de índole relativista va a ser mucho más fácil trabajar con un espacio configurado según coordenadas y bases esféricas, es decir:

- Coordenadas: r, θ, φ
- Base: e_r, e_θ, e_φ

Efectivamente, aún cuando los vectores sean los mismos, ante un cambio de coordenadas, ante un sistema configurado esféricamente, habrá que realizar una redefinición de los mismos ya que la base que usamos es coordenada y, por ello, cambiante según sea el punto del espacio en que apliquemos los vectores:



Pues lo que en el espacio 3d cartesiano era $\vec{A} = 3e_z$, ahora, en el espacio (también euclídeo) de 3 dimensiones pero estructurado según coordendas esféricas /y con una base coordenada esférica), dicho vector tendrá una serie de componentes según la nueva base:

$$\vec{A} = ¿\blacksquare?\, e_r + ¿\blacksquare?\, e_\theta + ¿\blacksquare?\; e_\varphi$$

Y esa base, como decimos, a pesar de que el 'vector original' permanezca constante, va a cambiar (la base). Así, cuando queramos derivar un vector constante, puesto que la base cambia, vamos a encontrar problemas (precisamente por eso, por la variabilidad, no del vector, sino de la base, vamos a necesitar la Derivada Covariante).

Siguiendo con nuestro desarrollo, como ya sabemos que podemos conocer las componentes de cada vector base (dual o natural) multiplicando, simplemente, por la ***Base Contraria*** correspondiente, de manera que:

$$e^r \cdot \vec{A} = ¿\blacksquare?$$

$$e^\theta \cdot \vec{A} = ¿\blacksquare?$$

$$e^\varphi \cdot \vec{A} = ¿\blacksquare?$$

Podemos proceder a calcular las componentes esféricas de $\vec{A}$.

- Componente A^r (o A_r, da igual, puesto que $e^r = e_r$) : $e^r \cdot \vec{A} = ¿\blacksquare?$

  Ya sabemos que en un sistema esférico $e^r = e_r$. Así que, puesto que:

  $$\vec{A} = 0e_x + 0e_y + 3e_z$$

  Podremos proceder a multiplicar por la base contraria a la componente que necesitemos. ¿Qué es e^r (ó e_r)? Aún no lo sabemos, pero podemos suponer que puede expresarse tanto como una combinación lineal de la base esférica como de la base cartesiana. Recordemos cómo la definíamos según la base cartesiana (que es la misma base en que hemos definido el vector genérico $\vec{A}$ del campo A) :

  $$e^r (\text{ó } e_r) = \sin\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_x + \sin\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_y + \cos\theta \;\; e_z$$

  Luego tendremos que:

  $$e^r \cdot \vec{A} = \left(\sin\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_x + \sin\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_y + \cos\theta \;\; e_z\right) \cdot \left(0e_x + 0e_y + 3e_z\right)$$

  Donde lo único que sobrevive es:

  $$e^r \cdot \vec{A} = A^r \rightarrow 3\cos\theta$$

  $$3\cos\theta \cdot \; e_r$$

- Componente A^θ: $e^\theta \cdot \vec{A} = ¿\blacksquare?$

  Conocemos todos los datos que necesitamos:

$$e^{\theta} = \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\ e_x + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\ e_y - \frac{\sin\theta}{r}\ e_z$$

$$e^{\theta}\cdot\vec{A} = \left(\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\ e_x + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\ e_y - \frac{\sin\theta}{r}\ e_z\right)\cdot\left(0e_x + 0e_y + 3e_z\right)$$

Donde lo único que sobrevive es:

$$e^{\theta}\cdot\vec{A} = A^{\theta} \rightarrow -\frac{3\sin\theta}{r}$$
$$-\frac{3\sin\theta}{r}\cdot e_{\theta}$$

- Componente A^{φ}: $e^{\varphi}\cdot\vec{A} =$¿ ■?

$$e^{\varphi} = \left(\frac{-\sin\varphi}{r\sin\theta}\ e_x + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\ e_y\right)$$

Luego:

$$e^{\varphi}\cdot\vec{A} = \left(\frac{-\sin\varphi}{r\sin\theta}\ e_x + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\ e_y\right)\cdot\left(0e_x + 0e_y + 3e_z\right)$$

Donde no sobrevive nada, luego:

$$e^{\varphi}\cdot\vec{A} = A^{\varphi} \rightarrow 0$$
$$0\cdot e_{\varphi}$$

De manera que ya tenemos la expresión que estábamos buscando (la expresión del vector $\vec{A} = 0e_x + 0e_y + 3e_z$ en según la base natural esférica):

$$\vec{A} = 3\cos\theta\ e_r - \frac{3\sin\theta}{r}e_{\theta} + 0\ e_{\varphi}$$

Que, de una manera simplificada podríamos expresar como:

$$\vec{A} = A^r e_r + A^{\theta} e_{\theta} + A^{\varphi}\ e_{\varphi}$$ [110]

Que podremos reducir aún más como:

$$\vec{A} = A^i e_i$$

[110] Donde:

$$A^r = 3\cos\theta$$

$$A^{\theta} = \frac{-3\sin\theta}{r}$$

$$A^{\varphi} = 0$$

Y preguntémonos, ahora con carácter general, cuánto vale la derivada de $\vec{A}$ respecto a cada una de las variables posibles, de las coordenadas, es decir[111]:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^i}$$

Téngase en cuenta que $\vec{A}$ es un vector constante. Recordemos, el vector es constante, las bases en que se expresa no. A ver cómo resolvemos el problema. Definamos nuestra operación según el convenio de sumación de Einstein:

$$\frac{\partial (A^j e_j)}{\partial x^i} \quad {}^{112}$$

Esto, ciertamente, es la derivada de un producto:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(A^j \cdot e_j)$$

Que sabemos que se resuelve como:

$$= \frac{\partial A^j}{\partial x^i} e_j + A^j \frac{\partial e_j}{\partial x^i}$$

Sabemos que el vector, hagamos lo que hagamos va a ser constante, aunque no la base. Sin embargo nosotros necesitaremos obtener valores fijos, es decir, necesitamos trabajar garantizando que si el vector es contante, a pesar de que la base cambie, podamos afirmar de alguna manera que:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^i} = 0$$

Y precisamente para ello vamos a trabajar con la Derivada Covariante que no es otra cosa que esto (una derivada 'corregida'[113]):

$$\frac{\partial A^j}{\partial x^i} e_j + A^j \frac{\partial e_j}{\partial x^i}$$

Ahora recordemos que podemos definir la parte azul de nuestra expresión como una combinación lineal de los vectores de la base esférica según la siguiente nomenclatura:

---

[111] Donde x^i son las variables: r, θ, φ

[112] Obviamente nos vemos obligados a usar un índice j y no i, porque, cuando fijemos i, el otro índice, j, recorrerá todas las variables posibles y, así sucesivamente para todos los valores de i. Por otro lado, el producto que tratamos aquí es la componente por su vector base: $A^j \cdot e_j$

[113] Esto tiene todo el sentido del mundo. Antes en el Sistema Cartesiano, los vectores base que acompañaban a las componentes eran vectores constantes y como tal se comportaban en el proceso de derivación del vector. Ahora, sin embargo, son variables y, por lo tanto, deben ser tratados como tales. Por eso en este caso debe hacerse como la derivada de un producto. En realidad antes, en sistemas cartesianos, también se hacía, pero como las bases se comportaban como constantes, no hacía falta desarrollar la derivada del producto como hacemos ahora.

$$\frac{\partial e_j}{\partial x^i} \equiv \Gamma_{ji}^r e_r + \Gamma_{ji}^\theta e_\theta + \Gamma_{ji}^\varphi e_\varphi$$

Que mediante la convención de Einstein podemos expresar de manera compacta como:

$$\frac{\partial e_j}{\partial x^i} \equiv \Gamma_{ji}^k e_k \qquad [114]$$

La expresión que teníamos antes (la derivada del producto) es ahora:

$$\frac{\partial A^j}{\partial x^i} e_j + A^j \frac{\partial e_j}{\partial x^i} \rightarrow$$

$$\frac{\partial A^j}{\partial x^i} e_j + \Gamma_{ji}^k A^j e_k$$

Y justamente esto es la ***Derivada Covariante***. Desarrollémoslo un poco más. Para ello fijémonos en la expresión que tenemos:

$$\frac{\partial A^j}{\partial x^i} e_j + \Gamma_{ji}^k A^j e_k$$

Efectivamente, en la parte que hemos marcado en color rojo vemos que hay un índice i que, digamos, es el sujeto principal y un índice j que se desarrolla bajo i (como ya hemos dicho en otras ocasiones, por eso a j se le dice índice libre, porque no depende de otro subordinado, no "espera a nadie" mientras que i, sin embargo, para desarrollarse, debe esperar a que acabe j, tiene una 'carga' a la que esperar, una dependencia…). De hecho está al mismo nivel que el índice k que antes imcorporamos a la parte azul de la expresión. Así, como están al mismo nivel, podremos llamarlos igual. Así, nuestra expresión, nos quedará como:

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^i} e_k + \Gamma_{ji}^k A^j e_k$$

Que podremos re-formular del siguiente modo:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^i} = \frac{\partial A^k}{\partial x^i} e_k + \Gamma_{ji}^k A^j e_k$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^i} = \left[\frac{\partial A^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ji}^k A^j\right] e_k}$$

Que es justamente la definición de la ***Derivada Covariante*** y que es la operación mediante la que podemos analizar el cambio (o no cambio) de un vector cuando se desplaza en un entorno en el que las bases sí cambian.

[114] Obviamente, introducimos un nuevo elemento k porque aquí cada uno va a su bola… son "cogs" que encajan en otros "cogs". *Cogs in cogs*, de Gentle Giant.

Para apreciar el contraste entre trabajar en Sistemas Cartesianos y Sistemas Coordenados[115], veamos mediante un ejemplo la simplicidad de las derivaciones, la simplicidad del estudio del cambio de los vectores, en el sistema en el que en la Mecánica Clásica se tiende a trabajar: en un Sistema Cartesiano. Para ello supongamos un vector $\vec{A}$ cualquiera en ***un espacio euclídeo*** de ***3 dimensiones*** R^3 bajo ***coordenadas cartesianas***:

$$\vec{A} = 5e_x + 8e_y + 7e_z$$

Si quisiéramos estudiar cómo cambia (o no) el vector mientras se desplaza en un sistema de ***Coordenadas/Base Cartesianas*** a lo largo el eje x, ¿qué haríamos? Derivar respecto a la coordenada x, es decir: $\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}$. ¿Qué resultado obtendríamos? Pues no habría más que derivar parcialmente cada sumando. Teniendo, obviamente, en cuenta que cada sumando es un producto, por lo que tendremos que hacer la derivada de un producto que, como en este caso, ambos factores son constantes (tanto la componente como el vector base), entonces, necesariamente sucede que:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = 0 \cdot e_x + 5 \cdot 0 + 0 \cdot e_y + 8 \cdot 0 + 0 \cdot e_x + 7 \cdot 0 = 0$$

Es decir, que el vector permanece constante. No cambia y su derivada es cero.

Vemos así, que, en un Sistema Cartesiano, la derivada del vector $\vec{A}$ (definido como constante) es, ciertamente, cero con independencia del cambio de coordenada x (y el resto) en el que lo pongamos. No cambiará (su derivada es cero) y, por lo tanto, en el espacio euclídeo, con coordenadas cartesianas, la derivada, por cualquier coordenada[116], será igual a cero en todos los casos ya que ***ni el vector, ni la base*** en que se expresa, habrán cambiado. Sin embargo, si el vector $\vec{A}$, en vez de tener componentes constantes, puramente escalares, tuviera funciones, por ejemplo:

$$\vec{A} = 3x^2 e_x + 2x e_y$$

Naturalmente, al estudiar el cambio, veríamos que el vector sí que cambia según sean las coordenadas donde lo ubiquemos. De la dualidad "Vector/Base en que se expresa", dentro del Sistema Cartesiano, aunque la base, como decimos, cartesiana, no cambie, esta vez el vector sí que lo hace, por eso la derivada ***no es igual a cero***:

$$\vec{A} = 3x^2 e_x + 2x e_y$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \frac{\partial A^x}{\partial x} \cdot e_x + \frac{\partial A^y}{\partial x} \cdot e_y + \frac{\partial A^z}{\partial x} \cdot e_z$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \frac{\partial (3x^2 \cdot e_x)}{\partial x} + \frac{\partial (2x \cdot e_y)}{\partial x} + \frac{\partial (0 \cdot e_z)}{\partial x}$$

[115] Recordemos: sistemas en los que la base cambia según sean las coordenadas en que se mira.

[116] Lo mismo pasará para la derivación por las coordenada y y z.

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = (6x \cdot e_x + 3x^2 \cdot 0) + (2 \cdot e_y + 2x \cdot 0) + (0 \cdot e_z + 0 \cdot 0)$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = 6x \cdot e_x + 2 \cdot e_y$$

Es decir, que en un Sistema Cartesiano, podemos formular el procedimiento de manera general como:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^i} = \frac{\partial A^j}{\partial x^i} e_j$$

Sin embargo, como venimos diciendo, en un Sistema Esférico, con Bases Coordenadas, dicho proceso de análisis es inútil pues aunque un vector permanezca invariante, al cambiar la base según se recorra una coordenada, la derivada del conjunto vector/base no será igual a cero aunque, como decimos, éste no cambie, pues cambia la base, que evoluciona según las coordenadas se recorren. Justamente para trabajar en dicho escenario usamos la Derivada Covariante:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^i} = \left[\frac{\partial A^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ji} A^j\right] e_k$$

Expresión que no se diferencia mucho de la expresión para el sistema cartesiano excepto por la 'corrección' $\Gamma^k_{ji} A^j$ que introducimos para "compensar" los cambios que se producen en los vectores de la base.

En ***Geometría Diferencial***, a la expresión que tenemos encerrada entre corchetes se la denota como:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^i} = \left[\frac{\partial A^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ji} A^j\right] e_k = (\nabla_i A^k) e_k$$

Donde:

$$(\nabla_i A^k) \equiv \textit{Derivada Covariante}$$

La diferencia de este tipo de derivación de la derivada parcial "de toda la vida" es que la derivada parcial de toda la vida funciona perfectamente sólo cuando los vectores de la base que se estén empleando sean constantes, como en el caso, de sistemas cartesianos. Sin embargo, si estamos ante un sistema en que los vectores de la base cambian según sea la coordenada en que miremos como sucede, por ejemplo, en Sistemas Esféricos, tendremos que usar la ***Derivada Covariante***, tal y como hemos estado viendo.

Volvamos a nuestro hilo principal. Abordemos ahora (en contraste con el ejemplo anterior de un vector desplazado en un Sistema Cartesiano) el estudio de un vector constante pero que se desplaza en un Sistema de Base Esférica. Recordemos que usábamos como ejemplo un vector constante:

$$\vec{A} = 3e_z \text{ (en coordenadas cartesianas)}$$

Que, en coordenadas esféricas, expresábamos así:

$$\vec{A} = 3\cos\theta\, e_r - \frac{3\sin\theta}{r} e_\theta + 0\, e_\varphi$$

Así, para estudiar el comportamiento del vector en un Sistema de Base Coordenada (esférico) tenemos que recurrir a[117]:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^i} = \left[\frac{\partial A^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ji} A^j\right] e_k = (\nabla_i A^k) e_k$$

Hay que estar atentos a que esta expresión, con la notación de Einstein es muy corta, pero requiere un desarrollo larguísimo. La derivada del vector $\vec{A}$ en base a la coordenada, por ejemplo, $k = 1 \rightarrow x^1 = r$, tendrá componentes en todas las dimensiones posibles $e_k = e_r, e_\theta, e_\varphi$ y, además, cada una de esas componentes requerirán de un desarrollo completo del índice j que, de nuevo, debe recorrer los valores r, θ, φ. Lo ponemos a modo de recordatorio de lo largo y tedioso que son estos desarrollos (ahora entenderemos por qué el pobre Einstein, cansado de acumular sumatorios, desarrolló su nomenclatura alternativa).

Veamos nuestro vector ejemplo: $\vec{A} = 3\cos\theta\, e_r - \frac{3\sin\theta}{r} e_\theta + 0\, e_\varphi$. Vamos a seguir el siguiente plan, pues esto va a ser largo: vamos a ir proponiendo los valores de las diferentes combinaciones posibles de i y k y, después, internamente, vamos a desarrollar los valores del índice j [118]. Al usar la Derivada Covariante, se "compensará" la evolución de las bases, y, así, la derivación del vector estudiado será constante pues éste es 'realmente' constante.

Empecemos por:

- ***Combinación*** $\boldsymbol{i = 1 \rightarrow r, k = 1 \rightarrow r}$:

$$(\nabla_i A^k) e_k = (\nabla_1 A^1) e_1 = \left[\frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \Gamma^1_{j1} A^j\right] e_1 = \left[\frac{\partial A^r}{\partial r} + \Gamma^r_{jr} A^j\right] e_r \qquad [119]$$

Veamos qué se puede hacer con esto. Sabemos que nuestro vector es:

$$\vec{A} = 3\cos\theta\, e_r - \frac{3\sin\theta}{r} e_\theta + 0\, e_\varphi$$

Es decir, que:

$$\left[\frac{\partial A^r}{\partial r} + \Gamma^r_{jr} A^j\right] e_r = \left[\frac{\partial (3\cos\theta)}{\partial r} + \Gamma^r_{jr} A^j\right] e_r$$

Lo que hemos marcado en rojo, obviamente es cero, por lo que nos queda:

$$= \left[\Gamma^r_{jr} A^j\right] e_r$$

---

[117] Es cierto, ya lo hemos dicho, que para un espacio totalmente plano este tipo de Sistemas de Coordenadas no hace sino complicar las cosas… ¡Con lo cómodo que era el sistema cartesiano!… pero, claro, el problema es que la realidad es más compleja que un espacio cartesiano y, precisamente, estos sistemas, aparentemente más complejos, en realidad son los más cómodos y apropiados para estudiar espacios curvos.

[118] Para todos los índices, tendremos recorridos, en cascada, de 1,2,3, es decir: $1 = r, 2 = \theta, 3 = \varphi$.

[119] Introducimos colores diferentes para ver cómo 'evolucionarían' los índices. Por orden: el rojo (i) se quedará fijo esperando a que el azul (k) recorra todos sus valores posibles e, igualmente, el azul (k) esperará, antes de cambiar, a que el verde (j) recorra todos sus valores. j es, pues, la más libre de todas: 'el niño chico de la familia'.

Y si ahora recordamos lo que hicimos cuando extrajimos todas las Gammas, veremos que éstas, para cualquier valor que le demos a la j es igual a cero (por eso no es necesario desarrollar j):

$$\Gamma^r_{rr} = 0 \quad // \quad \Gamma^r_{\theta r} = 0 \quad // \quad \Gamma^r_{\varphi r} = 0$$

Por lo que:

$$(\nabla_1 A^1)e_1 = 0$$

- ***Combinación $i = 1 \rightarrow r, k = 2 \rightarrow \theta$:***

$$\vec{A} = 3\cos\theta\, e_r - \frac{3\sin\theta}{r} e_\theta + 0\, e_\varphi$$

$$(\nabla_i A^k)e_k = (\nabla_1 A^2)e_2 = \left[\frac{\partial A^2}{\partial x^1} + \Gamma^2_{j1} A^j\right] e_2 = \left[\frac{\partial A^\theta}{\partial r} + \Gamma^\theta_{jr} A^j\right] e_\theta$$

$$\left[\frac{\partial A^\theta}{\partial r} + \Gamma^\theta_{jr} A^j\right] e_\theta = \left[\frac{\partial\left(\frac{-3\sin\theta}{r}\right)}{\partial r} + \Gamma^\theta_{jr} A^j\right] e_\theta$$

Desarrollemos la derivada del término izquierdo y el sumatorio del término derecho:

$$\left[\frac{3\sin\theta}{r^2} + \Gamma^\theta_{jr} A^j\right] e_\theta$$

(OBSERVACIÓN. Muy importante, ojo a esto $\Gamma^\theta_{jr} A^j$, porque es un sumatorio dentro del sumatorio…veámoslo a continuación. Ya habríamos resuelto el término izquierdo, que queda fijo, pero aún queda desarrollar la parte derecha, que, ciertamente, es un sumatorio. Desarrollemos, pues, con todos sus valores posibles, la j de ese sumatorio)

$$= \left[\frac{3\sin\theta}{r^2} + \Gamma^\theta_{rr} A^r + \Gamma^\theta_{\theta r} A^\theta + \Gamma^\theta_{\varphi r} A^\varphi\right] e_\theta$$

Puesto que: $\Gamma^\theta_{rr} = 0 \quad // \quad \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r} \quad // \quad \Gamma^\theta_{\varphi r} = 0$

$$= \left[\frac{3\sin\theta}{r^2} + 0 + \frac{1}{r}\left(-\frac{3\sin\theta}{r}\right) + 0\right] e_\theta$$

$$= \left[\frac{3\sin\theta}{r^2} - \frac{3\sin\theta}{r^2}\right] e_\theta = 0$$

Luego:

$$(\nabla_1 A^2)e_2 = 0$$

- ***Combinación $i = 1 \rightarrow r, k = 2 \rightarrow \varphi$:***

$$\vec{A} = 3\cos\theta\, e_r - \frac{3\sin\theta}{r} e_\theta + 0\, e_\varphi$$

$$(\nabla_i A^k)e_k = (\nabla_1 A^3)e_3 = \left[\frac{\partial A^3}{\partial x^1} + \Gamma^3_{j1} A^j\right] e_2 = \left[\frac{\partial A^\varphi}{\partial r} + \Gamma^\varphi_{jr} A^j\right] e_\varphi$$

Es decir:

$$= \left[\frac{\partial 0}{\partial r} + \Gamma^{\varphi}_{jr} A^{j}\right] e_{\varphi}$$

Para desarrollar la j, recordemos:

$$\Gamma^{\varphi}_{rr} = 0 \;\; // \;\; \Gamma^{\varphi}_{\theta r} = 0 \;\; // \;\; \Gamma^{\varphi}_{\varphi r} = \frac{1}{r}$$

Es decir, que el sumatorio nos quedaría como:

$$= \left[\frac{\partial 0}{\partial r} + \Gamma^{\varphi}_{rr} A^{r} + \Gamma^{\varphi}_{\theta r} A^{\theta} + \Gamma^{\varphi}_{\varphi r} A^{\varphi}\right] e_{\varphi}$$

$$= \left[0 + 0 \cdot (3\cos\theta) + 0 \cdot \left(\frac{-3\sin\theta}{r}\right) + \frac{1}{r} \cdot 0\right] e_{\varphi}$$

$$(\nabla_1 A^3) e_3 = 0$$

- ***Combinación $i = 2 \rightarrow \theta, k = 1 \rightarrow r$:***

$$\vec{A} = 3\cos\theta\, e_r - \frac{3\sin\theta}{r} e_{\theta} + 0\, e_{\varphi}$$

$$(\nabla_i A^k) e_k = (\nabla_2 A^1) e_1 = \left[\frac{\partial A^1}{\partial x^2} + \Gamma^{1}_{j2} A^{j}\right] e_1 = \left[\frac{\partial A^r}{\partial \theta} + \Gamma^{r}_{j\theta} A^{j}\right] e_r$$

$$= \left[\frac{\partial (3\cos\theta)}{\partial \theta} + \Gamma^{r}_{j\theta} A^{j}\right] e_r$$

$$= \left[-3\sin\theta + \Gamma^{r}_{j\theta} A^{j}\right] e_r$$

Ahora preparémonos para desarrollar el sumatorio del "recorrido de j". En primer lugar recordemos que:

$$\Gamma^{r}_{r\theta} = 0 \;\; // \;\; \Gamma^{r}_{\theta\theta} = -r \;\; // \;\; \Gamma^{r}_{\varphi\theta} = 0$$

Luego el sumatorio quedaría como:

$$= \left[-3\sin\theta + \Gamma^{r}_{r\theta} \cdot A^{r} + \Gamma^{r}_{\theta\theta} \cdot A^{\theta} + \Gamma^{r}_{\varphi\theta} \cdot A^{\varphi}\right] e_r$$

$$= \left[-3\sin\theta + 0 \cdot (3\cos\theta) + (-r) \cdot \left(\frac{-3\sin\theta}{r}\right) + 0 \cdot 0\right] e_r$$

$$= [-3\sin\theta + 3\sin\theta] e_r = 0$$

$$(\nabla_2 A^1) e_1 = 0$$

- ***Combinación $i = 2 \rightarrow \theta, k = 2 \rightarrow \theta$:***

$$\vec{A} = 3\cos\theta\, e_r - \frac{3\sin\theta}{r} e_{\theta} + 0\, e_{\varphi}$$

$$(\nabla_i A^k) e_k = (\nabla_2 A^2) e_2 = \left[\frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \Gamma^{2}_{j2} A^{j}\right] e_2 = \left[\frac{\partial A^{\theta}}{\partial \theta} + \Gamma^{\theta}_{j\theta} A^{j}\right] e_{\theta}$$

$$= \left[\frac{\partial\left(\frac{-3\,sin\,\theta}{r}\right)}{\partial\theta} + \Gamma^{\theta}_{j\theta}A^{j}\right]e_{\theta}$$

$$= \left[-3\,cos\,\theta + \Gamma^{\theta}_{j\theta}A^{j}\right]e_{\theta}$$

De nuevo, preparémonos para desplegar la j:

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \frac{1}{r} \;//\; \Gamma^{\theta}_{\theta\theta} = 0 \;//\; \Gamma^{\theta}_{\varphi\theta} = 0$$

$$= \left[\frac{-3\,cos\,\theta}{r} + \Gamma^{\theta}_{r\theta}\cdot A^{r} + \Gamma^{\theta}_{\theta\theta}\cdot A^{\theta} + \Gamma^{\theta}_{\varphi\theta}\cdot A^{\varphi}\right]e_{\theta}$$

$$= \left[\frac{-3\,cos\,\theta}{r} + \frac{1}{r}(3\,cos\,\theta) + 0\cdot\left(\frac{-3\,sin\,\theta}{r}\right) + 0\cdot 0\right]e_{\theta}$$

$$= \left[\frac{-3\,cos\,\theta}{r} + \frac{3\,cos\,\theta}{r}\right]e_{\theta} = 0$$

$$(\nabla_2 A^2)e_2 = 0$$

- ***Combinación $i = 2 \rightarrow \theta, k = 3 \rightarrow \varphi$:***

$$\vec{A} = 3\,cos\,\theta\,e_r - \frac{3\,sin\,\theta}{r}e_{\theta} + 0\,e_{\varphi}$$

$$(\nabla_i A^k)e_k = (\nabla_2 A^3)e_3 = \left[\frac{\partial A^3}{\partial x^2} + \Gamma^{3}_{j2}A^{j}\right]e_3 = \left[\frac{\partial A^{\varphi}}{\partial\theta} + \Gamma^{\varphi}_{j\theta}A^{j}\right]e_{\varphi}$$

$$= \left[\frac{\partial(0)}{\partial\theta} + \Gamma^{\varphi}_{j\theta}A^{j}\right]e_{\varphi}$$

$$= \left[0 + \Gamma^{\varphi}_{j\theta}A^{j}\right]e_{\varphi}$$

De nuevo:

$$\Gamma^{\varphi}_{r\theta} = 0 \;//\; \Gamma^{\varphi}_{\theta\theta} = 0 \;//\; \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \cot\theta$$

Luego el sumatorio desplegando j queda así:

$$= \left[0 + \Gamma^{\varphi}_{r\theta}\cdot A^{r} + \Gamma^{\varphi}_{\theta\theta}\cdot A^{\theta} + \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta}\cdot A^{\varphi}\right]e_{\varphi} = 0$$

$$= \left[0 + 0\cdot(3\,cos\,\theta) + 0\cdot\left(\frac{-3\,sin\,\theta}{r}\right) + \cot\theta\cdot 0\right]e_{\varphi} = 0$$

$$(\nabla_2 A^3)e_3 = 0$$

- ***Combinación $i = 3 \rightarrow \varphi, k = 1 \rightarrow r$:***

$$\vec{A} = 3\,cos\,\theta\,e_r - \frac{3\,sin\,\theta}{r}e_{\theta} + 0\,e_{\varphi}$$

$$(\nabla_i A^k)e_k = (\nabla_3 A^1)e_1 = \left[\frac{\partial A^1}{\partial x^3} + \Gamma^1_{j3}A^j\right]e_1 = \left[\frac{\partial A^r}{\partial \varphi} + \Gamma^r_{j\varphi}A^j\right]e_r$$
$$= \left[\frac{\partial(3\cos\theta)}{\partial \varphi} + \Gamma^r_{j\varphi}A^j\right]e_r$$
$$= \left[0 + \Gamma^r_{j\varphi}A^j\right]e_r$$

Recapitulemos:

$$\Gamma^r_{r\varphi} = 0 \quad // \quad \Gamma^r_{\theta\varphi} = 0 \quad // \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\theta$$

Luego el sumatorio desplegando j queda así:

$$= \left[0 + \Gamma^r_{\theta\varphi}\cdot A^r + \Gamma^r_{\theta\varphi}\cdot A^\theta + \Gamma^r_{\varphi\varphi}\cdot A^\varphi\right]e_r$$
$$= \left[0 + 0\cdot(3\cos\theta) + 0\cdot\left(\frac{-3\sin\theta}{r}\right) + (-r\sin^2\theta)\cdot 0\right]e_r = 0$$
$$(\nabla_3 A^1)e_1 = 0$$

- ***Combinación $i = 3 \rightarrow \varphi, k = 2 \rightarrow \theta$:***

$$\vec{A} = 3\cos\theta\, e_r - \frac{3\sin\theta}{r}e_\theta + 0\, e_\varphi$$
$$(\nabla_i A^k)e_k = (\nabla_3 A^2)e_2 = \left[\frac{\partial A^2}{\partial x^3} + \Gamma^2_{j3}A^j\right]e_2 = \left[\frac{\partial A^\theta}{\partial \varphi} + \Gamma^\theta_{j\varphi}A^j\right]e_\theta$$
$$= \left[\frac{\partial\left(\frac{-3\sin\theta}{r}\right)}{\partial \varphi} + \Gamma^\theta_{j\varphi}A^j\right]e_\theta$$
$$= \left[0 + \Gamma^\theta_{j\varphi}A^j\right]e_\theta$$

Recapitulemos:

$$\Gamma^\theta_{r\varphi} = 0 \quad // \quad \Gamma^\theta_{\theta\varphi} = 0 \quad // \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\cos\theta\sin\theta$$

Luego el sumatorio desplegando j queda así:

$$= \left[0 + \Gamma^\theta_{r\varphi}\cdot A^r + \Gamma^\theta_{\theta\varphi}\cdot A^\theta + \Gamma^\theta_{\varphi\varphi}\cdot A^\varphi\right]e_\theta$$
$$= \left[0 + 0\cdot(3\cos\theta) + 0\cdot\left(\frac{-3\sin\theta}{r}\right) + (-\cos\theta\sin\theta)\cdot 0\right]e_\theta = 0$$
$$(\nabla_3 A^2)e_2 = 0$$

- ***Combinación $i = 3 \rightarrow \varphi, k = 3 \rightarrow \varphi$:***

$$\vec{A} = 3\cos\theta\, e_r - \frac{3\sin\theta}{r}e_\theta + 0\, e_\varphi$$
$$(\nabla_i A^k)e_k = (\nabla_3 A^3)e_3 = \left[\frac{\partial A^3}{\partial x^3} + \Gamma^3_{j3}A^j\right]e_3 = \left[\frac{\partial A^\varphi}{\partial \varphi} + \Gamma^\varphi_{j\varphi}A^j\right]e_\varphi$$

$$= \left[\frac{\partial 0}{\partial \varphi} + \Gamma^{\varphi}_{j\varphi} A^{j}\right] e_{\varphi}$$

$$= \left[0 + \Gamma^{\varphi}_{j\varphi} A^{j}\right] e_{\varphi}$$

Recapitulemos:

$$\Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \frac{1}{r} \;\; // \;\; \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \cot\theta \;\; // \;\; \Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi} = 0$$

Luego el sumatorio desplegando j queda así:

$$= \left[0 + \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} \cdot A^{r} + \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} \cdot A^{\theta} + \Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi} \cdot A^{\varphi}\right] e_{\varphi}$$

$$= \left[0 + \left(\frac{1}{r}\right) \cdot (3\,cos\,\theta) + \cot\theta \cdot \left(\frac{-3\,sin\,\theta}{r}\right) + 0 \cdot 0\right] e_{\varphi}$$

$$= \left[0 + \left(\frac{3\,cos\,\theta}{r}\right) + \left(\frac{cos\,\theta}{sin\,\theta}\right) \cdot \left(\frac{-3\,sin\,\theta}{r}\right) + 0 \cdot 0\right] e_{\varphi}$$

$$= \left[0 + \left(\frac{3\,cos\,\theta}{r}\right) + \left(\frac{-3\,cos\,\theta}{r}\right) + 0 \cdot 0\right] e_{\varphi} = 0$$

$$(\nabla_3 A^3) e_3 = 0$$

Es decir, que finalmente, tenemos que, como proponíamos, el vector $\vec{A}$, que era constante en un Sistema de coordendas cartesianas, lo es también en un Sistema de coordenadas esféricas pues (ya que hemos compensado los cambios que se producen en la base esférica):

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^{i}} = \left[\frac{\partial A^{k}}{\partial x^{i}} + \Gamma^{k}_{ji} A^{j}\right] e_{k} = (\nabla_i A^{k}) e_{k}$$

$$= (\nabla_1 A^1)e_1 + (\nabla_1 A^2)e_2 + (\nabla_1 A^3)e_3 + (\nabla_2 A^1)e_1 + (\nabla_2 A^2)e_2 + (\nabla_2 A^3)e_3 + (\nabla_3 A^1)e_1 + (\nabla_3 A^2)e_2 + (\nabla_3 A^3)e_3$$

$$= 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 = 0$$

Q.E.D.

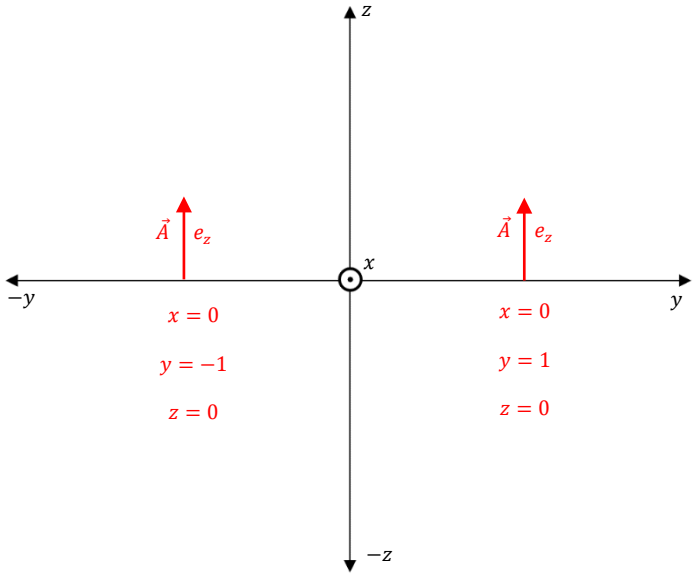
Es decir, puesto que la derivada del vector es igual a cero, el vector es constante, también , como decimos, bajo coordenadas esféricas[120]. Pero para poder demostrarlo hemos tenido que usar la Derivada Covariante.

[120] Un objeto matemático que permanece constante bajo cambio de coordenadas… se empiezan a asomar los tensores.

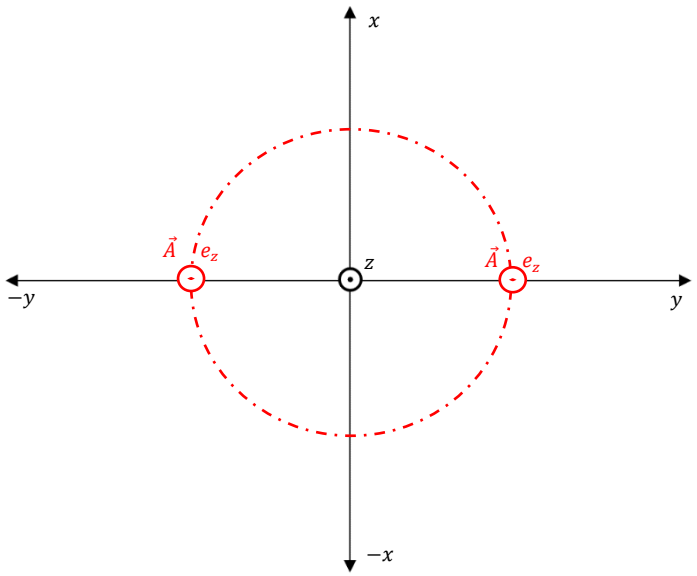
Veamos otro ejemplo interesante. Un ejemplo en el que ***el vector se desplaza por una curva parametrizada mediante un parámetro independiente λ***. Aunque parezca en un primer momento que el vector no es constante por la definición de sus componentes, veremos que una vez hagamos un corte en la esfera y definamos una trayectoria circular, éste, el vector, sí que permanecerá constante. Pero no nos anticipemos y veamos el desarrollo. Supongamos:

$$\vec{A} = (x^2 + y^2)e_z \quad ^{121}$$

Supongamos una representación en la que el eje x esté apuntando hacia nosotros:



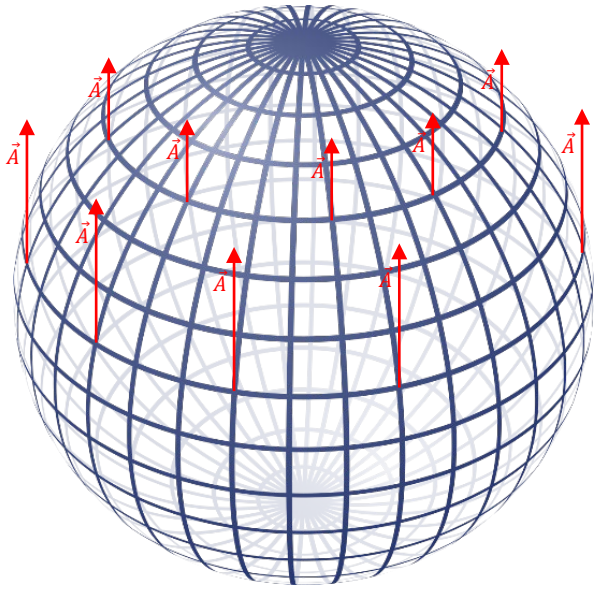
Si ponemos apuntando hacia nosotros el eje z, entonces veríamos:



[121] Es obvio que el vector cambia según sea su coordenada pues la componente está en función de las coordenadas x e y. El vector, dentro de una misma trayectoria circular será constante, sólo cambiará si está en uno u otro corte de la circunferencia…bueno, no nos adelantemos… lo veremos en breve.

Donde, la circunferencia que hemos marcado con la línea punteada, es una trayectoria en nuestro espacio euclídeo en el que el vector se mantiene constante. Es decir, en esa trayectoria, el vector $\vec{A}$ es invariante. Mejor dicho, el vector $\vec{A}$ es invariante ante rotaciones en una misma circunferencia (trayectorias de radio constante).

Según ampliemos o reduzcamos ese círculo lo estaríamos haciendo es un corte a una altura determinada de la esfera para conseguir una circunferencia de un radio constante determinado con valor diferente según sea la altura en que hagamos el corte. Según sea el círculo-corte, por supuesto, mayor o menor (pues depende de x e y (en la dirección z se proyecta, pero no influye en su valor)) será el módulo del vector $\vec{A}$ y, a lo largo de esa trayectoria, de esa circunferencia, el módulo será, obviamente, constante.



Como vemos, con carácter general, cuando cambiamos la distancia de la circunferencia-corte al origen de coordenadas (el centro de la circunferencia) el vector $\vec{A}$, como vemos en la representación anterior, cambia. Sin embargo, dentro de cada "submundo" de una circunferencia-corte concreta, el vector es constante. Analicemos este escenario.

Para ello, en primer lugar, pasemos nuestro vector $\vec{A} = (x^2 + y^2)e_z$ a coordenadas esféricas. Recordemos de epígrafes anteriores que:

$$x = sin\,\theta\,cos\,\varphi$$

$$y = sin\,\theta\,sin\,\varphi$$

$$z = cos\,\theta$$

(OBSERVACIÓN. Recordemos que nuestro vector está definido como $\vec{A} = (x^2 + y^2)e_z$, es decir, que el valor de z no nos sirve para nada. Lo hemos puesto pero, como decimos, no nos sirve para nada)

Luego $\vec{A}$, en coordendas esféricas, será:

$$\vec{A} = (x^2 + y^2)e_z$$

$$\vec{A} = ((sin\,\theta\,cos\,\varphi)^2 + (sin\,\theta\,sin\,\varphi)^2)e_z$$

$$\vec{A} = (sin^2\,\theta\,cos^2\,\varphi + sin^2\,\theta\,sin^2\,\varphi)e_z$$

$$\vec{A} = sin^2\,\theta\,(cos^2\,\varphi + sin^2\,\varphi)\,e_z \rightarrow \vec{A} = sin^2\,\theta \cdot (1)\,e_z$$

$$\vec{A} = sin^2\,\theta\,e_z$$

Y también sabemos qué es e_z en coordenadas esféricas, luego:

$$\vec{A} = sin^2\,\theta\left(\cos\theta\,e_r - \frac{\sin\theta}{r}e_\theta\right)$$

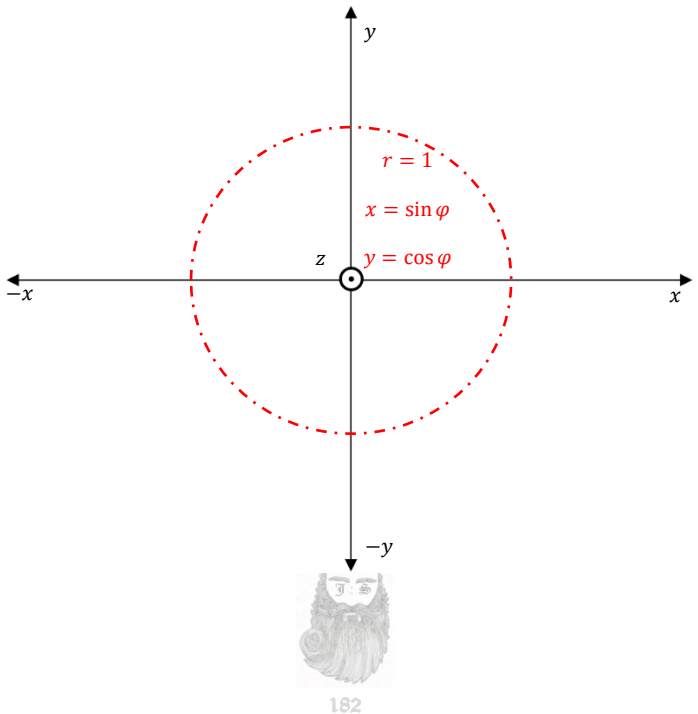
Es decir que el vector, en coordenadas esféricas, que debe tener una forma genérica como la siguiente:

$$\vec{A} = A^r e_r + A^\theta e_\theta + A^\varphi e_\varphi$$

Quedaría como:

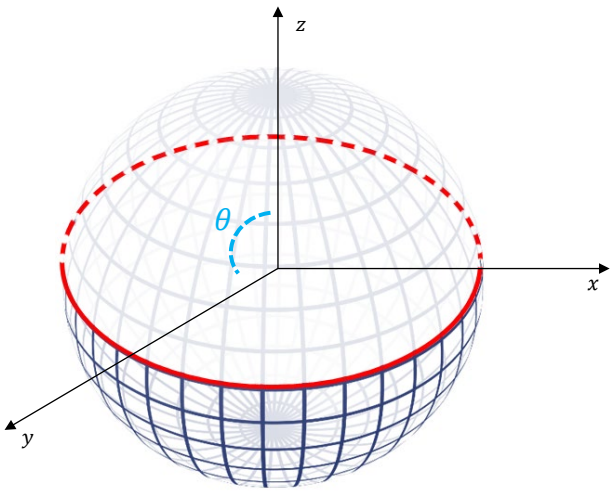
$$\vec{A} = sin^2\,\theta\,cos\,\theta\,e_r - \frac{sin^3\,\theta}{r}e_\theta + 0e_\varphi$$

A continuación, para simplificar las cosas y estudiar este caso, supongamos el escenario más favorable posible a la hora de realizar cálculos: una circunferencia goniométrica.

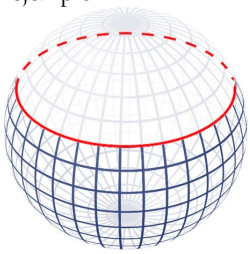


(OBSERVACIÓN. Téngase en cuenta que estaríamos mirando "desde arriba" la esfera y la circunferencia-corte, por lo que el ángulo que cambia es phi: φ)

La visualización geométrica sería algo parecido al siguiente escenario en el que el radio (el de la circunferencia-corte y el de la esfera, por eso se corta justo por la mitad[122]) es igual a 1. Veamos qué ángulo θ tenemos[123].



[122] Si tuviéramos un corte a otra altura, por ejemplo:



¿Cuál sería el radio de la circunferencia-corte? Muy, simple, la proyección del radio R de la esfera sobre el plano de corte. Y el ángulo que se formaría entre el radio y su proyección, por trigonometría de primaria, es θ. Es decir, que el radio de la circunferencia-corte roja sería:

$$r_{circunferencia} = R_{esfera} \cdot cos\,\theta$$

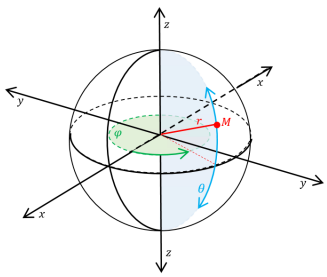
Como en el caso que estamos usando en nuestro hilo principal, es una esfera unidad y el corte lo hacemos en un $\theta = 90º = {}^{\pi}/_{2}$, tenemos que:

$$r_{circunferencia} = R_{esfera} \cdot cos\,{}^{\pi}/_{2} = R_{esfera} \cdot 1$$

$$r_{circunferencia} = R_{esfera}$$

Que, como hemos definido, es la unidad.

[123] Recordemos nuestro esquema de coordenadas esféricas:



Estaremos de acuerdo en que:

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Así, en dicho escenario, ¿qué constantes tenemos?

$$r = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Y, una vez mirando el círculo desde arriba, ¿qué es lo único que varía?

Efectivamente, phi: φ. Una φ que parametrizaremos como lambda: λ, para poder estudiar el cambio de nuestro vector:

$$\vec{A} = sin^2\,\theta\,cos\,\theta\,e_r - \frac{sin^3\,\theta}{r}e_\theta + 0e_\varphi$$

Así, de entrada, podremos observar que puesto que el cambio de φ no modifica el módulo del vector pues no produce modificación alguna ni en la expresión (no hay nada en función de φ) ni en el radio de la circunferencia, necesariamente debe cumplirse que[124]:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \lambda} = 0$$

Estudiemos este cambio, esta derivada, con más detalle. Veamos sus componentes. Estaremos de acuerdo en que la derivada de un vector es otro vector y que, por lo tanto, tendrá (o no, pues pueden ser cero) componentes en todas las dimensiones posibles (en nuestro caso las tres esféricas). Sin embargo, antes, como por la regla de la cadena, sabemos que:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x^i} \cdot \left(\frac{dx^i}{d\lambda}\right)$$

Donde x^i serán las variables: r, θ, φ, y, por lo tanto, la derivada tendrá diferentes componentes en dichas dimensiones, es decir:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial r} \cdot \left(\frac{dr}{d\lambda}\right) e_r + \frac{\partial \vec{A}}{\partial \theta} \cdot \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right) e_\theta + \frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} \cdot \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right) e_\varphi$$

[124] Sí, por lambda. Será necesario usar la regla de la cadena. Tengamos paciencia, ahora lo veremos.

Como sabemos que:

$$r = cte$$

$$\theta = cte$$

Necesariamente:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right) = 0 \rightarrow \frac{\partial \vec{A}}{\partial r} \cdot \left(\frac{dr}{d\lambda}\right) = 0$$

$$\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right) = 0 \rightarrow A^{\theta} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial \theta} \cdot \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right) = 0$$

Y, en virtud de la "***feliz parametrización***" que hemos hecho de φ ($\varphi = \lambda$) es obvio que:

$$\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right) = \left(\frac{d\lambda}{d\lambda}\right) = 1$$ [125]

De manera que:

$$\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right) = 1 \rightarrow A^{\varphi} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} \cdot \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right) \neq 0$$

Por lo que, finalmente la derivada del vector respecto de lamba sólo se estudia según el cambio de phi:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right)$$ [126]

Y ya podemos empezar a hacer cálculos. Recordemos que, en coordenadas esféricas, sabíamos que:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = \frac{\partial (A^i \cdot e_i)}{\partial \varphi}$$

Es decir, la derivada de un producto (nuestra Derivada Covariante):

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = \frac{\partial (A^i)}{\partial \varphi} e_i + A^i \frac{\partial (e_i)}{\partial \varphi}$$

Antes de proceder a desarrollar esto, recordemos nuestro vector:

$$\vec{A} = sin^2\,\theta\, cos\,\theta\, e_r - \frac{sin^3\,\theta}{r} e_\theta + 0 e_\varphi$$

[125] Si hubiésemos parametrizado de otra manera, naturalmente, aquí tendríamos otra expresión. Lo importante es que al final del desarrollo, hayamos parametrizado como hayamos parametrizado, el resultado debe ser el mismo. Será más o menos incómodo de alcanzar, pero el resultado será el mismo.

[126] La "parte roja" sería el cierre de la expresión por la ***Regla de la Cadena***.

Empecemos a dar valores a i:

- $\boldsymbol{i = 1 = r}$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = \frac{\partial (A^i)}{\partial \varphi} e_i + A^i \frac{\partial (e_i)}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = \frac{\partial (sin^2\,\theta\, cos\,\theta)}{\partial \varphi} e_r + (sin^2\,\theta\, cos\,\theta) \frac{\partial (e_r)}{\partial \varphi}$$

Sabemos que:

$$\frac{\partial (sin^2\,\theta\, cos\,\theta)}{\partial \varphi} = 0$$

Pues no hay en el numerador nada en función de φ.

Sólo sobrevive:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = (sin^2\,\theta\, cos\,\theta) \frac{\partial (e_r)}{\partial \varphi}$$

¿Qué era e_r?

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = (sin^2\,\theta\, cos\,\theta) \cdot \frac{\partial (\sin\theta \cos\varphi\, e_x + \sin\theta \sin\varphi\, e_y + \cos\theta\, e_z)}{\partial \varphi}$$

Es decir que tenemos que:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = -\,sin^3\,\theta\, cos\,\theta \sin\varphi\, e_x + sin^3\,\theta\, cos\,\theta \sin\varphi\, e_y = 0$$

- $\boldsymbol{i = 2 = \theta}$

$$\vec{A} = sin^2\,\theta\, cos\,\theta\, e_r - \frac{sin^3\,\theta}{r} e_\theta + 0 e_\varphi$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = \frac{\partial (A^i)}{\partial \varphi} e_i + A^i \frac{\partial (e_i)}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \left(\frac{-sin^3\,\theta}{r}\right)}{\partial \varphi} e_\theta + \left(\frac{-sin^3\,\theta}{r}\right) \frac{\partial (e_\theta)}{\partial \varphi}$$

De nuevo sabemos que:

$$\frac{\partial \left(\frac{-sin^3\,\theta}{r}\right)}{\partial \varphi} = 0$$

Luego sólo sobrevive:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = \left(\frac{-sin^3\,\theta}{r}\right) \frac{\partial (e_\theta)}{\partial \varphi}$$

Ahora bien, ¿qué era e_θ?

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = \left(\frac{-sin^3\,\theta}{r}\right)\left(\frac{\partial\left(r\,cos\,\theta\,cos\,\varphi\,e_x + r\,cos\,\theta\,sin\,\varphi\,e_y - r\,sin\,\theta\,e_z\right)}{\partial \varphi}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = sin^3\,\theta\,cos\,\theta\,\sin\varphi\,e_x - sin^3\,\theta\,cos\,\theta\,\sin\varphi\,e_y = 0$$

- $\boldsymbol{i = 3 = \varphi}$

$$\vec{A} = sin^2\,\theta\,cos\,\theta\,e_r - \frac{sin^3\,\theta}{r}e_\theta + 0e_\varphi$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = \frac{\partial (A^i)}{\partial \varphi}e_i + A^i\frac{\partial (e_i)}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = \frac{\partial (0)}{\partial \varphi}e_\theta + (0)\frac{\partial (e_\theta)}{\partial \varphi} = 0$$

Luego el total, aglutinando el sumatorio de Einstein:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = \frac{\partial (A^i)}{\partial \varphi}e_i + A^i\frac{\partial (e_i)}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = \left(sin^3\,\theta\,cos\,\theta\,\sin\varphi\,e_x - sin^3\,\theta\,cos\,\theta\,\sin\varphi\,e_y\right) + \left(sin^3\,\theta\,cos\,\theta\,\sin\varphi\,e_x - sin^3\,\theta\,cos\,\theta\,\sin\varphi\,e_y\right) + 0$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = 0$$

Que es lo que ya habíamos anticipado que debía suceder ante una trayectoria-circunferencia-corte de radio constante igual a 1. Es decir, el vector $\vec{A}$ es un invariante mientras se desplaza en una circunferencia. Es decir, es invariante ante rotaciones (obviamente, para r y θ constantes, pues si no no se trataría de una circunferencia).

Por supuesto, conociendo la definición de Derivada Covariante y conociendo los Símbolos de Christoffel para un Sistema Esférico, podríamos haber llegado al mismo sitio de manera más eficiente. Veámoslo y así nos sirve de demostración de que los resultados obtenidos son los correctos. Recordemos:

$$\vec{A} = sin^2\,\theta\,cos\,\theta\,e_r - \frac{sin^3\,\theta}{r}e_\theta + 0e_\varphi$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = \frac{\partial (A^i)}{\partial \varphi}e_i + A^i\frac{\partial (e_i)}{\partial \varphi}$$

La parte que hemos marcado en rojo podemos darla por anulada ya que sabemos que, en el vector $\vec{A}$, no hay nada en función de φ. Desarrollemos la parte que sobrevive:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = A^i \frac{\partial (e_i)}{\partial \varphi} = A^r \frac{\partial (e_r)}{\partial \varphi} + A^\theta \frac{\partial (e_\theta)}{\partial \varphi} + A^\varphi \frac{\partial (e_\varphi)}{\partial \varphi}$$

Es decir que:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = (sin^2\,\theta\, cos\,\theta)\frac{\partial (e_r)}{\partial \varphi} + \left(\frac{-sin^3\,\theta}{r}\right)\frac{\partial (e_\theta)}{\partial \varphi} + (0)\frac{\partial (e_\varphi)}{\partial \varphi}$$

$$= (sin^2\,\theta\, cos\,\theta)\frac{\partial (e_r)}{\partial \varphi} + \left(\frac{-sin^3\,\theta}{r}\right)\frac{\partial (e_\theta)}{\partial \varphi}$$

Recordemos nuestros ***Símbolos de Christoffel*** (las Gammas) y cómo las construíamos:

$$\frac{\partial (e_r)}{\partial \varphi} = \Gamma^k_{r\varphi}$$

$$\frac{\partial (e_\theta)}{\partial \varphi} = \Gamma^k_{\theta\varphi}$$

Si ahora desplegamos el sumatorio de Einstein:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = (sin^2\,\theta\, cos\,\theta)\Gamma^k_{r\varphi} + \left(\frac{-sin^3\,\theta}{r}\right)\Gamma^k_{\theta\varphi}$$

… que desplegamos recordando los valores de las Gammas:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = \left[(sin^2\,\theta\, cos\,\theta)\Gamma^r_{r\varphi} + (sin^2\,\theta\, cos\,\theta)\Gamma^\theta_{r\varphi} + (sin^2\,\theta\, cos\,\theta)\Gamma^\varphi_{r\varphi}\right]$$

$$+\left(\frac{-sin^3\,\theta}{r}\right)\Gamma^r_{\theta\varphi} + \left(\frac{-sin^3\,\theta}{r}\right)\Gamma^\theta_{\theta\varphi} + \left(\frac{-sin^3\,\theta}{r}\right)\Gamma^\varphi_{\theta\varphi}$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = \left[(sin^2\,\theta\, cos\,\theta)(0) + (sin^2\,\theta\, cos\,\theta)(0) + (sin^2\,\theta\, cos\,\theta)\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$+\left[\left(\frac{-sin^3\,\theta}{r}\right)(0) + \left(\frac{-sin^3\,\theta}{r}\right)(0) + \left(\frac{-sin^3\,\theta}{r}\right)(cot\,\theta)\right]$$

Es decir:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = \left(\frac{sin^2\,\theta\, cos\,\theta}{r}\right) + \left(\frac{-sin^3\,\theta}{r}\right)(cot\,\theta)$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = \left(\frac{sin^2\,\theta\, cos\,\theta}{r}\right) + \left(\frac{-sin^3\,\theta}{r}\right)\left(\frac{cos\,\theta}{sin\,\theta}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = \left(\frac{sin^2\,\theta\,cos\,\theta}{r}\right) - \left(\frac{sin^2\,\theta\,cos\,\theta}{r}\right) = 0$$

Q.E.D.

Es decir, hemos llegado al mismo resultado, por un camino alternativo más eficiente.

Esto es, hemos vuelto a trabajar con la ***Derivada Covariante*** pero, en esta ocasión, desplazando el vector a lo largo de una curva parametrizada mediante λ que ejerce de variable independiente. Ello se puede expresar mediante la expresión compacta:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{d\lambda}$$

… donde el parámetro λ ejerce la función de variable independiente. ¿Qué trayectoria está siguiendo nuestro vector? Pues una trayectoria que está definida por una concatenación de puntos definidos por una combinación concreta de coordenadas (dx^i) mediante un algoritmo determinado… es decir: mediante una función cuyo variable independiente de derivación es λ. De ahí que, para estudiar el cambio, el comportamiento, de dicha trayectoria recurramos a: $\frac{dx^i}{d\lambda}$, que es lo mismo que decir: $\frac{df_{(\lambda)}}{d\lambda}$ y que ciertamente, no es otra cosa que el vector tangente a la trayectoria en un punto diferencial en el que el incremento de lambda es prácticamente nulo. Ahora, si suponemos que es una especie de variable independiente universal como, por ejemplo, lo es el tiempo habitualmente en la física, podríamos definir (de hecho ya lo hemos hecho con anterioridad) la parte que hemos marcado en rojo como una especie de "velocidad" (un vector tangente) pues no es otra cosa que el estudio del cambio de un vector a lo largo de una variable independiente que podría ser, perfectamente, el tiempo:

$$u^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$$

De manera que, para ***estudiar el comportamiento de un vector bajo un cambio de coordenadas en un Sistema de Base Coordenada (como un Sistema Esférico) a lo largo de una trayectoria parametrizada mediante λ, al aplicar la regla de la cadena, obtenemos una formulación particular de la Derivada Covariante***. Veámoslo:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{d\lambda} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x^i}u^i$$

Es decir:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \lambda} = \left[\frac{\partial (A^j)}{\partial x^i}e_j + A^j\frac{\partial (e_j)}{\partial x^i}\right]u^i$$

Donde, recordemos:

$$\frac{\partial (e_j)}{\partial x^i} = \Gamma^k_{ji}e_k$$

Es decir que:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \lambda} = \left[\frac{\partial (A^j)}{\partial x^i} e_j + A^j \Gamma_{ji}^k e_k\right] u^i$$

Pero en el término izquierdo tenemos un índice libre (la j marca el ritmo a i, pues i debe esperar a que j culmine su desarrollo, por eso se dice que j es un índice libre). Como ya hemos hecho en ocasiones anteriores podemos identificar índices que estén en el mismo grado de dependencia:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \lambda} = \left[\frac{\partial (A^k)}{\partial x^i} e_k + A^j \Gamma_{ji}^k e_k\right] u^i$$

De manera que podemos expresar como:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \lambda} = u^i \left[\frac{\partial (A^k)}{\partial x^i} + \Gamma_{ji}^k A^j\right] e_k$$

Que efectivamente nos debe sonar mucho, si no muchísimo, a la ***Derivada Covariante***, de manera que:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \lambda} = u^i (\nabla_i A^k) e_k$$

Que no es otra cosa que la Derivada Covariante de un vector inserto en un Sistema de Bases Coordenadas y cuyo cambio estudiamos según se desplaza a lo largo de una trayectoria parametrizada[127].

Finalmente, hagamos una breve recapitulación, aunque sea por refrescar la memoria, acerca de: ¿qué es y para qué se usa la Derivada Covariante?

Recordemos que la Derivada Covariante (∇_i) es una generalización del concepto de derivada parcial (∂_i) que permite extender el cálculo diferencial que se realiza sobre $\mathbb{R}^n$ bajo coordenadas cartesianas al caso de variedades (de cualquier tipo) bajo coordenadas curvilíneas.

Supongamos que tenemos n campos vectoriales y que a cada punto corresponde una base vectorial $\{e_1, \dots, e_n\}$ y, además, supongamos un campo vectorial contravariante adicional (A) que puede expresarse como una combinación lineal de los vectores de la base anterior:

$$A = A^n e_n$$

En el caso de que estuviéramos en un espacio euclídeo, donde la base es constante en todos los puntos del espacio, la derivada de un ***vector A constante*** sería igual a cero para cualquier evolución de las coordenadas, es decir:

[127] Recordemos: u^i es la derivada de la trayectoria que sigue el vector, es decir, cómo cambia la función que define la trayectoria según nos desplazamos un diferencial lambda. Cómo cambian las coordenadas, según qué patrones (una función), para definir el camino concreto que sigue nuestro vector que se desplaza.

$$\partial_{x^i} A = 0$$

Pero, en cambio, si estamos en un espacio "calibrado" mediante coordenadas curvilíneas que, como sabemos, tiene una base coordenada, es decir, que los vectores de la base no serán constantes sino cambiarán según evolucione la coordenada que recorremos durante la derivación, aunque el vector A estudiado sea constante, su derivada no lo será puesto que la base habrá ido cambiando. En todo caso si queremos que para un vector constante en coordenadas curvilíneas la derivada sea igual a cero, tendremos que introducir un factor corrector. Es decir, cuando derivemos un vector (constante o no) tendremos que derivar el vector (sus componentes) y, a la vez, derivar la base cambiante por lo que estaremos ante la derivada de un producto:

$$\partial_{x^i} \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x^i} (A^n \cdot e_n)$$

$$\partial_{x^i} \vec{A} = \frac{\partial A^n}{\partial x^i} \cdot e_n + A^n \cdot \frac{\partial e_n}{\partial x^i}$$

Donde el segundo término de la derivada da cuenta de cómo cambia la base al recorrer una determinada coordenada en nuestra variedad.

Por otro lado, definimos:

$$\frac{\partial e_n}{\partial x^i} = \Gamma_{ni}^m e_m$$

Que no es otra cosa que nuestro conocido Símbolo de Christoffel que especifica cómo se "conectan" los vectores en diferentes puntos. Justamente para eso se define una conexión que no es otra cosa, como ya sabemos, que un conjunto de Símbolos de Christoffel que agotan todas las posibilidades de conmutación entre vectores de la base y componentes.

Recordemos que definíamos la Derivada Covariante de un vector $\vec{A}$ como:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^i} = \left[\frac{\partial A^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ji}^k A^j \right] e_k = (\nabla_i A^k) e_k$$

Si pensamos en lo que hemos estado haciendo hasta ahora, en realidad no hemos hecho otra cosa que estudiar fenómenos que se producen en un espacio euclídeo R^3 aunque, efectivamente, desde una perspectiva de coordenadas esféricas. Nos hemos movido, usando las definiciones que hicimos al inicio del capítulo, en un escenario de tipo (b).

Ahora, en cambio, sí que vamos a dar el salto a trabajar en un mundo bidimensional curvo. En un escenario de tipo (c). ¿Cómo se verá el desplazamiento verdaderamente paralelo de un vector (para un observador externo omnisciente 3D) desde el punto de alguien que sólo ve aquello que se recoge en un escenario en el que nada puede salirse de la superficie de la esfera (es un "habitante de la superficie", vive inserto en la "cáscara de la naranja")? Veámoslo.

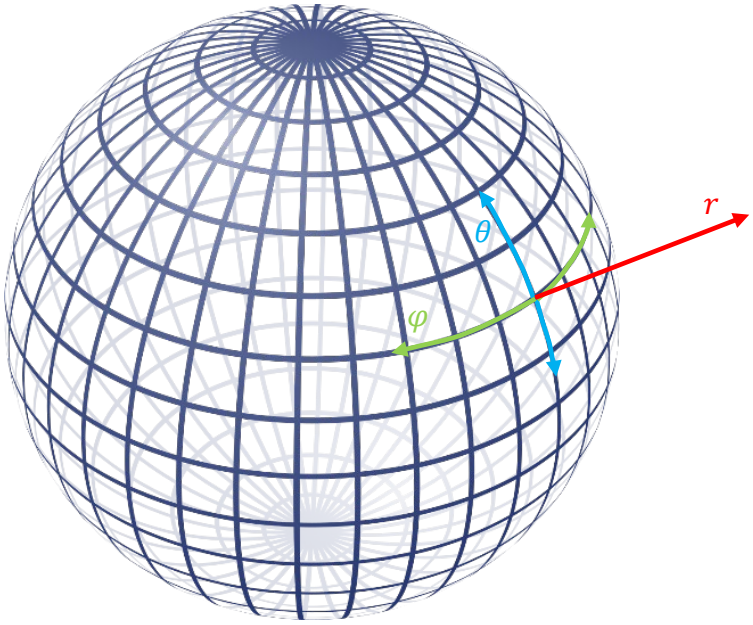
Transporte paralelo en un espacio bidimensional curvo.

Ahora podremos estudiar qué ven los hipotéticos habitantes de la superficie bidimensional de una esfera. Como decíamos, están insertos en una suerte de "curvilandia", contenidos en la "cáscara de la naranja". Para los "habitantes de la cáscara" no existe la posibilidad de "salir al espacio" pues viven constreñidos a la superficie de la esfera. No pueden ni saltar ni cavar agujeros.

Nosotros, en cambio, observadores omniscientes, externos y con capacidad para percibir tres dimensiones, ya sean cartesianas, esféricas, polares, etc… podemos trabajar con tres dimensiones (en el caso de que usemos coordenadas esféricas):

$$r, \theta, \varphi$$

Pero, para los habitantes bidimensionales de la superficie … ¿Cuál, de estas tres dimensiones, es la que decae? Obviamente la radial: r. No pueden cavar hacia "abajo", hacia el centro de la tierra y tampoco pueden saltar alejándose del centro de la tierra, es decir, tienen vetada la dirección radial.



(OBSERVACIÓN. Lo hemos representado de manera dramatizada para que se entienda el concepto de estar inserto en un plano curvo pero es importante tener en consideración que ninguno de los vectores es curvo. Los vectores son entidades matemáticas tangentes al punto en que tocan a la esfera, a la superficie curvo. Están contenidos (rectos) en cada uno de los planos tangentes que conforman el fibrado tangente, pero lo hemos dramatizado como si fueran "flechas curvas" para simular su "integración" en el espacio curvo)

- A través de la dimensión θ, podrán ir al "norte o al sur".
- A través de la dimensión φ, podrán ir al "este y al oeste".

Pero ya no tienen más dimensiones. Están atrapados en la superficie de la esfera. La dirección radial r (nuestro "arriba-abajo", "piloto-minero") les está vedada porque, como decimos, son una especie de "curvilanderos" atrapados en la "cáscara" bidimensional de la esfera.

Las coordenadas de su mundo bidimensional curvo serán:

$$\{\theta, \varphi\}$$

Y su base será:

$$\{e_\theta, e_\varphi\}$$

Pero… y ¿su métrica? Muy simple. Si antes, en tres dimensiones (y según coordenadas esféricas) teníamos:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} e_r e_r & e_r e_\theta & e_r e_\varphi \\ e_\theta e_r & e_\theta e_\theta & e_\theta e_\varphi \\ e_\varphi e_r & e_\varphi e_\theta & e_\varphi e_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \, sin^2 \, \theta \end{pmatrix}$$

Ahora ellos tendrán que eliminar todo rastro de la dimensión r. Es decir que, para ver como ellos, habrá que eliminar todo lo que marcamos en rojo:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} e_r e_r & e_r e_\theta & e_r e_\varphi \\ e_\theta e_r & e_\theta e_\theta & e_\theta e_\varphi \\ e_\varphi e_r & e_\varphi e_\theta & e_\varphi e_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \, sin^2 \, \theta \end{pmatrix}$$

De manera que la métrica para el espacio S^2 (de 'sphere') será:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} e_\theta e_\theta & e_\theta e_\varphi \\ e_\varphi e_\theta & e_\varphi e_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \, sin^2 \, \theta \end{pmatrix}$$

No es de extrañar que aquí aparezca una r, a pesar de que hemos dicho que se ha eliminado la dirección radial. Pensemos por un momento. Esa 'r' es el radio de la circunferencia cuya superficie habitan los "curvilanderos" y, realmente, lo que nos estará indicando es el grado de curvatura de la superficie. Efectivamente, a un radio de la circunferencia muy muy grande, los habitantes de la superficie curva no apreciarán la curvatura de su superficie (como nos pasa a nosotros con la superficie de la tierra) pero, en cambio, si el radio de la esfera cuya superficie habitan es muy pequeña con respecto a sus capacidades de percepción, sí que podrían apreciar una curvatura mucho más marcada (siempre que su tamaño comparativo con el radio de dicha esfera fuera significativo, claro).

Ahora recordemos nuestras Gammas, nuestros ***símbolos de Christoffel***… ¿cuáles sobrevivirían? Efectivamente, aquellas en que no esté involucrada la dimensión radial.

$$\Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0 \quad // \quad \Gamma^\theta_{\theta\varphi} = 0 \quad // \quad \Gamma^\theta_{\varphi\theta} = 0 \quad // \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^\varphi_{\theta\theta} = 0 \quad // \quad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \cot\theta \quad // \quad \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \cot\theta \quad // \quad \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = 0$$

Imaginemos ahora un vector "puro"; un vector que nosotros, observadores externos en 3D, desplazamos de manera paralela. Insistimos: lo vamos a mover paralelamente según nuestra percepción omnisciente-externa-3D pero… claro, mientras nosotros hacemos eso… ¿Qué verán los habitantes insertos en ese S^2?

Podríamos casi plantearlo de otra manera: ¿cómo deber ver cambiar el vector un habitante de la superficie de la esfera para que, realmente, visto desde fuera, el vector no esté cambiando? Es decir, para obtener un ***transporte paralelo real*** es necesario forzar al vector a que cambie de una determinada manera. La pregunta es, llegados a este punto: ¿cómo conseguimos que partiendo de esta expresión?

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \lambda} = u^{\alpha}\left(\nabla_{\alpha} A^{\beta}\right) e_{\beta} \quad [128]$$

¿Esto sea verdad?

$$u^{\alpha}\nabla_{\alpha} A^{\beta} = 0$$

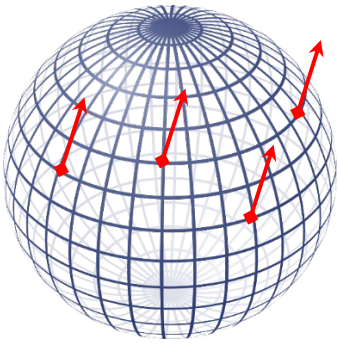
Si lo conseguimos, podremos decir que $\vec{A}$ es un campo transportado paralelamente[129] a lo largo de la trayectoria $\theta_{(\lambda)}$ y $\varphi_{(\lambda)}$[130].

Recordemos, para un habitante de la superficie de la esfera, no existe dimensión r. Por lo tanto, la representación del vector debe tener una componente perfectamente tangente y contenida en un plano tangente de dos dimensiones: θ y φ. El vector, para el observador 3D omnisciente se representa en su "puridad ontológica", como saliendo de la esfera, sin problemas, pero para el habitante de la superficie de la esfera la cosa es diferente.

[128] Obsérvese que hemos cambiado los supraíndices y los subíndices latinos $i, j, k,$… por índices griegos $\alpha, \beta, \gamma,$ ... Es una convención particular de los manuales que estamos siguiendo usar los latinos para espacios planos y griegos para espacios curvos. Pero, ojo, esto sólo en esta sección del estudio pues cuando veamos la Relatividad General desarrollada, ya claramente insertos en un espacio-tiempo curvos, se usarán los índices latinos para el espacio y los índices griegos para el tiempo, pero eso ya se verá.

[129] Verdaderamente paralelo pues nosotros, observadores externos, vemos que el vector sigue siendo paralelo. Lo que vean los de la superficie es otra cosa. El asunto es que sea verdaderamente paralelo y que se lo podamos explicar a los de "la superficie" aunque ellos lo vean cambiar.

[130] Recordemos que estamos en un espacio bidimensional curvo y con dos variables: $\theta_{(\lambda)}$ y $\varphi_{(\lambda)}$, ambas parametrizadas mediante lambda. Por otro lado decimos campo en el sentido de que vamos a definir una sección del espacio en el que, en todos sus puntos, podremos definir un vector que se desplaza de manera paralela.



Ahora, para estudiar el Transporte Paralelo en un espacio curvo, supongamos una trayectoria curva (una circunferencia, un corte en la esfera) como la siguiente:

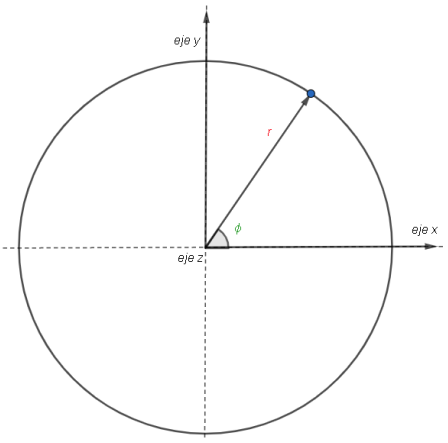
Donde:

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

Y r, que nos servirá para definir las propiedades de la métrica, es:

$$r = R \sin\frac{\pi}{3} = R\frac{\sqrt{3}}{2}$$

¿Y φ? Para ello, visualicemos desde arriba la trayectoria que estamos definiendo:



(OBSERVACIÓN. El eje z *apunta hacia nosotros)*

De manera que:

$$\varphi_{(\lambda)} \text{ donde } \lambda \in [0,2\pi] \quad [131]$$

Y, recorriendo esta trayectoria, vamos a construir un vector $\vec{A}$ tal que, al transportarlo sobre dicha trayectoria (parametrizada con lambda y considerando la métrica de un espacio curvo[132]), resulte que:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \lambda} = 0 \quad [133]$$

Recordemos que queremos alcanzar algo como esto:

$$u^{\alpha}\nabla_{\alpha}A^{\beta} = 0$$

Y puesto que los índices van a adoptar los valores de r, θ, φ, vemos que, para el primer factor, u^{α}, tenemos que:

- r es constante, luego para $\alpha \rightarrow r$; tenemos que $u^{r} = \frac{dr}{d\lambda} = 0$, es decir, *no sobrevive*.
- θ es constante, luego para $\alpha \rightarrow \theta$; tenemos que $u^{\theta} = \frac{d\theta}{d\lambda} = 0$, es decir, *no sobrevive*[134].
- φ ***no es constante***, $\alpha \rightarrow \varphi$;tenemos que $u^{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{d\lambda}{d\lambda} = 1$, es decir, ***sí sobrevive***.[135]

Por lo que, de esta expresión:

$$u^{\alpha}\nabla_{\alpha}A^{\beta} = 0$$

El único desarrollo que vamos a hacer es:

$$u^{\varphi}\nabla_{\varphi}A^{\beta} = 0$$

$$(1) \cdot \nabla_{\varphi}A^{\beta} = 0$$

$$\nabla_{\varphi}A^{\beta} = 0$$

Es decir, qué sólo tendremos estos dos desarrollos (recordemos que nuestro mundo es bidimensional[136]):

---

[131] En radianes.

[132] La aplicación de la métrica implica que el vector se adaptará a dicho "mundo" (ver).

[133] Es decir, que no cambia "para nosotros". Seguramente los habitantes de la superficie de la esfera vean algo raro, pero nosotros, matemáticos omniscientes, externos, debemos asegurar que el vector no cambia.

[134] Téngase en cuenta que R va a ser fijo, pues nos fijamos en una trayectoria-corte-fijo de la esfera.

[135] Usamos la parametrización más simple y "feliz": $\varphi = \lambda$

[136] Un vector, en este mundo, se definirá mediante las siguientes componentes/base:

$$\vec{A} = A^{\theta}e_{\theta} + A^{\varphi}e_{\varphi}$$

$$\nabla_\varphi A^\theta = 0$$

$$\nabla_\varphi A^\varphi = 0$$

Y si recordamos cómo definíamos la Derivada Covariante, tenemos que[137]:

$$a)\ \nabla_\varphi A^\theta \rightarrow \frac{\partial A^\theta}{\partial \varphi} + \Gamma^\theta_{\varphi\gamma} A^\gamma = 0$$

$$b)\ \nabla_\varphi A^\varphi \rightarrow \frac{\partial A^\varphi}{\partial \varphi} + \Gamma^\varphi_{\varphi\gamma} A^\gamma = 0$$

Comencemos con los desarrollos[138] (recordemos, sólo hay que desarrollar los índices gamma[139]). Empecemos por ***(a)***:

$$\frac{\partial A^\theta}{\partial \varphi} + \Gamma^\theta_{\varphi\gamma} A^\gamma = 0$$

$$\partial_\varphi A^\theta + \Gamma^\theta_{\varphi\theta} A^\theta + \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} A^\varphi = 0$$

Recordando los valores de nuestros Símbolos de Christoffel para este espacio bidimensional curvo vemos que:

$$\partial_\varphi A^\theta + (0) A^\theta + (-\sin\theta \cos\theta) A^\varphi = 0$$

$$\partial_\varphi A^\theta + (-\sin\theta \cos\theta) A^\varphi = 0$$

Continuemos por ***(b)***:

$$\frac{\partial A^\varphi}{\partial \varphi} + \Gamma^\varphi_{\varphi\gamma} A^\gamma = 0$$

$$\partial_\varphi A^\varphi + \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} A^\theta + \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} A^\varphi = 0$$

$$\partial_\varphi A^\varphi + (\cot\theta) A^\theta + (0) A^\varphi = 0$$

$$\partial_\varphi A^\varphi + (\cot\theta) A^\theta = 0$$

Y así tendríamos las dos ecuaciones que expresan el Transporte Paralelo de nuestro vector a lo largo de la trayectoria definida en nuestro espacio bidimensional curvo:

---

[137] Téngase en cuenta que hay que meter un nuevo índice libre γ.

[138] Recordemos la notación:

$$\frac{\partial A^\theta}{\partial \varphi} \rightarrow \partial_\varphi A^\theta$$

[139] Recodemos también que desarrollar los índices de la notación de Einstein es desarrollar, desplegar, un sumatorio. Y recordemos también que estamos en un mundo de dos dimensiones: θ y φ.

$$\partial_\varphi A^\theta + (-\sin\theta\cos\theta)A^\varphi = 0$$

$$\partial_\varphi A^\varphi + (\cot\theta)A^\theta = 0$$

Pero como ya conocemos $\theta = \frac{\pi}{3}$, podemos despejar algunas partes:

$$\partial_\varphi A^\theta + \left(-\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\right)A^\varphi = 0 \rightarrow \partial_\varphi A^\theta - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}\right)A^\varphi = 0$$

$$\partial_\varphi A^\varphi + \left(\cot\frac{\pi}{3}\right)A^\theta = 0 \rightarrow \partial_\varphi A^\varphi + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)A^\theta$$

Es decir, que, las ***ecuaciones generales*** que definen el ***Transporte Paralelo*** de cualquier vector $\left[\vec{A} = A^\theta e_\theta + A^\varphi e_\varphi\right]$ a lo largo de la ***trayectoria*** que hemos definido ($\theta = \frac{\pi}{3}$) son:

$$\partial_\varphi A^\theta - \frac{\sqrt{3}}{4}A^\varphi = 0$$

$$\partial_\varphi A^\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}}A^\theta = 0$$

Ahora, si quisiéramos despejar totalmente las ecuaciones, tan sólo tendríamos resolver un sistema de dos ecuaciones diferenciales[140] con dos incógnitas. Procedamos.

---

[140] En la presente nota, en consonancia con la línea de la filosofía de autocontención de nuestro texto, vamos a esbozar unas líneas muy generales que nos permitan recordar los elementos necesarios para abordar con ciertas garantías los desarrollos de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Parciales a las que tenemos que recurrir a lo largo de nuestra exposición principal. Para más detalles, consúltese el Apéndice I. Acerca del Cálculo diferencial e integral.

Definición de Ecuación Diferencial.

Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra derivadas (o diferenciales) de una función desconocida de una (o más) variables. El objetivo, claro, será conocer qué función satisface las condiciones necesarias para que la ecuación diferencial sea cierta. Si la función estudiada y buscada es de más de una variable, entonces estaríamos ante una Ecuación Diferencial Parcial.

Veamos un ejemplo muy simple de ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Donde:

- x es la variable independiente.
- y la variable dependiente (la función que buscamos).

La solución a esta ecuación diferencial es absolutamente trivial:

$$dx\left(\frac{dy}{dx}\right) = (2x)dx$$

$$dy = (2x)dx$$

$$\int dy = \int (2x)dx$$

$$y = \int (2x)dx$$

$$y = \frac{2x^2}{2} + C$$

$$y = x^2 + C$$

Resultado que es perfectamente compatible con la ecuación diferencial ordinaria propuesta al inicio:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^2 + C)}{dx} = 2x$$

Por otro lado, un ejemplo de Ecuación Diferencial Parcial, sería:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = u$$

Donde:

- x, y eson las variables independientes.
- u la variable dependiente (la función que buscamos que, de hecho es $u_{(x,y)}$).

En estos casos las soluciones son más tediosas. Veamos un ejemplo de Ecuación Diferencial Parcial.

Demostremos que es cierto que…

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

… Para una función:

$$u_{(x,y)} = e^x \cos y$$

Vayamos variable a variable:

- Empecemos por x:
    - Derivada primera:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$$

    - Derivada segunda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \cos y$$

- Continuemos por y:

  - Derivada primera:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$$

  - Derivada segunda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \cos y$$

Si ahora las sustituimos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$e^x \cos y - e^x \cos y = 0$$

Que verifica lo que estábamos probando.

Sin embargo, antes de desarrollar con un poco más de detalles las Ecuaciones Diferenciales Parciales, es interesante tener en mente algunos conceptos que nos servirán para poder catalogar de manera muy útil este tipo de operaciones.

- ***Orden de una E.D***. El orden de una ecuación diferencial está dado por el ***orden mayor de su derivada***. Por ejemplo:

  - $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + 3u = 0$, es de orden 2 por $\frac{d^2u}{dx^2}$.

  - $y''' + y' = \sin 3x$, es de orden 3 por y'''.

  - $(x + y)dx = (y - x)dy$, es de orden 1 por dx y dy

  - …

- ***Grado de una E.D***. El grado de una ecuación diferencial está dado por el ***exponente del mayor orden 'del pack' que conforma la derivada***. Veámoslo con ejemplos:

  - $e^x \frac{d^2y}{dx^2} + \sin x \frac{dy}{dx} = x$, es de **orden** 2 $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ y de **grado** 1 $\left(\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^1\right)$.

  - $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \frac{dy}{dx} = tg\ x$, es de **orden** 3 $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ y de **grado** 1 $\left(\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^1\right)$.

- $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2 + \frac{dy}{dx} = tg\ x$, es de **orden** 4 $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)$ y de **grado** 2 $\left(\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2\right)$.

- …

- ***Ecuación Diferencial lineal***. Cuando la función u **y sus derivadas tienen exponente 1** y ***ni están dentro de otra función ni se multiplican entre sí***.

  - $\frac{d^2u}{dx^2} + xu = 0$, es una E.D. lineal.

    (OBSERVACIÓN. Introducimos una notación abreviada de la expresión anterior: $(u_{xx} + xu = 0)$*)*

  - $xt\frac{du}{dx} - 2x^2\frac{d^2u}{dy^2} = 5 - 3x$, es una E.D. lineal.

    (OBSERVACIÓN. Igualmente, $\left(xtu_x - 2x^2u_{yy} = 5 - 3x\right)$*)*

  - En ambos casos observamos que la función que se deriva, u, ni está elevada a un exponente diferente de 1, ni se multiplica por sí misma o por alguna de sus derivadas.

  - En cambio, los ejemplos que vamos a poner ahora son E.D. no lineales:

    - $u\frac{du}{dx} = 0$, es no lineal, pues la función u multiplica a su derivada. Digamos que con esto se deforma la linealidad.
    - $sin(u)$, es no lineal porque la función u forma parte, está inserta, en otra función: "sin".
    - $\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + u = 0$, es no lineal por que una de las derivadas de la función u tiene un exponente diferente de 1 (está elevada a *algo*).

- Ecuación Diferencial Lineal Homogénea. Son aquellas en la que todos los términos tienen incluida la función u de alguna manera, bien sea ella misma o alguna de sus derivadas.

  - $\frac{d^2u}{dx^2} + xu = 0$, es lineal homogénea (se considera que en el término 0, efectivamente, también está presente la función u pero, claro, al multiplicar por cero, es igual a cero).

  - Cuando la función u, en cambio, no está de alguna manera en todos los términos, estaremos ante una E.D. no homogénea:
    - $\frac{d^2u}{dx^2} + x = 0$, es lineal NO homogénea.
    - $xt\frac{du}{dx} - 2x^2\frac{d^2u}{dy^2} = 5 - 3x$, es lineal NO homogénea.

Finalmente, antes de pasar a desarrollar algunos ejemplos, establezcamos una convención relativa a la notación que se usará en el desarrollo de las E.D. En dicho sentido, si recordamos notación que ya hemos usado previamente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \partial_x$$

Podríamos resumir expresiones tales como, por ejemplo, la siguiente EDP lineal y homogénea:

$$5x\frac{\partial u}{\partial x} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$5x\partial_x u - 3\partial_y^2 u = 0$$

$$\left(5x\partial_x - 3\partial_y^2\right)u = 0$$

Donde diremos que $\left(5x\partial_x - 3\partial_y^2\right)$ es un ***operador*** L que se aplica a la función u: $L[u]$, donde:

$$L = 5x\partial_x - 3\partial_y^2$$

u es la función estudiada.

Un ejemplo de operador típico es el Laplaciano:

$$\Delta = \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right)$$

De manera que una expresión como la siguiente:

$$\Delta u = xy$$

Desarrollada, sería:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = xy$$

Naturalmente, puesto que para poder construir un operador que aplique a toda la E.D. ésta debe ser homogénea, y si además, es lineal, entonces el operador será también lineal y homogéneo y, por ello, cumplirá, entre otras, las siguientes propiedades fundamentales que ahora nos interesan:

- $L[u + w] = L[u] + L[w]$
- $L[Cu] = CL[u]$

Ahora abordemos el Principio de Superposición de Soluciones. Para ello expongamos dos teoremas.

- Teorema I.
  Si $u_1, u_2, \dots, u_n$ son soluciones de una EDP lineal y homogénea $L[u] = 0$, entonces, $c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$ también son soluciones para cualquier constante $c_1, c_2, \dots, c_n$.
  Esto es perfectamente intuitivo ya que, cuando procedemos a "despejar" el diferencial, la constante se 'escapa' del proceso de cálculo.

- Teorema II.
  Sea u_p una solución 'particular' de una EDP lineal no homogénea $L[u] = f$, entonces la solución general de $L[u] = f$ es $u = u_p + u_h$ donde u_h es la solución general de la EDP en su versión homogénea relacionada $L[u] = 0$.

Demostración de que $u_p + u_h$ es solución de $L[u] = f$.

$$L[u_p] = f \qquad \text{y} \qquad L[u_h] = 0$$

$$L[u_p + u_h] = L[u_p] + L[u_h] = f + 0 = f$$

De manera que sabiendo que u es solución de $L[u] = f$, entonces podemos proponer que es de la forma: $u = u_p + u_h$ para alguna solución u_h de la homogénea relacionada.

Así, sea que:

$$w = v - u_p, \text{ luego} \rightarrow L[w] = L[v - u_p]$$

$$= L[v] - L[u_p]$$

$$= f - f$$

$$= 0$$

Es decir, que w es solución de la ecuación homogénea relacionada.

Sabiendo esto, demostremos ahora el Principio de Superposición de Soluciones.

Si L es un Operador Diferencial Lineal y $u_1, u_2, \dots, u_n$ cumplen que $L[u_1] = f_1$, $L[u_2] = f_2$, …, $L[u_n] = f_n$, entonces $c_1u_1, +c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$ es solución de $L[u] = f$, donde $f = c_1f_1 + \cdots + c_nf_n$.

Demostración:

$$L[u] = f$$

$$= L[c_1u_1, +c_2u_2 + \cdots + c_nu_n]$$

$$= c_1L[u_1] + c_2L[u_2] + \cdots + c_nL[u_n]$$

$$= c_1f_1 + \cdots + c_nf_n$$

Q.E.D.

Todo esto se entiende mucho mejor viendo la aplicación práctica de estos principios a casos concretos. Procedamos a resolver diferentes tipos de EDP.

- Empecemos por la más simple posible: $\frac{\partial u}{\partial t} = x$ donde u es una función de x y t, es decir, $u_{(x,t)}$. Tenemos dos métodos que, según el escenario, habrá que adoptar:

    - Método 1.
      Integrar, directamente, a ambos lados de la ecuación:

      $$\frac{\partial u}{\partial t} = x$$

      Recordemos que nuestra variable independiente es t:

$$\int \frac{\partial u}{\partial t} dt = \int x\, dt$$

Esto es una integración parcial, sólo lo hacemos respecto de t y, por lo tanto x es constante:

$$u = x \int dt$$

$$u = xt + C$$

Pero, recordemos (esto lo hemos desarrollado en el Apéndice I. Acerca del Cálculo Diferencial e Integral), que estamos haciendo una integración parcial respecto de t, por lo que la constante de integración que introduzcamos debe estar en función de la variable sobre la que no se ha integrado, es decir:

$$u = xt + C_{(x)}$$

O lo que es lo mismo:

$$u = xt + f_{(x)}$$

Que, a nada que miremos, apreciamos que es una solución perfectamente válida para:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = x$$

- Método 2.

Considerar que en la expresión $\frac{\partial u}{\partial t} = x$, u sólo está en función de t, es decir: $u_{(t)}$. Siendo así, podemos considerar la Ecuación Diferencial Parcial como una Ecuación Diferencial Ordinaria, es decir:

$$\frac{du}{dt} = x$$

Ahora procedemos a despejar el diferencial:

$$dt\left(\frac{du}{dt}\right) = x\, dt$$

$$du = x\, dt$$

Ahora integramos de manera ordinaria (no parcial):

$$\int du = \int x\, dt$$

$$u = x \int dt$$

$$u = xt + C$$

Pero como sabemos que antes nos hemos saltado una variable simulando un escenario $u_{(t)}$, volvemos al escenario $u_{(x,t)}$ y, por lo tanto, transformamos la constante en una función de x: $f_{(x)}$

$$u = xt + f_{(x)}$$

En un problema tan simple, la diferencia entre los dos métodos de solución puede parecer trivial, pero ante casos más complejos, veremos que implican diferencias notables ante cuya elección el procedimiento será más o menos simple.

Veamos otro ejemplo.

- $\frac{\partial u}{\partial t} = 3x - 2t$
  - Método 1. $u_{(x,t)}$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3x - 2t$$
$$\int \frac{\partial u}{\partial t} dt = \int (3x - 2t)\, dt$$
$$u = \int (3x)\, dt - \int (2t)\, dt$$
$$u = 3xt - t^2 + f_{(x)}$$

  - Método 2. $u_{(t)}$.

$$\frac{du}{dt} = 3x - 2t$$
$$dt\left(\frac{du}{dt}\right) = (3x - 2t)dt$$
$$du = (3x - 2t)dt$$
$$\int du = \int (3x - 2t)\, dt$$
$$u = 3xt - t^2 + C$$

Que volviendo a $u_{(x,t)}$

$$u = 3xt - t^2 + f_{(x)}$$

- $\frac{\partial u}{\partial t} + 3u = 0$
  - Método 2 (más conveniente). $u_{(t)}$.

$$\frac{du}{dt} + 3u = 0$$
$$\frac{du}{dt} = -3u$$
$$dt\left(\frac{du}{dt}\right) = -3u\, dt$$
$$du = -3u\, dt$$

Pero tenemos que tener todas las 'u' agrupadas en el mismo lado de la ecuación:

$$\frac{du}{u} = -3dt$$
$$\int \frac{1}{u} du = -3 \int dt$$

Resolvemos las integrales (véase Apéndice I):

$$\ln u = -3t + C$$

Ahora, despejamos, exponenciando, el Logaritmo Neperiano:

$$u = e^{-3t+C}$$

$$u = e^{-3t} \cdot e^{C}$$

$$u = Ce^{-3t}$$

Volviendo al escenario $u_{(x,t)}$:

$$u = f_{(x)}e^{-3t}$$

- $\frac{\partial u}{\partial x} - tu = 0$
  - Método 2 (más conveniente). $u_{(x)}$.

$$\frac{du}{dx} - tu = 0$$

$$\frac{du}{dx} = tu$$

$$dx\left(\frac{du}{dx}\right) = tu\ dx$$

$$du = tu\ dx$$

$$\frac{du}{u} = t\ dx$$

$$\int \frac{du}{u} = \int t\ dx$$

$$\ln u = tx + C$$

$$u = e^{tx+C}$$

$$u = e^{tx} \cdot e^{C}$$

$$u = Ce^{tx}$$

Volvamos al escenario $u_{(x,t)}$:

$$u = f_{(t)}e^{tx}$$

- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$
  - Método 1. $u_{(x,t)}$.

En primer lugar 'subamos de nivel':

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\int \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt = \int 0\, dt$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 + f_{(x)}$$

Y de nuevo:

$$\int \frac{\partial u}{\partial t} dt = \int f_{(x)}\, dt$$

$$u = t f_{(x)} + g_{(x)}$$

Donde $f_{(x)}$ y $g_{(x)}$ son dos funciones arbitrarias de x.

- Método 2. $u_{(t)}$.

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = 0$$

$$\int \frac{d^2 u}{dt^2} dt = \int 0\, dt$$

$$\frac{du}{dt} = 0 + C_1$$

$$du = C_1 dt$$

Volvemos a integrar:

$$\int du = \int C_1\, dt$$

$$u = \int C_1\, dt$$

$$u = C_1 t + C_2$$

Volviendo a $u_{(x,t)}$:

$$u = f_{(x)} t + g_{(x)}$$

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$
  - Método $u_{(x,y)}$.

Replanteemos nuestra expresión de una manera más cómoda:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

$$\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dx = \int 0\, dx$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 + C_{(y)}$$

Es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_{(y)}$$

Volvemos a integrar:

$$\int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int f_{(y)}\, dy$$
$$u = F_{(y)} + g_{(x)}$$

Donde $F_{(y)}$ es una función de y ya integrada respecto de y, y $g_{(x)}$ es una función arbitraria de x.

Vamos ahora con un caso que nos interesa especialmente para nuestro hilo principal pues nos va a servir para resolver un tipo de E.D.O. con soluciones complejas. Antes de nada hemos de observar que los coeficientes de la siguiente E.D.O. son todos constantes y, por ello, el tipo de solución que vamos a proponer es de carácter exponencial, es decir:

$$y = e^{rx}$$

Una función exponencial de x multiplicada por un coeficiente r que queremos hallar.

¿Por qué exponencial?

Pensemos por un momento. Las funciones exponenciales son aquellas que tienen como derivada a ellas mismas y, si observamos el caso siguiente, lo que tenemos es que la suma y resta de una serie de funciones derivadas acaba resultando cero de manera que, sea lo que sea que estemos sumando, parece que es la misma cosa pero multiplicada por coeficientes constantes diferentes… Tiene todo el sentido del mundo trabajar con la propuesta de una solución de tipo exponencial. Veamos de qué va esto. Supongamos, por ejemplo, la siguiente E.D.O:

- $\frac{d^2u}{dy^2} - 6\frac{du}{dy} + 13u = 0$

    - Para resolver esta ecuación pensemos que las "derivaciones son variables" es decir, que una segunda derivada es como un variable elevada al cuadrado. Veamos a qué nos estamos refiriendo, supongamos que:

        - 2ª derivada = $u'' = x^2$
        - 1ª derivada = $u' = x^1$
        - 0 derivada = $u = x^0 = 1$
        - Constante = 0

        Así, considerando esto, podríamos decir que:

        $$\frac{d^2u}{dy^2} - 6\frac{du}{dy} + 13u = 0 \rightarrow u'' - 6u' + 13u = 0 \rightarrow r^2 - 6r + 13 = 0$$

        Es decir, una ecuación de segundo grado de toda la vida y cuyas soluciones son complejas:

        $$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r = \begin{cases} 3 + 2i \\ 3 - 2i \end{cases}$$

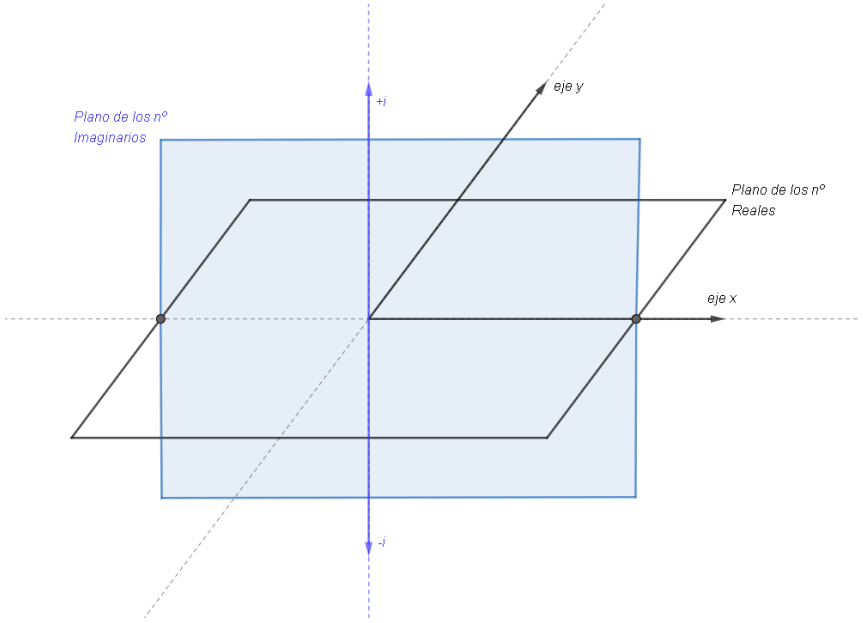
Es decir, que nos encontramos con una solución que tiene la forma de número complejo del tipo:

$$r = a + bi$$

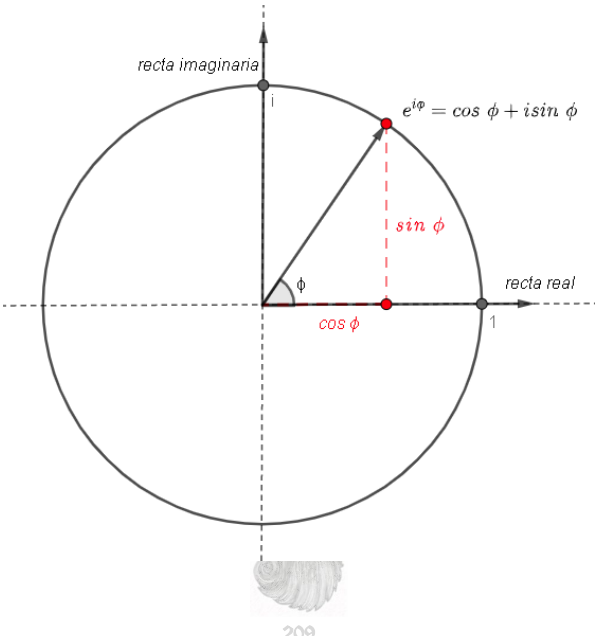
Para poder resolver esto tendremos que recurrir a la bella identidad de Euler:

$$e^{ix} = cos\, x + i\, sin\, x$$

Vamos a demostrar de manera muy sencilla esta identidad. Para ello supongamos el plano de los números reales y su intersección con el plano de los números imaginarios:



Imaginemos ahora, inserta en el plano imaginario, una circunferencia goniométrica. Una circunferencia que miramos de manera perfectamente perpendicular al plano imaginario donde el plano de los números reales se ve como una línea, totalmente de perfil, es decir, visualmente algo como:



Es decir, la función $e^{i\varphi}$ dibuja nuestra circunferencia unidad al variar x sobre la recta de los números reales según cambia el ángulo φ ($e^{i\varphi}$ podríamos imaginarlo como una combinación lineal de $1 \cdot cos\,\varphi$ más $i \cdot sin\,\varphi$). Sin embargo, aunque sea poco frecuente, para comprender bien la Identidad de Euler es mejor recurrir a las expresiones numéricas que a las representaciones geométricas. Para ello, pensemos en lo siguiente:

- Por un lado sabemos que:

$$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, \ldots$$

- Por otro también conocemos los siguientes desarrollos en Series de Taylor:

$$cos\,x = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots \textit{(que es una función par)}$$

$$sin\,x = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots \textit{(que es una función impar)}$$

Y como estamos buscando algo parecido a esto:

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Comencemos a combinar expresiones. Probemos a multiplicar las funciones trigonométricas de x por i:

- En el caso del coseno, sólo sobreviven las i elevadas a exponentes pares, es decir:

$$i\,cos\,x = i^0 \cdot \frac{x^0}{0!} - i^2 \cdot \frac{x^2}{2!} + i^4 \cdot \frac{x^4}{4!} - i^6 \cdot \frac{x^6}{6!} \ldots$$

$$i\,cos\,x = (1) \cdot \frac{x^0}{0!} - (-1) \cdot \frac{x^2}{2!} + (1) \cdot \frac{x^4}{4!} - (-1) \cdot \frac{x^6}{6!} \ldots$$

  Es decir, las i que sobreviven son sólo unos: (+1,-1,+1,-1,…)

$$i\,cos\,x = 0 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \ldots$$

- En el caso del seno, la cosa cambia. Sólo sobreviven las i elevadas a exponentes impares, es decir:

$$i\,sin\,x = i^1 \cdot \frac{1}{1!} - i^3 \cdot \frac{x^3}{3!} + i^5 \cdot \frac{x^5}{5!} - i^7 \cdot \frac{x^7}{7!} \ldots$$

$$i\,sin\,x = (i) \cdot \frac{1}{1!} - (-i) \cdot \frac{x^3}{3!} + (i) \cdot \frac{x^5}{5!} - (-i) \cdot \frac{x^7}{7!} \ldots$$

  Es decir, las i que sobreviven son sólo, eso , 'ies':

$$i\,sin\,x = (i) \cdot \frac{1}{1!} + (i) \cdot \frac{x^3}{3!} + (i) \cdot \frac{x^5}{5!} + (i) \cdot \frac{x^7}{7!} \ldots$$

Probemos ahora a sumar ambas expresiones:

$$i\cos x + i\sin x = 0 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Y como sabemos que la i en el caso del coseno es siempre 1, podremos decir que:

$$(1) \cdot \cos x + i\sin x = 0 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Es decir:

$$\cos x + i\sin x = 0 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

O lo que es lo mismo, cuando multiplicamos nuestra función de x por i, obtenemos:

$$0 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Es decir, que si multiplicamos la función x por i (arriba, en el exponente del término izquierdo), obtenemos la Identidad de Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x = 0 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

(OBSERVACIÓN. Recordemos que $e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$*, por ello, si en vez de sólo* x*, fuera* ix*,*

$e^{ix} = i^0\frac{x^0}{0!} + i^1\frac{x^1}{1!} + i^2\frac{x^2}{2!} + i^3\frac{x^3}{3!} + \cdots$*, en definitiva:* $\cos x + i\sin x$*)*

Así, volviendo al punto en que estábamos, puesto que la forma de un número complejo es:

$$z = x + iy$$

Si exponenciamos a ambos lados de la expresión, tendremos que:

$$e^z = e^{x+iy} \rightarrow e^x \cdot e^{iy} \rightarrow e^x \cdot (\cos y + i\sin y)$$

(OBSERVACIÓN. Véase como vamos "arrinconando" la parte compleja i*)*

Es decir, una vez dicho todo esto, para resolver nuestra E.D.O. con solución del tipo $r = \begin{cases} 3+2i \\ 3-2i \end{cases}$, podemos avanzar con nuestra propuesta exponencial, es decir:

$$y = e^{rx}$$

Que en nuestro caso complejo es:

$$y = C_1e^{rx} + C_2e^{rx}$$

$$y = C_1e^{(3+2i)x} + C_2e^{(3-2i)x}$$

$$y = C_1e^{3x+i2x} + C_2e^{3x-i2x}$$

Sabemos que la suma en un exponente se puede expresar como el siguiente producto:

En primer lugar, recordemos que buscamos la expresión de nuestro vector (o, mejor dicho, la manifestación que de nuestro vector ven los habitantes de la superficie; por decirlo en

---

$$y = C_1 e^{3x} e^{i2x} + C_2 e^{3x} e^{-i2x}$$

Es decir, usando nuestra conocida Identidad de Euler:

$$y = C_1 e^{3x}(cos\, 2x + \ i\, sin\, 2x) + C_2 e^{3x}(cos(-2x) + \ i\, sin(-2x))$$

Al ser el coseno una función par y el seno una función impar, sabemos que:

$$cos(-\theta) = cos\, \theta$$

$$sin(-\theta) = -\, sin\, \theta$$

Que, aplicado a nuestra expresión, nos deja que:

$$y = C_1 e^{3x}(cos\, 2x + \ i\, sin\, 2x) + C_2 e^{3x}(cos(2x) - \ i\, sin(2x))$$

Que, si empezamos a factorizar:

$$y = e^{3x}(C_1\, cos\, 2x + C_1\, i\, sin\, 2x) + e^{3x}(C_2\, cos(2x) - C_2\, i\, sin(2x))$$

$$y = e^{3x}[C_1\, cos\, 2x + C_1\, i\, sin\, 2x + C_2\, cos(2x) - C_2\, i\, sin(2x)]$$

$$y = e^{3x}[(C_1 + C_2)\, cos\, 2x + (iC_1 - iC_2)\, sin\, 2x]$$

Donde:

- $C_1 + C_2$ es una constante → C_α
- $iC_1 - iC_2$ también es una constante por mucha i que tenga incluído → C_β

Es decir:

$$y = e^{3x}\big[(C_\alpha)\, cos\, 2x + \big(C_\beta\big)\, sin\, 2x\big]$$

Éste resultado, en definitiva, es la solución general a la E.D.O. que habíamos planteado. Efectivamente queda en función de x y las constantes C_α, C_β. Sin embargo, como veremos en el hilo principal de nuestras digresiones, cuando estamos solucionando un problema con condiciones iniciales, podremos obtener una solución particular aportando valores a estas cantidades que aquí dejamos sin despejar.

(OBSERVACIÓN. Todo esto se suele ahorrar con la siguiente fórmula)

$$r = a + bi$$

$$y = e^{ax}(C_1\, cos\, bx + C_2\, sin\, bx)$$

términos kantianos, el fenómeno que observan los habitantes de la superficie de nuestro nouménico vector 3D) una forma similar a ésta, por supuesto en 2D:

$$\vec{A} = A^{\theta} e_{\theta} + A^{\varphi} e_{\varphi}$$

Es decir, necesitamos conocer las dos componentes: A^{θ} y A^{φ}.

Para comenzar con nuestra tarea centremos nuestra atención en la primera ecuación diferencial de nuestro sistema y sometámosla a la siguiente operación (en azul):

$$\partial_{\varphi} \cdot \left(\partial_{\varphi} A^{\theta} - \frac{\sqrt{3}}{4} A^{\varphi} \right) = \partial_{\varphi} \cdot 0$$

$$\partial_{\varphi}^{2} A^{\theta} - \frac{\sqrt{3}}{4} \partial_{\varphi} A^{\varphi} = 0$$

Y como en la segunda tenemos que:

$$\partial_{\varphi} A^{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{3}} A^{\theta} = 0$$

$$\partial_{\varphi} A^{\varphi} = -\frac{1}{\sqrt{3}} A^{\theta}$$

Podemos sustituir en la primera de manera que:

$$\partial_{\varphi}^{2} A^{\theta} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} A^{\theta} \right) = 0$$

$$\partial_{\varphi}^{2} A^{\theta} + \frac{1}{4} A^{\theta} = 0$$

Que es una ecuación diferencial de segundo ¿orden? perfectamente identificable con la forma de una ecuación de segundo grado:

$$au'' + bu' + cu = 0$$

Cuya solución concreta en nuestro caso es:

$$x^{2} + \frac{1}{4} = 0$$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{1}{4}}$$

Es decir, que tenemos raíces complejas:

$$x = \pm i \frac{1}{2}$$

Que, al ser un complejo, es un número con la forma:

$$\alpha + i\beta$$

Donde:

$$\alpha = 0 \qquad \text{y} \qquad \beta = \frac{1}{2}$$

Como sabemos, para estos casos, el tipo de solución que se aplica es:

(OBSERVACIÓN. La función u *buscada es* A^θ*)*

$$A^\theta = e^{\alpha\varphi}(C_1\, cos(\beta\varphi) + C_2\, sin(\beta\varphi)) \qquad [141]$$

Y sustituyendo los valores α y β que tenemos:

$$A^\theta = e^{0\varphi}\left(C_1\, cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + C_2\, sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

$$A^\theta = (1)\cdot\left(C_1\, cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + C_2\, sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

$$A^\theta = C_1\, cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + C_2\, sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Llegados a este punto podemos despejar A^φ. Recordemos que teníamos una primera ecuación diferencial:

$$\partial_\varphi A^\theta - \frac{\sqrt{3}}{4}A^\varphi = 0$$

Despejemos en ella la *función* A^φ:

$$A^\varphi = \frac{4}{\sqrt{3}}\partial_\varphi A^\theta$$

Y como ya conocemos A^θ, podemos desarrollar:

$$A^\varphi = \frac{4}{\sqrt{3}}\partial_\varphi\left(C_1\, cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + C_2\, sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

$$A^\varphi = \tfrac{4}{\sqrt{3}}\left(C_1\left(-\tfrac{1}{2}\right) sin\left(\tfrac{\varphi}{2}\right) + C_2\left(\tfrac{1}{2}\right) cos\left(\tfrac{\varphi}{2}\right)\right) \qquad [142]$$

$$A^\varphi = C_1\frac{-2}{\sqrt{3}} sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + C_2\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Y ya tendríamos, con carácter general, la evolución de las componentes de un vector cualquiera paralelamente transportable.

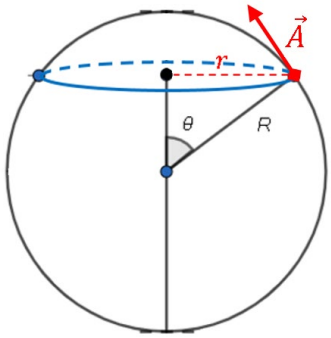
Como decimos, se trata de una solución general, es decir, una expresión que necesita de una serie de parámetros que permitan materializarla. Según sean las constantes, se estará trabajando con un tipo de vector u otro (y viceversa). Para ver esto, para concretar en una situación particular (con un vector particular) que se va a mover paralelamente (visto desde 'fuera' pero con una representación-manifestación 'dentro') propongamos una serie de

[141] Recuérdese que φ es la variable independiente por la que se deriva.

[142] Nótese en rojo la aplicación de la regla de la cadena.

condiciones iniciales, a saber: la definición misma de un vector concreto y veamos qué constantes nos arroja.

Imaginemos un vector $\vec{A}$ (en una posición inicial: $\theta = \frac{\pi}{3}, \varphi = 0$) como el siguiente:



Dicho vector empezará a desplazarse a lo largo de la trayectoria marcada en azul y deberá mantener su orientación de manera que permanezca paralelo ***(insistimos, paralelo visto desde 'fuera', para el observador omnisciente 3D de manera que tendrá una manifestación 'dentro' para el habitante de la superficie de la esfera).***

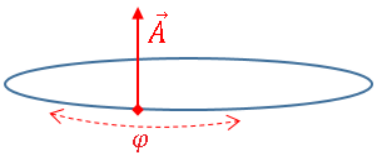
¿Qué vector es éste que estamos proponiendo como condición inicial? Muy simple, vemos que sólo tiene una componente en θ, es decir, sólo apunta "hacia el norte".

(OSERVACIÓN. Muy importante. Ese primer vector, en esa condición inicial, en la medida en que el vector "puro" es perfectamente tangente a la superficie de la esfera, la definición del vector entre ambos observadores (el externo y el interno) podría coincidir sin problemas)

Como en nuestro esquema θ tiene sentido positivo desde arriba hacia abajo, resulta que nuestro vector, que vamos a suponer unidad, se define como:

$$\vec{A} = (-1) \cdot e_\theta + 0 \cdot e_\varphi$$

Una vez definido el vector, la dimensión θ, deja de tener interés para nosotros, pues el vector no se mueve ni hacia el *norte* ni hacia el *sur*, sino que se desplaza en una trayectoria que sólo está definida por φ:



Donde el recorrido de phi es:

$$\varphi = [0,2\pi] \text{ radianes}$$

El vector, pues en la posición que proponíamos sería:

$$\vec{A}_{(\varphi=0)} = (-1) \cdot e_\theta + 0 \cdot e_\varphi$$

Luego, tan sólo tenemos que igualar nuestras ecuaciones generales a estas condiciones iniciales:

$$A^{\theta} = C_1 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$A^{\varphi} = C_1 \frac{-2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + C_2 \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Es decir:

$$-1 = C_1 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$0 = C_1 \frac{-2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + C_2 \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Recordemos que en el punto de partida:

$$\varphi = 0$$

Luego (por ejemplo, usemos la ecuación segunda para despejar el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas):

$$0 = C_1 \frac{-2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + C_2 \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$0 = C_1 \frac{-2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{0}{2}\right) + C_2 \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{0}{2}\right)$$

$$0 = C_1 \frac{-2}{\sqrt{3}} \cdot (0) + C_2 \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (1)$$

$$0 = C_2 \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Donde, el único modo en que se puede cumplir esta igualdad es, ciertamente, que:

$$C_2 = 0$$

Y, solucionando el sistema, necesariamente:

$$C_1 = -1$$

Luego:

$$A^{\theta} = C_1 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \rightarrow -\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$A^{\varphi} = C_1 \frac{-2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + C_2 \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Por lo que, finalmente, para cualquier punto de φ, la ecuación que define al vector será:

$$\vec{A} = A^{\theta} e_{\theta} + A^{\varphi} e_{\varphi}$$

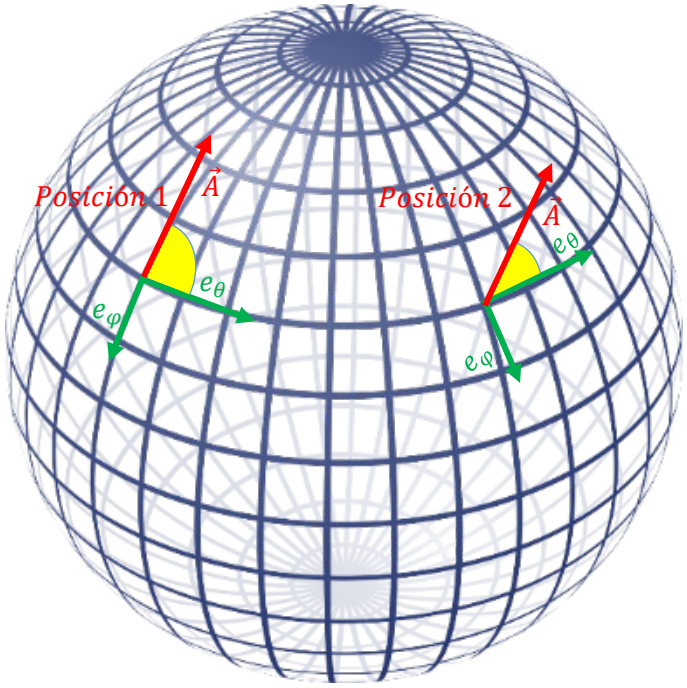
$$\vec{A} = -\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) e_\theta + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) e_\varphi$$

Que es la solución definitiva a nuestro problema de Transporte Paralelo de un vector en un espacio bidimensional curvo.

Bien, pero, recordemos: el vector es invariante para nosotros, observadores omniscientes que miramos desde nuestras privilegiadas (y externas) 3D. Pero ¿qué ve un habitante de la superficie de la esfera? Veamos qué fenómeno tan curioso y aparentemente raro pero que, por otro lado, es perfectamente predecible a menos que pensemos un poco. Antes de nada, recordemos qué sucedía con magnífico experimento del Péndulo de Jean Bernard Léon Foucault:

- Para nosotros, observadores externos, el plano de oscilación del péndulo permanece fijo.
- Para alguien en la superficie del planeta, el plano de oscilación va girando según rote la tierra.

Aunque el fenómeno no es exactamente el mismo, es interesante tener esto en m ente para tratar de vislumbrar las diferencias de observación que se producen entre un observador externo y otro interno al sistema. Así, teniendo esto en mente y, antes de hacer desarrollos algebraicos, para ir centrando nuestra atención, anticipemos un resultado visual. Como sabemos que la base esférica es una base coordenada que cambia según sea el punto donde miremos, observemos qué sucedería (en la superficie de la esfera) ante el transporte paralelo (realmente paralelo[143]) de un vector:



[143] Téngase en cuenta que es normal que busquemos una entidad matemática que sea realmente invariante. Estamos buscando, eso, un invariante… ¡un punto de anclaje!

(OBSERVACIÓN. Hemos exagerado un poco la evolución de la base esférica para que percibamos bien el "efecto" de rotación que observaría un habitante de la superficie de la esfera. Muy importante: obsérvese que el vector $\vec{A}$ es totalmente paralelo a sí mismo en ambas posiciones (bajo nuestro punto de vista externo a la esfera) pero, también, hemos de hacer hincapié en la importancia de lo que sucede con el arco que hace dicho vector con la base en diferentes coordenadas y que hemos marcado en amarillo)

Ahora hagamos una serie de desarrollos algebraicos y, después, metámonos, ya plenamente, en la piel de un habitante de la superficie de la esfera, del espacio bidimensional curvo, e identifiquemos cómo se ve, desde dentro, el transporte *realmente* paralelo de un vector $\vec{A}$.

Puesto que vamos a estar a caballo entre dos puntos de vista diferentes, el externo y el interno, recordemos cómo se definía la base esférica según la base cartesiana:

$$e_r = \sin\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_x + \sin\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_y + \cos\theta \;\; e_z$$

$$e_\theta = r \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_x + r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_y - r \cdot \sin\theta \;\; e_z$$

$$e_\varphi = -r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_x + r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_y$$

Puesto que vamos a trabajar en el plano tangente, y e_r no es coplanar a los otros dos vectores de la base, estaremos de acuerdo en que la componente normal del "vector puro" debe ser eliminada por innecesaria en nuestros cálculos.

Por otro lado, para facilitar los cálculos, imaginemos que estamos trabajando en una esfera en la que el radio es 1. Así, podremos redefinir nuestra base esférica para el plano tangente como:

$$e_\theta = \cos\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_x + \cos\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_y - \sin\theta \;\; e_z$$

$$e_\varphi = -\sin\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_x + \sin\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_y$$

Para conocer la componente de un "vector puro", su proyección en la línea de un vector base, bastaría con multiplicar dicho "vector puro" por dicha base de manera que, gracias al comportamiento de la δ de Krönecker, obtendríamos el módulo de la proyección del "vector puro" en dicha dirección, es decir, su componente. Veamos esto en las dos posiciones que hemos planteado en nuestro esquema visual previo:

- Posición 1. $\theta = \frac{\pi}{3}, \varphi = 0, \vec{A} = (-1) \cdot e_\theta + (0) \cdot e_\varphi$.
  En primer lugar, supongamos (es el mismo ejemplo que ya hemos usado) que la proyección del "vector puro" está perfectamente alineada con e_θ y no tiene ninguna componente, ningún desplazamiento en el vector base e_φ, (¿qué nos lo impide?) es decir:

$$\vec{A} = A^\theta e_\theta + A^\varphi e_\varphi$$
$$\vec{A} = (-1) \cdot e_\theta + (0) \cdot e_\varphi$$

Multipliquemos las componentes del "vector puro" con su vector base para conocer las componentes de la proyección del mismo en el plano tangente (obviamente sería innecesario pues hemos establecido esta configuración del vector como punto de inicio propuesto y conocido, pero procedamos):

- Veamos qué sucede con la componente A^{θ}:

$$\vec{A} \cdot e_{\theta} = A^{\theta}$$
$$\left[(-1) \cdot e_{\theta} + (0) \cdot e_{\varphi}\right] \cdot e_{\theta} = A^{\theta}$$

Sustituyamos ahora la base esférica por su definición cartesiana:

$$\left[(-1) \cdot () + (0) \cdot e_{\varphi}\right] \cdot e_{\theta} = A^{\theta}$$

$$[(-1) \cdot (\cos\theta \cdot \cos\varphi \quad e_x + \cos\theta \cdot \sin\varphi \quad e_y - \sin\theta \quad e_z) +$$
$$(0) \cdot (-\sin\theta \cdot \sin\varphi \quad e_x + \sin\theta \cdot \cos\varphi \quad e_y)]$$
$$\cdot (\cos\theta \cdot \cos\varphi \quad e_x + \cos\theta \cdot \sin\varphi \quad e_y - \sin\theta \quad e_z) = A^{\theta}$$

$$[(-1) \cdot (\cos\theta \cdot \cos\varphi \quad e_x + \cos\theta \cdot \sin\varphi \quad e_y - \sin\theta \quad e_z)$$
$$\cdot (\cos\theta \cdot \cos\varphi \quad e_x + \cos\theta \cdot \sin\varphi \quad e_y - \sin\theta \quad e_z) = A^{\theta}$$

De cuyo desarrollo resulta que (despejemos los senos y cosenos pues conocemos θ y φ):

$$\left[(-1)\left(\frac{1}{2} \cdot 1 \quad e_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 \quad e_y - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad e_z\right)\right] \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \quad e_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 \quad e_y - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad e_z\right) = A^{\theta}$$

$$\left[\left(\frac{-1}{2} \cdot 1 \quad e_x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 \quad e_y + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad e_z\right)\right]^{144} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \quad e_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 \quad e_y - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad e_z\right) = A^{\theta}$$

De lo que, por las propiedades del δ de Krönecker, sólo sobrevive:

$$\left(\frac{-1}{4} - \frac{3}{4}\right) = A^{\theta}$$
$$\frac{-4}{4} = -1 = A^{\theta}$$

Que se corresponde exactamente con lo que teníamos de punto de partida:

$$\vec{A} = A^{\theta} e_{\theta} + A^{\varphi} e_{\varphi}$$

[144] En rojo hemos marcado el vector $\vec{A}$ expresado en coordenadas cartesianas. Puesto que sólo es $-e_{\theta}$, la propia definición de la base, pero cambiada de signo, es la misma definición del vector.

$$\vec{A} = (-1) \cdot e_\theta + (0) \cdot e_\varphi$$

- Veamos qué sucede con la componente A^φ, puesto que esto no deja de ser un razonamiento circular, podemos anticipar que nos dará igual a cero. El vector es puramente e_θ.

$$\left[\left(\frac{-1}{2} \cdot 1 \;\; e_x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 \;\; e_y + \frac{\sqrt{3}}{2} \;\; e_z\right)\right] \cdot$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 \;\; e_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \;\; e_y\right) = A^\varphi$$

De donde no sobrevive nada, es decir que, efectivamente:

$$A^\varphi = 0$$

Veamos ahora qué sucede en la Posición 2.

- Posición 2. $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\varphi = 0+\Delta$, $\vec{A} = (-1) \cdot e_\theta + (0) \cdot e_\varphi$. [145]

Veamos la componente, de la proyección, A^θ en esta nueva posición:

$$\vec{A} \cdot e_\theta = A^\theta$$

$$\left[(-1) \cdot e_\theta + (0) \cdot e_\varphi\right]\ ^{146} \cdot e_\theta = A^\theta$$

$$\left[\left(\frac{-1}{2} \cdot 1 \;\; e_x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 \;\; e_y + \frac{\sqrt{3}}{2} \;\; e_z\right)\right] \cdot$$

$$\left(\cos\theta \cdot \cos\varphi \;\; e_x + \cos\theta \cdot \sin\varphi \;\; e_y - \sin\theta \;\; e_z\right) = A^\theta$$

[145] Recordemos: el "vector puro" $\vec{A}$ sigue siendo el mismo. Por otro lado, al ángulo $\varphi = 0$ le hemos sumado una cierta cantidad Δ.

[146] Recordemos, en consonancia con la nota anterior, que el "vector puro" $\vec{A}$ no ha cambiado, por lo que podemos usar la misma definición cartesiana que ya tenemos (página anterior en rojo). Recordemos que sólo era e_θ (de hecho, -e_θ). Este punto es aparentemente trivial pero importante. Aquí es donde de verdad estamos manejándonos entre dos mundos. El vector no ha cambiado, no está en función del cambio de theta o phi, por eso usamos la misma definición que ya teníamos, fija y constante, para $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\varphi = 0$. Si lo hubiéramos hecho cambiar con el incremento de phi, no estaríamos hablando de un vector invariante para un observador omnisciente 3D.

$$\left[\left(\frac{-1}{2}\cdot 1\ \ e_x+\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ e_z\right)\right]\cdot$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\cos\varphi\ \ e_x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\varphi\ \ e_y-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ e_z\right)=A^{\theta}$$

$$\left(\frac{-1}{4}\cdot\cos\varphi\ \ -\frac{3}{4}\right)$$

Que será una cierta cantidad en función del ángulo φ que ahora desconocemos pero del podemos afirmar que $\varphi > 0\ rads$.

(OBSERVACIÓN. Me he llevado un buen rato pensando sobre si esta componente debía cambiar… me había bloqueado en que no debía cambiar pero… ¡claro que tiene que cambiar! La proyección en el plano tangente del "vector puro" va girando (como veremos a continuación) por lo que la proyección, puramente e_θ en un principio, debe ir "cediendo magnitud" desde e_θ a e_φ.. ese es giro. De hecho en tanto que phi crezca (al menos hasta llegar a $\frac{\pi}{2}$) la proyección en el eje e_θ debe reducirse en beneficio del eje e_φ, aunque el módulo total de la proyección se mantenga constante. Ciertamente: está girando)

Veamos, finalmente, la componente, de la proyección, A^{φ} en esta nueva posición 2:

$$\vec{A}\cdot e_\varphi = A^{\varphi}$$
$$\left[(-1)\cdot e_\theta+(0)\cdot e_\varphi\right]\cdot e_\varphi = A^{\varphi}$$

$$\left[\left(\frac{-1}{2}\cdot 1\ \ e_x+\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ e_z\right)\right]\cdot$$
$$(-\sin\theta\cdot\sin\varphi\ \ e_x+\sin\theta\cdot\cos\varphi\ \ e_y)\ = A^{\varphi}$$

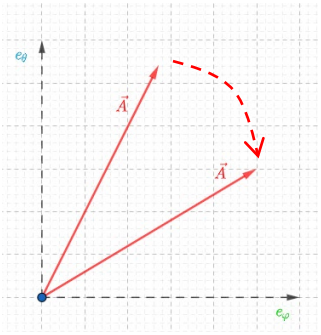
$$\left[\left(\frac{-1}{2}\cdot 1\ \ e_x+\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ e_z\right)\right]\cdot$$
$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\varphi\ \ e_x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\varphi\ \ e_y\right)\ = A^{\varphi}$$

De lo que sólo sobrevive:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sin\varphi = A^{\varphi}$$

Es decir, una magnitud dependiente de φ y que es distinta de cero o, lo que es lo mismo, como ya llevamos anticipando algunas páginas: la proyección del "vector puro" en el plano tangente, es decir, la percepción que tiene el habitante de la superficie de la esfera sobre lo que observa del "vector puro" es que éste, si se mantiene realmente constante (para los

observadores omniscientes 3D) ¡***gira***![147] Es decir, para que el vector se esté transportando de manera "realmente/nouménicamente" paralela, el observador de la superficie de la esfera debe verlo girar de una determinada manera. Lo cual, tras todo lo dicho, no es de extrañar.



Obviamente en el giro indicado de $\vec{A}$ se produce un traspaso de valores desde las componentes en e_θ a las componentes en e_φ.

---

[147] Debe darse, necesariamente, que el vector puro $\vec{A}$, sea exactamente igual al completar una vuelta en la dimensión φ.

Es decir que debe darse que:

$$\vec{A}_{(\varphi=0)} = \vec{A}_{(\varphi=2\pi)}$$

Comprobémoslo:

$$\vec{A}_{(\varphi=0)} = -\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)e_\theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)e_\varphi$$

$$\vec{A}_{(\varphi=0)} = -\cos\left(\frac{0}{2}\right)e_\theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{0}{2}\right)e_\varphi$$

$$\vec{A}_{(\varphi=0)} = -\cos(0)\,e_\theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(0)\,e_\varphi$$

$$\vec{A}_{(\varphi=0)} = -(1)e_\theta + (0)e_\varphi$$

$$\vec{A}_{(\varphi=0)} = -e_\theta$$

Es decir, efectivamente, lo que ya sabíamos porque era lo que habíamos establecido. Veamos ahora cuando se ha dado una vuelta completa:

$$\vec{A}_{(\varphi=2\pi)} = -\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)e_\theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)e_\varphi$$

$$\vec{A}_{(\varphi=2\pi)} = -\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right)e_\theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)e_\varphi$$

$$\vec{A}_{(\varphi=2\pi)} = -\cos(\pi)\,e_\theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\pi)\,e_\varphi$$

$$\vec{A}_{(\varphi=2\pi)} = -\cos(\pi)\,e_\theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\pi)\,e_\varphi$$

$$\vec{A}_{(\varphi=2\pi)} = -(-1)e_\theta + (0)e_\varphi$$

$$\vec{A}_{(\varphi=2\pi)} = e_\theta$$

La proyección del vector $\vec{A}$ ha girado, desde el punto de vista del habitante de la superficie de la esfera $180º$.

Por último, para cerrar este capítulo en el que hemos estudiado el comportamiento de un vector que se traslada de manera paralela, veamos una consecuencia de todo esto que estamos diciendo: ***la relación existente entre el Transporte Paralelo y las Geodésicas***.

Recordemos la ecuación que define una geodésica y realicemos una serie de reflexiones:

$$\frac{du^m_{(\lambda)}}{ds} + \frac{1}{2}(g^{mi})[\partial_p g_{ik} + \partial_k g_{ip} - \partial_i g_{pk}]u^p_{(\lambda)}u^k_{(\lambda)} = 0$$

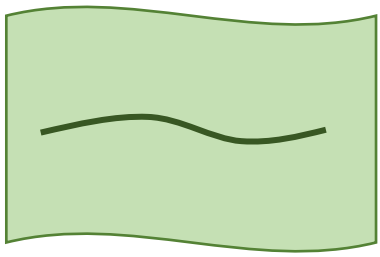
En primer lugar, recordemos que hemos definido que un vector arbitrario $\vec{A}$ se dice paralelamente transportado si se cumple la siguiente expresión:

$$u^\alpha \nabla_\alpha A^\beta = 0$$

Recordemos, también[148], que u^α era una "velocidad", la derivada de un vector. Es decir, un vector tangente a una trayectoria. Así, llegados a este punto vamos a preguntarnos una cosa que puede parecer extraña pero que, como veremos, acercará mucho las cosas entre el Transporte Paralelo y las Geodésicas. La cuestión es: ¿tiene sentido preguntarse si puede transportarse paralelamente esa "velocidad", ese vector tangente, ese u^α? Dicha pregunta, en términos algebraicos podemos expresarla como:

¿Es posible que se cumpla $u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = 0$?

Hagamos más memoria. Supongamos una variedad cualquiera en la que trazamos una trayectoria arbitraria:



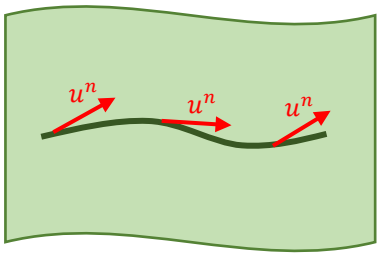
Sabemos que dicha trayectoria estará definida en esta variedad n-dimensional por las coordenadas x^n. Si parametrizamos dicha trayectoria mediante el parámetro s[149], podremos decir entonces que las coordenadas quedarán definidas como $x^n_{(s)}$ de manera que si, estudiamos el comportamiento de la trayectoria para cada diferencial de la curva, obtendremos que:

$$\frac{dx^n_{(s)}}{ds} \equiv u^n$$

[148] Véase capítulo X

[149] Recordemos del capítulo sobre las Geodésicas que cuando igualábamos a cero, en el caso dicha trayectoria especial, la parametrización se hacía con s.

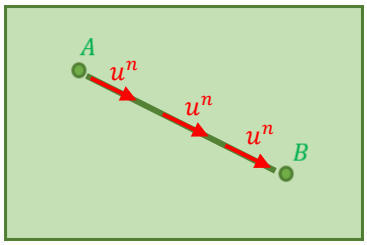
Es decir que u^n es el vector tangente a la trayectoria (por eso decíamos que era "una velocidad").



Es decir, que nuestra u^α (alpha o lo que sea) en la expresión: $u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = 0$, no es sino un vector tangente y, justamente dicha expresión, no es está preguntando acerca de qué curva satisface que el vector tangente se transporte de manera paralela, constante, con Derivada Covariante igual a cero. En definitiva, dicha curva, será el "camino más corto", una geodésica.

Para visualizar esto, imaginemos un espacio $\mathbb{R}^2$ en el que tenemos que trazar la trayectoria más corta entre dos puntos A y B:

Ya desde el colegio diríamos que la línea recta que una a los dos puntos sería la trayectoria más corta. Pero también podríamos definirlo como aquella trayectoria que recorre un vector forzándolo a que permanezca invariante, es decir:



Es decir, que hallar la solución en que se garantice esta igualdad:

$$u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = 0$$

Es lo mismo que hallar una geodésica en una variedad curva cualquiera. Veámoslo.

$$u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = 0$$

$$u^{\alpha}\left(\frac{\partial u^{\beta}}{\partial u^{\alpha}}+\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}u^{\gamma}\right)=0$$ [150]

$$u^{\alpha}\frac{\partial u^{\beta}}{\partial u^{\alpha}}+\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}u^{\alpha}u^{\gamma}=0$$

$$\frac{du^{\alpha}_{(s)}}{ds}\frac{\partial u^{\beta}}{\partial u^{\alpha}}+\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}u^{\alpha}u^{\gamma}=0$$

Analicemos el primer término:

$$\frac{\partial u^{\beta}}{\partial u^{\alpha}}\frac{du^{\alpha}_{(s)}}{ds}$$

¿No parece una derivación por la regla de la cadena? Es decir, derivamos u^{β} respecto a una "función" u^{α} y multiplicamos por la derivada de dicha función u^{α} en base a su variable independiente "interna" s. Efectivamente, resulta que:

$$\frac{\partial u^{\beta}}{\partial u^{\alpha}}\frac{du^{\alpha}_{(s)}}{ds}\equiv\frac{du^{\beta}}{ds}$$

Es decir, que podemos expresar esto:

$$u^{\alpha}\nabla_{\alpha}u^{\beta}=0$$

Como:

$$\frac{du^{\beta}}{ds}+\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}u^{\alpha}u^{\gamma}=0$$

Y ahora, si recordamos de nuevo la Ecuación de las Geodésicas:

$$\frac{du^{m}_{(\lambda)}}{ds}+\frac{1}{2}(g^{mi})[\partial_p g_{ik}+\partial_k g_{ip}-\partial_i g_{pk}]u^{p}_{(\lambda)}u^{k}_{(\lambda)}=0$$

… ¿No vemos que hay una clara simetría (la marcamos en rojo en ambas expresiones siguientes)?

$$\frac{du^{m}_{(\lambda)}}{ds}+\frac{1}{2}(g^{mi})[\partial_p g_{ik}+\partial_k g_{ip}-\partial_i g_{pk}]u^{p}_{(\lambda)}u^{k}_{(\lambda)}=0$$

$$\frac{du^{\beta}}{ds}+\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}u^{\alpha}u^{\gamma}=0$$

Es decir, que, efectivamente, podemos afirmar que hallar: $\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}$, es lo mismo que hallar:

$$\frac{1}{2}(g^{mi})[\partial_p g_{ik}+\partial_k g_{ip}-\partial_i g_{pk}]$$

Efectivamente, vemos que los índices aún bailan un poco pero, como son libres, los podemos hacer converger exactamente para no liarnos:

[150] Decir dónde.

$$\frac{du^{\alpha}}{ds} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\delta} u^{\gamma} u^{\delta} = 0$$

$$\frac{du^{\alpha}}{ds} + \frac{1}{2}\left(g^{\alpha\beta}\right)\left[\partial_{\gamma} g_{\beta\delta} + \partial_{\delta} g_{\beta\gamma} - \partial_{\beta} g_{\gamma\delta}\right] u^{\gamma} u^{\delta} = 0$$

… de manera que, finalmente, tengamos la siguiente identidad perfectamente compatible una vez unificados los criterios de convención de índices:

$$\frac{du^{\alpha}}{ds} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\delta} u^{\gamma} u^{\delta} = 0$$

Es decir, que transportar paralelamente un vector a lo largo de una trayectoria (curva) en un espacio (curvo) es lo mismo que encontrar el vector que se transporta invariante a lo largo de una geodésica donde:

$$\Gamma^{\alpha}_{\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(g^{\alpha\beta}\right)\left[\partial_{\gamma} g_{\beta\delta} + \partial_{\delta} g_{\beta\gamma} - \partial_{\beta} g_{\gamma\delta}\right]$$ [151]

[151] Ojo, esto es válido siempre que no haya torsión o lo que es lo mismo: que la derivada covariante de la métrica sea cero: $\nabla g = 0$ (explicar qué es la torsión… en definitiva hace referencia a que el espacio no esté curvado "con aceleración"). El caso es que la naturaleza de nuestro universo no parece que esté "torsionada". Así, si no hay Torsión ($\nabla g = 0$), podríamos calcular los Símbolos de Christoffel mediante los valores de la métrica y, por eso, a esta igualdad (en caso de $\nabla g = 0$) se la puede referir como ***CONEXIÓN MÉTRICA***. Cuando esto se pueda hacer, cuando podamos calcular de esta manera los Símbolos de Christoffel, entonces existe conexión métrica.
Esto tiene todo el sentido del mundo. Si la métrica es constante, podremos hacer un estudio del cambio de un vector a lo largo del cambio de coordenadas y calcular los símbolos de Christoffel desde la propia métrica, pues no habrá ("en puntos intermedios") comportamientos "raros", "deformados", "acelerados"…
Recordemos que los Símbolos de Christoffel no son sino las componentes de un vector (e^{α}, donde α es un índice que se recorre, porque podemos estar hablando de las diferentes componentes de vector) que cambia según cambia una coordenada (x^{β}, donde β es un índice que se recorre porque podemos estar hablando de la evolución en diferentes coordenadas) y que se refleja en las diferentes componentes ($\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$) que el vector resultante tiene en los vectores base de la nueva base (e^{γ}, donde γ es un índice que se recorre porque la base puede estar compuesta de varios vectores linealmente independientes).

$$\frac{\partial e_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} e_{\gamma} \rightarrow \textit{por ejemplo} \rightarrow \frac{\partial e_{y}}{\partial x} = \Gamma^{r}_{yx} e_{r} + \Gamma^{\theta}_{yx} e_{\theta} + \Gamma^{\varphi}_{yx} e_{\varphi} \rightarrow \textit{por ejemplo} \rightarrow \frac{dA_{x}}{dy} = \Gamma^{r}_{yx} e_{r} + \Gamma^{\theta}_{yx} e_{\theta} + \Gamma^{\varphi}_{yx} e_{\varphi}$$

Donde lo que se está viendo es que:

- La componente x del vector $\vec{A}$… cambia según recorremos la coordenada y
- Dando como resultado una nueva definición en otra base como, por ejemplo:

$$= 5 \cdot e_{r} + 6 \cdot e_{\theta} + 7 \cdot e_{\varphi}$$

Derivada Covariante de un Tensor.

Recordemos que hemos estado estudiando el cambio de un vector cualquiera e_α (puede ser un vector normal y corriente, o un vector que forma parte de una base, … lo que sea).

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma \quad [152]$$

Si nos fijamos, en este caso, nos hemos esforzado en poner el índice del vector del numerador como subíndice para indicar que se trata de un "vector expresado de manera covariante". ¿Mantendría la expresión la misma forma si el vector cuyo cambio estudiamos estuviera en la forma contravariante? Para verlo, usemos el siguiente procedimiento abreviado. Recordemos que definíamos la relación entre la base dual y la base natural mediante el Delta de Krönecker:

$$e^\alpha \cdot e_\beta = \delta^\alpha_\beta$$

Si derivamos[153] esta ecuación en ambos lados, en base a una variable independiente:

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\left(e^\alpha \cdot e_\beta\right) = \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\left(\delta^\alpha_\beta\right)$$

Sabemos que el Delta de Könecker que hemos marcado en rojo adoptará valores que se moverán en el rango $[1,0]$, es decir que, adopte el valor que adopte, será un valor constante y, por ello, podremos afirmar que el valor de dicha derivada es cero, de manera que:

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\left(e^\alpha \cdot e_\beta\right) = 0$$

Desarrollemos, ahora, la derivada del producto:

$$\frac{\partial e^\alpha}{\partial x^\gamma} \cdot e_\beta + e^\alpha \cdot \frac{\partial e_\beta}{\partial x^\gamma} = 0$$

Es decir, que, necesariamente:

$$\frac{\partial e^\alpha}{\partial x^\gamma} \cdot e_\beta = -e^\alpha \cdot \frac{\partial e_\beta}{\partial x^\gamma}$$

Sabemos que la parte que hemos marcado en rojo, es decir, la derivada de un vector en base a una coordenada, puede ser expresada (como hemos hecho al inicio de esta página) como una combinación lineal de los vectores de una base determinada, es decir[154]:

---

[152] Téngase en cuenta que el hecho de que hasta el momento el índice estuviera arriba o abajo no estaba indicando contravarianza o covarianza. Tan sólo se refería a las componentes, fueran del tipo que fueran. Por otro lado, recordemos que la derivada de un vector es otro vector que se puede expresar (lo vimos en la última nota del capítulo anterior) como una combinación lineal de alguna base vectorial.

[153] Debe ser una derivación parcial puesto que estamos expresando el vector y las coordenadas con índices, es decir, multidimensionalmente.

[154] Obviamente, tenemos que renombrar índices para que no haya confusiones (nos referimos a que no vamos a usar los mismos índices que usamos al inicio de la página).

$$\frac{\partial e_\beta}{\partial x^\gamma} = \Gamma^\rho_{\beta\gamma} e_\rho$$

Por lo que podremos reescribir $\frac{\partial e^\alpha}{\partial x^\gamma} \cdot e_\beta$ como:

$$\frac{\partial e^\alpha}{\partial x^\gamma} \cdot e_\beta = -e^\alpha \cdot \Gamma^\rho_{\beta\gamma} e_\rho$$

$$\frac{\partial e^\alpha}{\partial x^\gamma} \cdot e_\beta = -\Gamma^\rho_{\beta\gamma} \cdot e^\alpha \cdot e_\rho$$

$$\frac{\partial e^\alpha}{\partial x^\gamma} \cdot e_\beta = -\Gamma^\rho_{\beta\gamma} \cdot \delta^\alpha_\rho$$

Y esto sólo sobrevivirá, sólo tendrá un resultado diferente de cero, cuando $\alpha = \rho$, en cuyo caso el Delta de Krönecker es igual a uno y, por lo tanto, podremos reescribir como:

$$\frac{\partial e^\alpha}{\partial x^\gamma} \cdot e_\beta = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$$

Ahora si nos fijamos, ¿qué estamos haciendo en el término izquierdo? Multiplicar un vector (pues estaremos de acuerdo en que la derivada de un vector es otro vector) por una base (en este caso natural). Recordemos que cuando queríamos conocer la componente de un vector en una base determinada, multiplicábamos dicho vector por la base dual/natural correspondiente (en definitiva, la contraria) y obteníamos el escalar oportuno (Krönecker se encarga de todo, recordémoslo, es obvio).

$$\vec{A} \cdot e_\beta = A_\beta \qquad [155]$$

Así, si quisiéramos encontrar la expresión definitiva de $\frac{\partial e^\alpha}{\partial x^\gamma}$, podremos decir que si:

$$\frac{\partial e^\alpha}{\partial x^\gamma} \cdot e_\beta = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$$

Entonces, si, multiplicamos en ambos lados de la expresión por e^β:

$$e^\beta \cdot \left(\frac{\partial e^\alpha}{\partial x^\gamma} \cdot e_\beta\right) = \left(-\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\right) \cdot e^\beta$$

… por Krönecker, tenemos que:

$$\frac{\partial e^\alpha}{\partial x^\gamma} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} e^\beta \qquad [156]$$

---

[155] Componente que, obviamente, acompañará a un vector base con la forma: e^β.

[156] Importante. No ha sido poco el tiempo que hemos gastado tratando de corregir y explicar las apariciones, tal y como se recoge en distintos manuales, de diferentes variaciones en los índices inferiores del Símbolo de Christoffel para esta expresión. Los hemos visto aparecer alternativamente como:

$$\frac{\partial e^\alpha}{\partial x^\gamma} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} e^\beta \qquad // \qquad \frac{\partial e^\alpha}{\partial x^\gamma} = -\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} e^\beta$$

Es decir, que ya tenemos la expresión de la derivada de una base cualquiera ya sea bajo una forma covariante o contravariante[157]:

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma$$

$$\frac{\partial e^\alpha}{\partial x^\beta} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} e^\gamma \quad {}^{158}$$

Y, ahora, sabiendo esto, procedamos a calcular la ***Derivada Covariante***[159] ***de un Tensor***.

- ***Para ello, en primer lugar, definamos un Tensor de tipo doblemente contravariante*** $(\mathbf{2},\mathbf{0})$[160] ***cualquiera:***

$$\overline{T} = T^{\alpha\beta} \cdot e_\alpha \otimes e_\beta$$

(ojo, el producto tensorial no era un bloque en sí mismo? Por qué se deriva como si fueran elementos de un producto escalar normal y corriente?)

Derivemos ahora este producto aplicando la regla de la derivada de un producto:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial (T^{\alpha\beta})}{\partial x^\gamma} \cdot e_\alpha \otimes e_\beta + T^{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial (e_\alpha)}{\partial x^\gamma} \otimes e_\beta + T^{\alpha\beta} \cdot e_\alpha \otimes \frac{\partial (e_\beta)}{\partial x^\gamma}$$

Claro, hemos tardado en recordar que los Símbolos de Christoffel son perfectamente simétricos e invariantes ante cambios de orden en sus índices inferiores (véase nota 109)... siempre que estemos en un espacio sin Torsión (ojo a esto).

[157] Para facilitar una compresión simétrica de la disposición de los índices vamos a unificarlos: sólo usaremos α, β, γ.

[158] Importante estar atentos al signo negativo y a la disposición de los índices (arriba/abajo). El asunto no es baladí.

[159] Recordemos que la Derivada Covariante de un vector $\vec{A} = A^\alpha \cdot e_\alpha$ era la derivada de un producto en el que ambos factores son cambiantes (ninguno de ellos es constante):

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} \cdot e_\alpha + A^\alpha \cdot \frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta}$$
$$= \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} \cdot e_\alpha + A^\alpha \cdot \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma$$

Con índices que podíamos renombrar y llegar a:

$$= \frac{\partial A^\gamma}{\partial x^\beta} \cdot e_\gamma + A^\alpha \cdot \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma$$
$$= \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial x^\beta} + A^\alpha \cdot \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\right) \cdot e_\gamma$$

$$= \left(\nabla_\beta A^\gamma\right) e_\gamma$$

Con los tensores procederemos igualmente pues para que la derivada de un tensor sea otro tensor, la derivada que se aplique no puede ser una derivada parcial ordinaria sino que debe ser una Derivada Covariante.

[160] Dos índices arriba y ninguno abajo.

Tratemos ahora de simplificar y reescribir nuestra expresión usando las conclusiones que tenemos del principio de este epígrafe. Así:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{\partial (T^{\alpha\beta})}{\partial x^{\gamma}} \cdot e_{\alpha} \otimes e_{\beta} + T^{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial (e_{\alpha})}{\partial x^{\gamma}} \otimes e_{\beta} + T^{\alpha\beta} \cdot e_{\alpha} \otimes \frac{\partial (e_{\beta})}{\partial x^{\gamma}}$$

$$= \partial_{\gamma} T^{\alpha\beta} e_{\alpha} \otimes e_{\beta} + T^{\alpha\beta} \cdot \left(\Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} \cdot e_{\sigma}\right) \otimes e_{\beta} + T^{\alpha\beta} \cdot e_{\alpha} \otimes \left(\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} \cdot e_{\delta}\right)$$

Lo siguiente que vamos a tratar de hacer es sacar como factor común el producto tensorial ($e_{\alpha} \otimes e_{\beta}$) entre vectores base. Para ello tendremos que tratar de homogeneizar los índices de manera ordenada y en cadena. Replanteemos el asunto:

$$= \partial_{\gamma} T^{\alpha\beta} e_{\alpha} \otimes e_{\beta} + T^{\alpha\beta} \cdot \Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} \cdot e_{\sigma} \otimes e_{\beta} + T^{\alpha\beta} \cdot e_{\alpha} \otimes \Gamma^{\cdot\delta}_{\beta\gamma} e_{\delta}$$

Trabajemos sobre la parte verde. Tratemos de que σ sea α. Para ello, lo que ahora es α, y puesto que σ es índice perfectamente libre, ad hoc, no usado antes, podremos intercambiarlos (conservando siempre las relaciones en cadena que ya se hayan podido ocasionar). Así, el término verde *reordenado* será:

$$\Gamma^{\alpha}_{\sigma\gamma} \cdot T^{\sigma\beta} \cdot e_{\alpha} \otimes e_{\beta}$$

Vamos ahora con el término azul:

$$T^{\alpha\beta} \cdot e_{\alpha} \otimes \Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} e_{\delta}$$

Podemos intercambiar β por δ sin que se produzca interferencia alguna, pues δ, al igual que sucedía con sigma, es totalmente libre. Es decir:

$$T^{\alpha\delta} \cdot e_{\alpha} \otimes \Gamma^{\beta}_{\delta\gamma} e_{\beta}$$

Que reordenamos como:

$$\Gamma^{\beta}_{\delta\gamma} \cdot T^{\alpha\delta} \cdot e_{\alpha} \otimes e_{\beta}$$

Y, ahora, ya tendríamos la posibilidad de sacar factor común:

$$= \partial_{\gamma} T^{\alpha\beta} \cdot e_{\alpha} \otimes e_{\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\gamma} \cdot T^{\sigma\beta} \cdot e_{\alpha} \otimes e_{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\delta\gamma} \cdot T^{\alpha\delta} \cdot e_{\alpha} \otimes e_{\beta}$$

Es decir:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial x^{\gamma}} = \left(\partial_{\gamma} T^{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\gamma} T^{\sigma\beta} + \Gamma^{\beta}_{\delta\gamma} T^{\alpha\delta}\right) \cdot e_{\alpha} \otimes e_{\beta}$$

Donde, lo que realmente es la Derivada Covariante del Tensor es lo que hemos marcado en azul. Esto es obvio. Recordemos nuestro tensor:

$$\overline{T} = T^{\alpha\beta} \cdot e_{\alpha} \otimes e_{\beta}$$

Es decir, era una "componente": $T^{\alpha\beta}$ multiplicada escalarmente por una "base tensorial": $e_{\alpha} \otimes e_{\beta}$.

Igualmente, como la Derivada Covariante de un Tensor sigue siendo un tensor[161], la Derivada Covariante del Tensor será la Derivada Covariante de la "componente del tensor" por la misma "base tensorial", es decir, ciertamente:

$$\overline{T} = T^{\alpha\beta} \cdot e_\alpha \otimes e_\beta$$

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial x^\gamma} = \left(\partial_\gamma T^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} T^{\sigma\beta} + \Gamma^\beta_{\delta\gamma} T^{\alpha\delta}\right) \cdot e_\alpha \otimes e_\beta$$

Por lo que podemos definir la Derivada Covariante[162] de un Tensor de tipo $(2,0)$ como:

$$\nabla_\gamma T^{\alpha\beta} \equiv \partial_\gamma T^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} T^{\sigma\beta} + \Gamma^\beta_{\delta\gamma} T^{\alpha\delta}$$

- ***Procedamos ahora con un Tensor doblemente covariante, es decir, de tipo*** $(\mathbf{0}, \mathbf{2})$.

Supongamos un Tensor (0,2) cualquiera:

$$\overline{T} = T_{\alpha\beta} \cdot e^\alpha \otimes e^\beta$$

Desarrollemos la derivada del producto:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial (T_{\alpha\beta})}{\partial x^\gamma} \cdot e^\alpha \otimes e^\beta + T_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial (e^\alpha)}{\partial x^\gamma} \otimes e^\beta + T_{\alpha\beta} \cdot e^\alpha \otimes \frac{\partial (e^\beta)}{\partial x^\gamma} \quad [163]$$

$$= \partial_\gamma T_{\alpha\beta} \cdot e^\alpha \otimes e^\beta + T_{\alpha\beta} \cdot \left(-\Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} \cdot e^\sigma\right) \otimes e^\beta + T_{\alpha\beta} \cdot e^\alpha \otimes \left(-\Gamma^\beta_{\delta\gamma} \cdot e^\delta\right)$$

De nuevo, para sacar factor común, debemos "homogeneizar" índices. Sirva de patrón el término rojo. Procedamos a homogeneizar el término verde:

---

[161] Muy importante: la Derivada Ordinaria de un Tensor ***NO*** es un Tensor. Podemos imaginar perfectamente por qué no lo es (recordemos: *bases vectoriales cambiantes*).

[162] Recordemos, para un vector:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^\beta} = (\nabla_\beta A^\gamma) e_\gamma$$

Pues, para un Tensor:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial x^\gamma} = (\nabla_\gamma T^{\alpha\beta})\, e_\alpha \otimes e_\beta$$

[163] Recordemos que para sustituir recurrimos a (acercamos los índices, de nuevo, a lo que nos interesa:

$$\frac{\partial e^\alpha}{\partial x^\gamma} = -\Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} e^\sigma \qquad \text{ó} \qquad -\Gamma^\alpha_{\gamma\sigma} e^\sigma$$

Hay que ser muy cuidadoso y ordenado a la hora de considerar los índices, puesto que puede ser muy confuso… no por dificultad, sino por la miríada de índices.

$$T_{\alpha\beta} \cdot -\Gamma^{\alpha}_{\sigma\gamma} \cdot e^{\sigma} \otimes e^{\beta}$$

Como sigma es perfectamente libre, intercambiemos sigma por alpha: $\sigma \leftrightarrow \alpha$

$$T_{\sigma\beta} \cdot -\Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} \cdot e^{\alpha} \otimes e^{\beta}$$

$$-\Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} \cdot T_{\sigma\beta} \cdot e^{\alpha} \otimes e^{\beta}$$

Igualmente, procedamos con el término azul: $\delta \leftrightarrow \beta$

$$T_{\alpha\beta} \cdot e^{\alpha} \otimes -\Gamma^{\beta}_{\delta\gamma} e^{\delta}$$

$$T_{\alpha\delta} \cdot e^{\alpha} \otimes -\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} e^{\beta}$$

Y si reordenamos:

$$-\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} T_{\alpha\delta} \cdot e^{\alpha} \otimes e^{\beta}$$

Por lo que, finalmente, agrupando todos los términos:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial x^{\gamma}} = \partial_{\gamma} T_{\alpha\beta} \cdot e_{\alpha} \otimes e_{\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} \cdot T_{\sigma\beta} \cdot e^{\alpha} \otimes e^{\beta} - \Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} \cdot T_{\alpha\delta} \cdot e^{\alpha} \otimes e^{\beta}$$

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial x^{\gamma}} = \left(\partial_{\gamma} T_{\alpha\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} T_{\sigma\beta} - \Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} T_{\alpha\delta}\right) \cdot e^{\alpha} \otimes e^{\beta}$$

$$\nabla_{\gamma} T_{\alpha\beta} \equiv \partial_{\gamma} T_{\alpha\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} T_{\sigma\beta} - \Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} T_{\alpha\delta} \quad [164]$$

- ***Procedamos ahora con un tensor tipo (1,1)***[165]***.***

Supongamos un Tensor (1,1) arbitrario:

$$\overline{T} = T^{\alpha}_{\beta} \cdot e_{\alpha} \otimes e^{\beta}$$

Desarrollemos la derivada del producto:

---

[164] Puede verse como:

$$\nabla_{\gamma} T_{\alpha\beta} \equiv \partial_{\gamma} T_{\alpha\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\alpha} T_{\sigma\beta} - \Gamma^{\delta}_{\gamma\beta} T_{\alpha\delta}$$

[165] Aquí tendremos que usar, según sea el caso, las dos expresiones para realizar sustituciones (volvemos a renombrar los índices para que se parezcan al ejemplo que vamos a usar y sea menos extraño):

$$\frac{\partial e_{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} = \Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} e_{\sigma}$$

$$\frac{\partial e^{\beta}}{\partial x^{\gamma}} = -\Gamma^{\beta}_{\delta\gamma} e^{\delta}$$

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial (T^\alpha_{\ \beta})}{\partial x^\gamma} \cdot e_\alpha \otimes e^\beta + T^\alpha_{\ \beta} \cdot \frac{\partial (e_\alpha)}{\partial x^\gamma} \otimes e^\beta + T^\alpha_{\ \beta} \cdot e_\alpha \otimes \frac{\partial (e^\beta)}{\partial x^\gamma}$$

$$= \partial_\gamma T^\alpha_{\ \beta} \cdot e_\alpha \otimes e^\beta + T^\alpha_{\ \beta} \cdot (\Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} \cdot e_\sigma) \otimes e^\beta + T^\alpha_{\ \beta} \cdot e_\alpha \otimes (-\Gamma^\beta_{\delta\gamma} \cdot e^\delta)$$

"Homogeneicemos" índices para acercarlo todo al término rojo que usamos de referencia:

- Término verde: $\sigma \leftrightarrow \alpha$

$$T^\alpha_{\ \beta} \cdot (\Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} \cdot e_\sigma) \otimes e^\beta$$
$$T^\sigma_{\ \beta} (\Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} \cdot e_\alpha) \otimes e^\beta$$
$$\Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} \cdot T^\sigma_{\ \beta} \cdot e_\alpha \otimes e^\beta$$

- Término azul: $\delta \leftrightarrow \beta$

$$T^\alpha_{\ \beta} \cdot e_\alpha \otimes \left(-\Gamma^\beta_{\delta\gamma} \cdot e^\delta\right)$$
$$T^\alpha_{\ \delta} \cdot e_\alpha \otimes (-\Gamma^\delta_{\beta\gamma} \cdot e^\beta)$$
$$-\Gamma^\delta_{\beta\gamma} \cdot T^\alpha_{\ \delta} \cdot e_\alpha \otimes e^\beta$$

Si ahora unimos todos los términos:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial x^\gamma} = \partial_\gamma T^\alpha_{\ \beta} \cdot e_\alpha \otimes e^\beta + \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} \cdot T^\sigma_{\ \beta} \cdot e_\alpha \otimes e^\beta - \Gamma^\delta_{\beta\gamma} \cdot T^\alpha_{\ \delta} \cdot e_\alpha \otimes e^\beta$$

Donde ya podemos sacar factor común:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial x^\gamma} = \left(\partial_\gamma T^\alpha_{\ \beta} + \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} T^\sigma_{\ \beta} - \Gamma^\delta_{\beta\gamma} T^\alpha_{\ \delta}\right) \cdot e_\alpha \otimes e^\beta$$

$$\nabla_\gamma T^\alpha_{\ \beta} \equiv \partial_\gamma T^\alpha_{\ \beta} + \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} T^\sigma_{\ \beta} - \Gamma^\delta_{\beta\gamma} T^\alpha_{\ \delta} \qquad 166$$

Y ahora, por su importancia en Relatividad General, desarrollemos la ***Derivada Covariante de un Tensor de Riemann***:

$$\mathbb{R} = R^\alpha_{\ \beta\gamma\delta} \cdot e_\alpha \otimes e^\beta \otimes e^\gamma \otimes e^\delta$$

166 Ya sabemos que podemos verlo también con los índices inferiores de los Símbolos de Christoffel conmutados:

$$\nabla_\gamma T^\alpha_{\ \beta} \equiv \partial_\gamma T^\alpha_{\ \beta} + \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} T^\sigma_{\ \beta} - \Gamma^\delta_{\gamma\beta} T^\alpha_{\ \delta}$$
$$\nabla_\gamma T^\alpha_{\ \beta} \equiv \partial_\gamma T^\alpha_{\ \beta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\sigma} T^\sigma_{\ \beta} - \Gamma^\delta_{\gamma\beta} T^\alpha_{\ \delta}$$
$$\nabla_\gamma T^\alpha_{\ \beta} \equiv \partial_\gamma T^\alpha_{\ \beta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\sigma} T^\sigma_{\ \beta} - \Gamma^\delta_{\beta\gamma} T^\alpha_{\ \delta}$$
$$\dots$$

$$\frac{\partial \mathbb{R}}{\partial x^{\sigma}} = \partial_{\sigma} R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} \cdot e_{\alpha} \otimes e^{\beta} \otimes e^{\gamma} \otimes e^{\delta} +$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} \cdot \frac{\partial e_{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \otimes e^{\beta} \otimes e^{\gamma} \otimes e^{\delta} +$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} \cdot e_{\alpha} \otimes \frac{\partial e^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} \otimes e^{\gamma} \otimes e^{\delta} +$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} \cdot e_{\alpha} \otimes e^{\beta} \otimes \frac{\partial e^{\gamma}}{\partial x^{\sigma}} \otimes e^{\delta} +$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} \cdot e_{\alpha} \otimes e^{\beta} \otimes e^{\gamma} \otimes \frac{\partial e^{\delta}}{\partial x^{\sigma}}$$

Donde:

$\frac{\partial e_{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} = \Gamma^{\rho}_{\alpha\sigma} e_{\rho} \rightarrow (\alpha \leftrightarrow \rho)$ *luego todo el término azul lo reescribimos como* $\rightarrow \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma} \cdot R^{\rho}{}_{\beta\gamma\delta} \cdot e_{\alpha}$

$\frac{\partial e^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} = -\Gamma^{\beta}_{\sigma\tau} e^{\tau} \rightarrow (\beta \leftrightarrow \tau)$ *luego todo el término verde lo reescribimos como* $\rightarrow -\Gamma^{\tau}_{\sigma\beta} \cdot R^{\alpha}{}_{\tau\gamma\delta} \cdot e^{\beta}$

$\frac{\partial e^{\gamma}}{\partial x^{\sigma}} = -\Gamma^{\gamma}_{\sigma\pi} e^{\pi} \rightarrow (\gamma \leftrightarrow \pi)$ *luego todo el término rojo lo reescribimos como* $\rightarrow -\Gamma^{\pi}_{\sigma\gamma} \cdot R^{\alpha}{}_{\beta\pi\delta} \cdot e^{\gamma}$

$\frac{\partial e^{\delta}}{\partial x^{\sigma}} = -\Gamma^{\delta}_{\sigma\omega} e^{\omega} \rightarrow (\delta \leftrightarrow \omega)$ *luego todo el término naranja lo reescribimos como* $\rightarrow -\Gamma^{\omega}_{\sigma\delta} \cdot R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\omega} \cdot e^{\delta}$

De manera que, presentando la expresión completa tendríamos que:

$$\nabla_{\sigma} R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} =$$

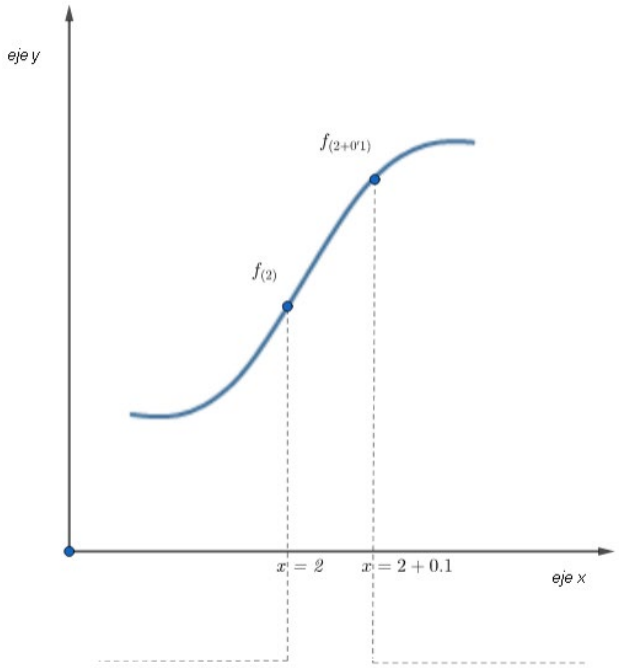
$$\left(\partial_{\sigma} R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} + \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma} \cdot R^{\rho}{}_{\beta\gamma\delta} - \Gamma^{\tau}_{\sigma\beta} \cdot R^{\alpha}{}_{\tau\gamma\delta} - \Gamma^{\pi}_{\sigma\gamma} \cdot R^{\alpha}{}_{\beta\pi\delta} - \Gamma^{\omega}_{\sigma\delta} \cdot R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\omega}\right) \cdot e_{\alpha} \otimes e^{\beta} \otimes e^{\gamma} \otimes e^{\delta}$$

Que es la Derivada Covariante de un Tensor de Riemann (Tipo (1,3)).

La Derivada de Lie.

Para seguir avanzando en nuestro estudio, además de la Derivada Ordinaria y la Derivada Covariante necesitaremos manejar un tercer tipo de derivadas: la Derivada de Lie. Sabiendo que proviene de Lie ya podríamos ir adelantando que algo tendrá que ver con el número e.

Para comenzar recordemos brevemente el modo en que construíamos el Polinomio de Taylor para aproximar soluciones polinómicas a funciones no polinómicas (ver nota x).



$$f_{(2)} = f_{(2)} + f'_{(2)}(x-2) + \frac{1}{2!}f''_{(2)}(x-2)^2 + \cdots \to \infty \qquad f_{(2.1)} = f_{(2)} + f'_{(2)}(2-2.1) + \frac{1}{2!}f''_{(2)}(2-2.1)^2 + \cdots \to \infty$$

$$f_{(2)} = f_{(2)} + f'_{(2)}(2-2) + \frac{1}{2!}f''_{(2)}(2-2)^2 + \cdots \to \infty \qquad f_{(2.1)} = f_{(2)} + f'_{(2)}(0.1) + \frac{1}{2!}f''_{(2)}(0.1)^2 + \cdots \to \infty$$

$$f_{(2)} = f_{(2)} + f'_{(2)}(0) + \frac{1}{2!}f''_{(2)}(0)^2 + \cdots \to \infty$$

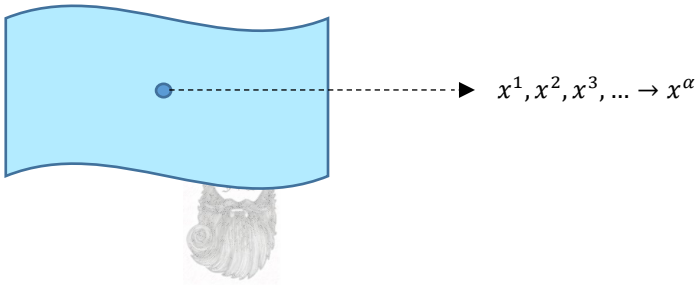
$$f_{(2)} = f_{(2)}$$

Es decir, que:

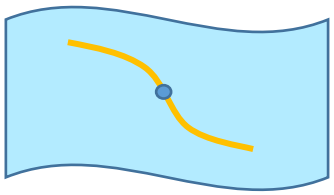
$$f_{(x+a)} = f_{(x)} + f'_{(x)}(x-a) + \frac{1}{2!}f''_{(x)}(x-a)^2 + \cdots \to \infty$$

$$f_{(x+a)} = f_{(x)} + f'_{(x)}a + \frac{1}{2!}f''_{(x)}a^2 + \frac{1}{3!}f'''_{(x)}a^3 + \cdots \to \infty$$

Ahora supongamos una variedad cualquiera α-dimensional con coordenadas x^α:



Ahora imaginemos, en dicha variedad, una trayectoria parametrizada mediante λ y que en un punto determinado a nuestra conveniencia $\lambda = 0$:



Ciertamente la función de la trayectoria será:

$$f = x^{\alpha}_{(\lambda)}$$

Donde la función evolucionará de una u otra forma según sea el valor de λ

Ahora, si nos alejamos una distancia ***diferencial*** $\boldsymbol{\varepsilon}$ de ese punto $\lambda = 0$, ¿cómo lo describiríamos mediante el Polinomio de Taylor?

$$f_{(0+\varepsilon)} = x^{\alpha} + \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}\varepsilon + \frac{1}{2!}\frac{d^2x^{\alpha}}{d\lambda^2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3x^{\alpha}}{d\lambda^3}\varepsilon^3 + \cdots \to \infty$$

Que podemos expresar dejando los ***operadores*** como "entidades genéricas propias" (los marcamos en verde):

$$f_{(0+\varepsilon)} = x^{\alpha} + \frac{d}{d\lambda}x^{\alpha}\varepsilon + \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}x^{\alpha}\varepsilon^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}x^{\alpha}\varepsilon^3 + \cdots \to \infty$$

Que podemos redibujar como:

$$f_{(\varepsilon)} = x^{\alpha} + \varepsilon\frac{d}{d\lambda}x^{\alpha} + \frac{\varepsilon^2 1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}x^{\alpha} + \frac{\varepsilon^3}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}x^{\alpha} + \cdots \to \infty$$

De donde podemos sacar factor común:

$$f_{(\varepsilon)} \to x^{\alpha}_{(\varepsilon)} = \left(1 + \varepsilon\frac{d}{d\lambda} + \frac{\varepsilon^2}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{\varepsilon^3}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3} + \cdots\right)\cdot x^{\alpha}$$

Recordemos ahora que podemos la función e^x en desarrollos de Taylor es:

$$e^x \equiv \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)$$

Veamos el paralelismo:

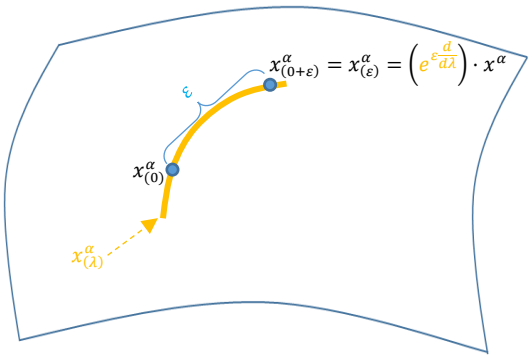
$$x^{\alpha}_{(\varepsilon)} = \left(1 + \varepsilon\frac{d}{d\lambda} + \frac{\varepsilon^2}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{\varepsilon^3}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3} + \cdots\right)\cdot x^{\alpha}$$

$$e^x \equiv \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)$$

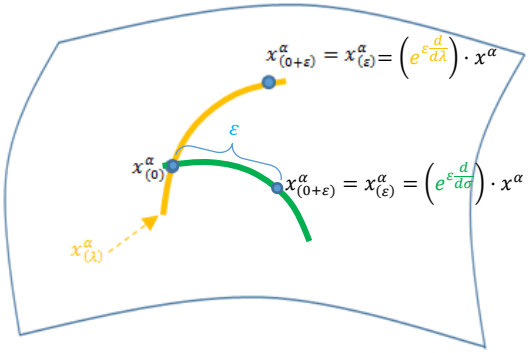
Luego, de manera análoga, podremos decir que:

$$x^{\alpha}_{(\varepsilon)} = \left(e^{\varepsilon\frac{d}{d\lambda}}\right)\cdot x^{\alpha}$$

Una vez comprendido esto, ahora, para seguir con nuestro desarrollo, imaginemos una variedad en la que trazamos una trayectoria (parametrizada mediante λ) que une dos puntos distanciados el uno del otro por una magnitud diferencial:

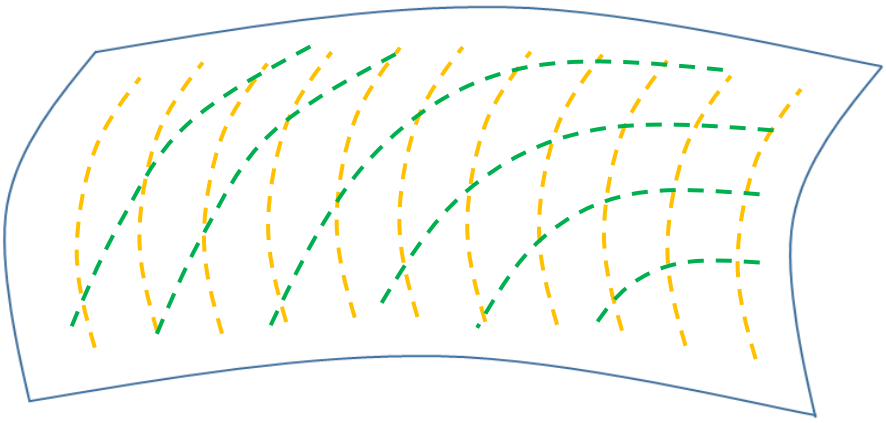


E imaginemos ahora otra trayectoria (parametrizada mediante σ) que pasa por el mismo punto $x^{\alpha}_{(0)}$ y en el que marcamos otro punto alejado del primero una distancia diferencial (la misma épsilon, por ejemplo):

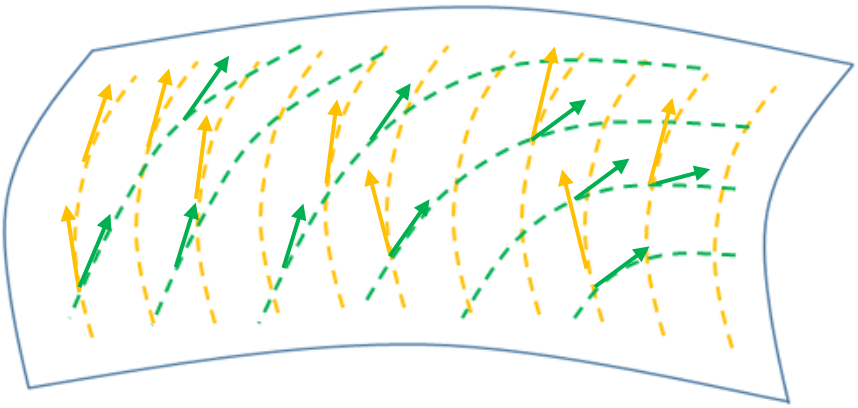


Imaginemos, pues, ambos escenarios juntos, es decir, una variedad en la que se definen dos campos vectoriales:

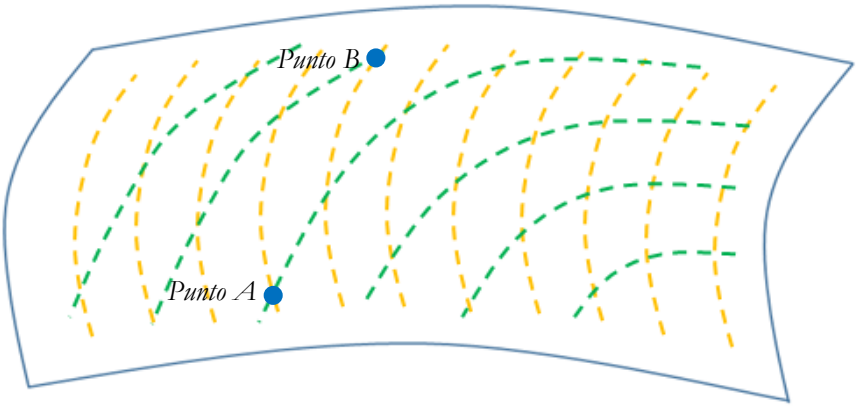
- Uno que marcamos en naranja que se conforma por el conjunto de vectores posibles $\vec{A}$ 'como verticales'.
- Otro que marcamos en verde y que se conforma por el conjunto de vectores posibles $\vec{B}$ 'como horizontales'.



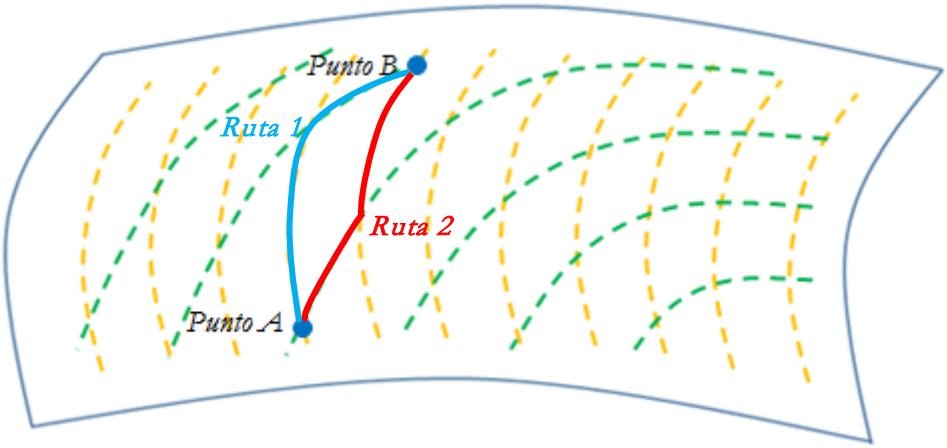
Cada campo generaría en cada punto de sus líneas el correspondiente vector tangente.



Y, finalmente, imaginemos dos puntos cualesquiera en esta variedad que contiene dos campos vectoriales:



Obviamente podríamos ir del Punto A al Punto B por cualquier camino arbitrario pero, ¿por qué no probamos a seguir los caminos "tabulados" que nos ofrece la combinación de los dos campos? En tal caso, podríamos seguir dos rutas diferentes óptimas:



En el caso de la:

- Ruta 1. Usaremos un primer tramo parametrizado con λ y un segundo tramo parametrizado con σ.
- Ruta 2. Usaremos un primer tramo parametrizado con σ y un segundo tramo parametrizado con λ.

Y ahora, respecto a estas dos rutas, cabe preguntarse una serie de interesantes cuestiones: ¿nos llevan al mismo sitio? En caso de que así sea, ¿cuál es el más corto? Por el contrario, si no nos llevan al mismo sitio ¿cuánto se alejan las "colas" de cada camino?

Pues precisamente, para responder a estas preguntas, usaremos la Derivada de Lie.

Para proceder, supongamos que partimos del Punto A, en el que ponemos nuestro origen paramétrico de manera que tanto λ como σ son igual a cero.

Si la Ruta 1 y la Ruta 2 fueran iguales, podríamos afirmar que:

$$(Ruta\ 1 - Ruta\ 2) = 0$$

Definamos, entonces, cada ruta:

- Ruta 1. Dijimos que se usaba primero un tramo parametrizado con λ y, después, un segundo tramo parametrizado con σ, es decir:

$$Ruta\ 1 = e^{\varepsilon\frac{d}{d\sigma}} \cdot e^{\varepsilon\frac{d}{d\lambda}}$$ [167]

- Ruta 2. Dijimos que se usaba primero un tramo parametrizado con σ y, después, un segundo tramo parametrizado con λ, es decir:

$$Ruta\ 2 = e^{\varepsilon\frac{d}{d\lambda}} \cdot e^{\varepsilon\frac{d}{d\sigma}}$$

Es decir, que si definíamos el desplazamiento diferencial entre un punto determinado y el contiguo como:

$$x^{\alpha}_{(\varepsilon)} = \left(e^{\varepsilon\frac{d}{d\lambda}}\right) \cdot x^{\alpha}$$

Podremos expresar la diferencia entre rutas como:

$$(Ruta\ 1 - Ruta\ 2) \cdot x^{\alpha} = \Delta\ entre\ Rutas$$

$$\Delta\ entre\ Rutas = \left(e^{\varepsilon\frac{d}{d\sigma}} \cdot e^{\varepsilon\frac{d}{d\lambda}} - e^{\varepsilon\frac{d}{d\lambda}} \cdot e^{\varepsilon\frac{d}{d\sigma}}\right) \cdot x^{\alpha}$$

[167] El orden de los "tramos" está invertido. Esto cobra sentido cuando procedamos a derivar pues siempre se empieza haciendo "la derivada de la derecha".
Por otro lado, véase que medimos el área que subsumen los dos tramos. Midiendo el área que subsumen los tramos de ambas rutas podremos comprarlas.

Ahora, procedamos a sustituir nuestras expresiones con su expresión según el Polinomio de Taylor[168]:

$$\Delta eR = \left[\left(1 + \varepsilon\frac{d}{d\sigma}\right)\cdot\left(1 + \varepsilon\frac{d}{d\lambda}\right) - \left(1 + \varepsilon\frac{d}{d\lambda}\right)\cdot\left(1 + \varepsilon\frac{d}{d\sigma}\right)\right]\cdot x^{\alpha}$$

Desarrollamos:

$$\Delta eR = \left[\left(1 + \varepsilon\frac{d}{d\lambda} + \varepsilon\frac{d}{d\sigma} + \varepsilon^2\frac{d}{d\sigma}\frac{d}{d\lambda}\right) - \left(1 + \varepsilon\frac{d}{d\sigma} + \varepsilon\frac{d}{d\lambda} + \varepsilon^2\frac{d}{d\lambda}\frac{d}{d\sigma}\right)\right]\cdot x^{\alpha} \qquad 169$$

Seguimos desarrollando:

$$\Delta eR = \left[\varepsilon^2\frac{d}{d\sigma}\frac{d}{d\lambda} - \varepsilon^2\frac{d}{d\lambda}\frac{d}{d\sigma}\right]\cdot x^{\alpha}$$

$$\Delta eR = \varepsilon^2\left(\frac{d}{d\sigma}\frac{d}{d\lambda} - \frac{d}{d\lambda}\frac{d}{d\sigma}\right)\cdot x^{\alpha}$$

Recordemos ahora el orden en que se tomaban los tramos en cada ruta y procedamos a *introducir* el factor x^{α}:

$$\Delta eR = \varepsilon^2\left[\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}\right) - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dx^{\alpha}}{d\sigma}\right)\right] \qquad 170$$

Estaremos de acuerdo que la derivada de la curva en cada caso, nos arrojará un vector tangente a la curva en dicho punto, luego tenemos que:

$$\Delta eR = \varepsilon^2\left[\frac{d}{d\sigma}(A^{\alpha}) - \frac{d}{d\lambda}(B^{\alpha})\right] \qquad 171$$

Y, llegados a este punto, podemos seguir desarrollando mediante la regla de la cadena pues tenemos la derivada de una determinada función, sobre una variable independiente (σ o λ). Recordemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Es decir, una función y que tiene estructura u de manera que derivamos y según su estructura u y, después, derivamos la parte interna de u por la variable independiente inicial x. Apliquemos el mismo procedimiento a lo que tenemos. ¿Qué tenemos? Una estructura, una función que dibuja "las curvas" del campo A, es decir: A^{α}, cuyo cambio estudiaremos según se recorra una coordenada, una variable: x^{β}. ¿Por qué nombramos a esas coordenadas

[168] Recordemos que estamos hablando de distancias infinitesimales por lo que nos bastará con un par de términos del Polinomio de Taylor.

[169] Importante ser conscientes que el orden del producto de los operadores sí afecta al resultado.

[170] Como decíamos, aquí cobra pleno sentido el hecho de haber expresado la ruta como un producto en un orden determinado.

[171] A^{α} y B^{α} son vectores tangentes, cada uno, en su campo vectorial.

x^β, es decir, con índice β nuevo? Muy simple, porque la función A^α cambia a lo largo de una serie de coordenadas β-dimensionales que hay que recorrer de nuevo, con independencia de la formulación en de A^α. Esto es: la función A^α debe poder ser expresable en todas y cada una de las coordenadas del espacio vectorial, por eso reseteamos el índice:

$$\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta}$$

Después, efectivamente, para completar el análisis (la regla de la cadena) tendremos que estudiar cómo cambian dichas coordenadas (cómo cambia la función) x^β según evolucione el parámetro con el que se han parametrizado las "curvas" del campo, es decir, en este caso, mediante σ:

$$\frac{dx^\beta}{d\sigma}$$

Veamos qué queremos decir[172]:

$$\frac{d}{d\sigma}(A^\alpha) = \frac{dx^\beta}{d\sigma}\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta}$$

Pero, recordemos, ¿qué es $\frac{dx^\beta}{d\sigma}$?

Efectivamente, no es otra cosa que la derivada de la función que conforman de las coordenadas que hemos parametrizado mediante σ, es decir, la derivada de la función que "dibuja las curvas del campo B", por el parámetro σ, que, finalmente, no es otra cosa que un vector tangente a la "curva" en el punto σ y al que podremos llamar:

$$\frac{dx^\beta}{d\sigma} = B^\beta$$

Es decir, que tenemos que:

$$\frac{d}{d\sigma}(A^\alpha) = B^\beta\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta}$$

Igualmente, podremos proceder con el término rojo de nuestra expresión original:

$$\Delta eR = \varepsilon^2\left[\frac{d}{d\sigma}(A^\alpha) - \frac{d}{d\lambda}(B^\alpha)\right]$$

De manera que nos quede:

$$\Delta eR = \varepsilon^2\left[B^\beta\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} - A^\beta\frac{\partial B^\alpha}{\partial x^\beta}\right]$$

Donde, precisamente, lo que tenemos en el corchete es lo que se denomina la Derivada de Lie y que se suele expresar así:

[172] El orden que se suele esperar es $\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ y en este caso lo tenemos invertido. Téngase en cuenta lo mismo que ya hemos visto anteriormente, el orden, a causa del orden de los caminos que estamos tomando se invierte. ¿?¿?

$$\mathcal{L}_B A^\alpha = B^\beta \partial_\beta A^\alpha - A^\beta \partial_\beta B^\alpha$$

Que, realmente, por una cuestión más estética que otra cosa (recordemos los órdenes… cómo hemos tenido que ir a menudo como al revés) se suele expresar para más satisfacción visual como:

$$\mathcal{L}_A B^\alpha = A^\beta \partial_\beta B^\alpha - B^\beta \partial_\beta A^\alpha \qquad ^{173}$$

A sabiendas de que esto está siendo bastante abstracto, vamos a desarrollar pormenorizadamente un ejemplo que nos permita entender bien la utilidad de la Derivada de Lie.

Ejemplo.

Supongamos una variedad en la que coexisten dos campos vectoriales: A y B. Vamos a estudiar si existe simetría entre los caminos que adoptemos para llegar de un punto a otro. Desarrollemos este ejemplo paso a paso del mismo modo en que hemos descrito el proceso para llegar a la Derivada de Lie.

Estudiemos el campo A (parametrizamos con Lambda). En primer lugar definamos las "líneas maestras" del campo.

Supongamos que el campo A define vectores del tipo:

$$\vec{A} = e_x \quad \text{donde} \quad \begin{bmatrix} A^1 = A^x = 1 \\ A^2 = A^y = 0 \end{bmatrix}$$

Es decir, que, visualmente, sería algo así:

---

[173] Observemos algunas particularidades de esta Derivada de Lie:

- No tiene símbolos de Christoffel, es decir, que no se presupone conexión predefinida a la variedad sobre la que se aplica.
- No tiene productos escalares de bases, por lo que no tiene vinculación con ninguna métrica.

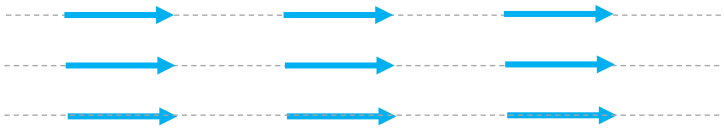
Esto quiere decir que se trata de una operación bastante básica, bastante fundamental, en el sentido de que no necesita de estructuras externas previas para desarrollarse. Eso lo hace una buena candidata para ser la primera operación que se realice a la hora de estudiar variedades. Téngase en cuenta que si en una expresión como la siguiente:

$$\varepsilon^2 \left[A^\beta \frac{\partial B^\alpha}{\partial x^\beta} - B^\beta \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} \right]$$

Pudiéramos afirmar que $\mathcal{L}_A B^\alpha = 0$, estaríamos diciendo que:

$$\varepsilon^2 [0] = 0$$

Cosa que ya nos estaría dando mucha información sobre la variedad en el tramo estudiado.



Puesto que el vector $\vec{A}$ debe ser tangente a todas las "líneas generadoras" del campo vectorial A, debe cumplirse necesariamente que[174]:

$$\frac{dx_{(\lambda)}}{d\lambda} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{d\lambda} = 0$$

Los vectores, "cambian" hacia la derecha (signo positivo) en una unidad y cero unidad en la dirección vertical.

Las funciones que cumplen la creación de estas líneas maestras son, obviamente[175]:

$$x_{(\lambda)} = C_0\lambda + C_1$$

$$y_{(\lambda)} = C_2$$

Donde, necesariamente:

$$C_0$$

Para que se cumpla que:

$$\frac{dx}{d\lambda} = 1$$

Así, el campo A viene definido por las funciones:

$$x_{(\lambda)} = \lambda + C_1$$

$$y_{(\lambda)} = C_2$$

Estudiemos el campo B (parametrizamos con Sigma). Al igual que hemos hecho con el campo A, definamos las "líneas maestras" del campo B.

¿Qué condiciones tenemos? Supongamos que debe cumplirse que los vectores tangentes sean del tipo:

$$\vec{B} = -y\, e_x + x\ e_y \quad \text{donde} \quad \begin{cases} B^1 = B^x = -y \\ B^2 = B^y = +x \end{cases}$$

[174] Recordemos, dichas líneas generadoras vienen definidas por las funciones $x_{(\lambda)}$ y $y_{(\lambda)}$.

[175] $C_0, C_1, C_2, \ldots$ son constantes.

Es decir, que debe darse que:

$$\frac{dx_{(\sigma)}}{d\sigma} = -y \qquad \text{y} \qquad \frac{dy_{(\sigma)}}{d\sigma} = x$$

Es decir, que debe existir una función y y x que satisfagan las condiciones establecidas. Esto es, estamos ante un sistema de dos ecuaciones diferenciales con dos incógnitas. Un sistema, muy simple de resolver y cuyo tipo de solución ya hemos aplicado previamente. Veamos cómo procedemos.

Puesto que la relación entre y y x parece bastante estrecha, probemos a hacer lo siguiente sobre la primera ecuación[176]:

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dx}{d\sigma} = -y\right)$$

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dx}{d\sigma}\right) = \frac{d}{d\sigma}(-y)$$

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dx}{d\sigma}\right) = -\frac{d}{d\sigma}(y)$$

Pero, ya sabemos, por la segunda ecuación, que $\frac{d}{d\sigma}(y) = x$, por lo que podremos decir que:

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dx}{d\sigma}\right) = -x$$

Esto es:

$$\frac{d^2x}{d\sigma^2} = -x$$

$$\frac{d^2}{d\sigma^2}x + x = 0$$

Que es una ecuación diferencial del tipo:

$$u^2 + 1 = 0$$

Cuya solución inicialmente es:

$$u = \pm\sqrt{-1}$$

$$u = \pm i$$

Es decir, que la solución es un número complejo del tipo:

$$u = \alpha \pm \beta i \text{ , donde } \begin{bmatrix}\alpha = 0\\ \beta = 1\end{bmatrix}$$

Y Esto, ya lo sabemos, tiene una solución del tipo[177]:

---

[176] Dejamos, por tedioso, de poner $x_{(\sigma)}$ y ponemos x a secas.

[177] Véase nota xxx.

$$x = e^{\alpha\sigma}(C_3\, cos\, \sigma + C_4\, sin\, \sigma)$$

$$x = e^{0\cdot\sigma}(C_3\, cos\, \sigma + C_4\, sin\, \sigma)$$

$$x = (1)\cdot(C_3\, cos\, \sigma + C_4\, sin\, \sigma)$$

$$x = C_3\, cos\, \sigma + C_4\, sin\, \sigma$$

Y ya, conociendo x, sólo debemos despejar en nuestro sistema inicial de ecuaciones. En concreto usemos la primera:

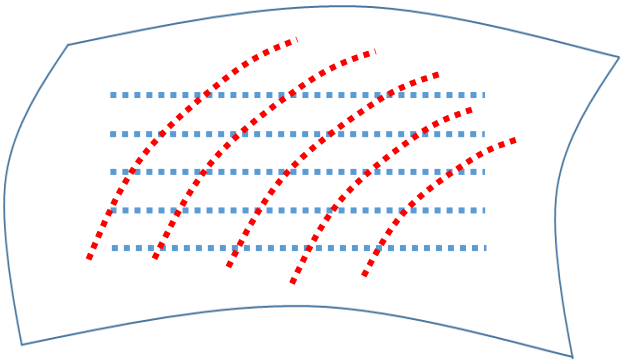
$$\frac{dx}{d\sigma} = -y$$

$$\frac{d(C_3\, cos\, \sigma + C_4\, sin\, \sigma)}{d\sigma} = -y$$

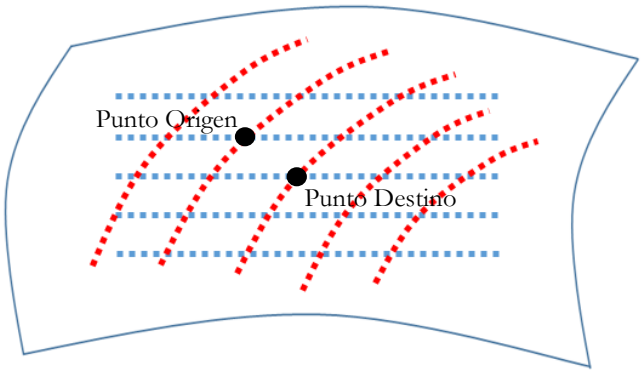
$$y = -(-C_3\, sin\, \sigma + C_4\, cos\, \sigma)$$

$$y = C_3\, sin\, \sigma - C_4\, cos\, \sigma$$

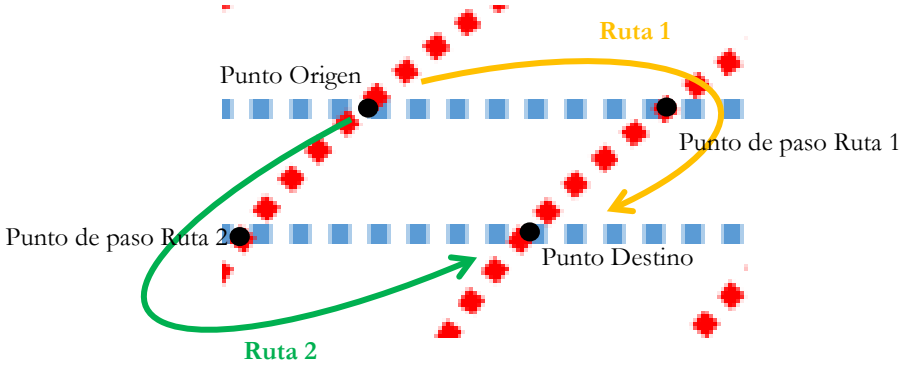
Y así, ya tenemos definidas las "líneas maestras" de nuestros campos vectoriales. Tratemos de visualizarlo aproximadamente. En azul el campo A y en rojo el campo B:



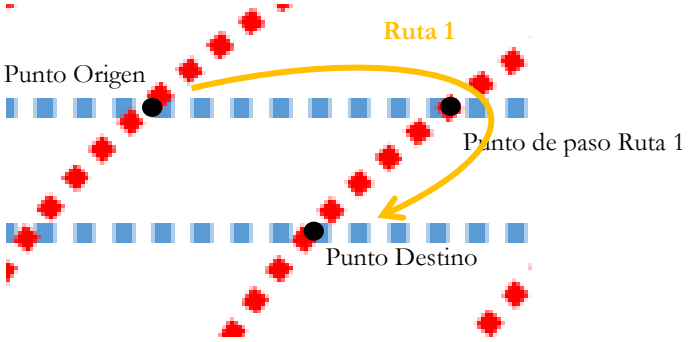
Ahora propongamos dos puntos y dos rutas alternativas para ir de uno a otro:



Hagamos zoom para verlo mejor:



Analicemos primero la Ruta 1.



Es obvio que, primero tomaremos un tramo de camino por al campo A (azul) y después otro tramo de camino por el campo B (rojo).

Veamos el Tramo 1 de la Ruta 1.

Supongamos lo siguiente:

- En una hipotética cuadrícula cartesiana de fondo el Punto Origen tiene coordenadas: $(x = 1, y = 2)$
- En el Punto Origen $\lambda = 0$

Así, puesto que sabemos que las "líneas maestras" del Campo A están definidas mediante:

$$x_{(\lambda)} = \lambda + C_1$$

$$y_{(\lambda)} = C_2$$

Para identificar la línea maestra del campo A en que está el Punto Origen, podemos obligar a que:

$$x_{(\lambda=0)} = 1 \rightarrow x_{(0)} = \lambda + C_1$$

$$y_{(\lambda=0)} = 2 \rightarrow y_{(0)} = C_2$$

De donde obtendremos que para el tramo 1 en concreto que vamos a usar resulta que:

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = 2$$

Y ahora, desplacémonos (recordemos que estamos trabajando en dimensiones diferenciales) una cierta cantidad infinitesimal ε hacia el Punto Intermedio. ¿Qué obtenemos? Pues que para un desplazamiento ε, tendremos que $\lambda + \varepsilon$, donde λ era cero, necesariamente:

$$x_{(\lambda+\varepsilon=0+\varepsilon)} = x_{(\varepsilon)} \rightarrow 1 + \varepsilon = C_1$$

$$y_{(\varepsilon)} \rightarrow 2 = C_2$$

Y ya habríamos llegado al Punto Intermedio que tendría coordenadas:

$$(1 + \varepsilon, 2)$$

Veamos el Tramo 2 de la Ruta 1.

En primer lugar para facilitar las cosas (…de momento), supongamos que hemos calibrado la parametrización de este tramo de manera que en dicho Punto Intermedio $\sigma = 0$.

Recordemos las ecuaciones que definían las "líneas maestras" de este campo:

$$x = C_3 \cos\sigma + C_4 \sin\sigma$$

$$y = C_3 \sin\sigma - C_4 \cos\sigma$$

Puesto que hemos convenido que $\sigma = 0$, y conocemos las coordenadas de ese Punto Intermedio $(1 + \varepsilon, 2)$, podemos despejar las constantes:

$$x_{(\sigma=0)} \rightarrow \quad 1 + \varepsilon = C_3 \cos 0 + C_4 \sin 0 \rightarrow C_3 = 1 + \varepsilon$$

$$y_{(\sigma=0)} \rightarrow \quad 2 = C_3 \sin 0 - C_4 \cos 0 \rightarrow C_4 = -2$$

Ya conocemos, exactamente, la "línea maestra" del campo B en el que nos movemos y, por lo tanto, ahora podemos desplazarnos hacia el Punto Destino, a lo largo de la misma, una cierta distancia infinitesimal, otra vez, ε:

$$x_{(\sigma=0+\varepsilon)} = x_{(\varepsilon)} \rightarrow \quad x_{(\varepsilon)} = (1 + \varepsilon) \cdot \cos\varepsilon + (-2) \cdot \sin\varepsilon$$

$$y_{(\sigma=0+\varepsilon)} = y_{(\varepsilon)} \rightarrow \quad y_{(\varepsilon)} = (1 + \varepsilon) \cdot \sin\varepsilon - (-2) \cdot \cos\varepsilon$$

Y aquí que todo apunta a que nos quedaríamos atascados, llega Taylor en nuestra ayuda. Hagamos una aproximación por series de Taylor de la funciones polinómicas que tenemos en función de Sigma[178].

Sabemos que, según la Series de Taylor:

$$\cos\theta = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \ldots\right)$$

[178] Puesto que estamos en magnitudes diferenciales, sólo vamos a aproximarnos en un grado en el desarrollo en Series de Taylor.

$$\sin\theta = \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \ldots\right)$$

Por lo que, aproximando al segundo grado, podemos decir que:

$$x_{(\varepsilon)} = (1+\varepsilon)\cdot cos\,\varepsilon + (-2)\cdot sin\,\varepsilon$$

$$y_{(\varepsilon)} = (1+\varepsilon)\cdot sin\,\varepsilon - (-2)\cdot cos\,\varepsilon$$

Es aproximadamente igual que:

$$x_{(\varepsilon)} \cong (1+\varepsilon)\cdot\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2!}\right) + (-2)\cdot\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!}\right)$$

$$y_{(\varepsilon)} \cong (1+\varepsilon)\cdot\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!}\right) - (-2)\cdot\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2!}\right)$$

Que si desarrollamos nos queda como:

$$x_{(\varepsilon)} \cong (1+\varepsilon)\cdot\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2!}\right) + (-2)\cdot\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!}\right)$$

$$x_{(\varepsilon)} \cong 1 + \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{2} - 2\varepsilon + 2\frac{\varepsilon^3}{6}$$

$$x_{(\varepsilon)} \cong 1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3}$$

$$x_{(\varepsilon)} \cong 1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}$$ [179]

$$y_{(\varepsilon)} \cong (1+\varepsilon)\cdot\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!}\right) - \left[(-2)\cdot\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2!}\right)\right]$$

$$y_{(\varepsilon)} \cong \varepsilon + \varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^3}{6} - \frac{\varepsilon^4}{6} + 2 - \varepsilon^2$$

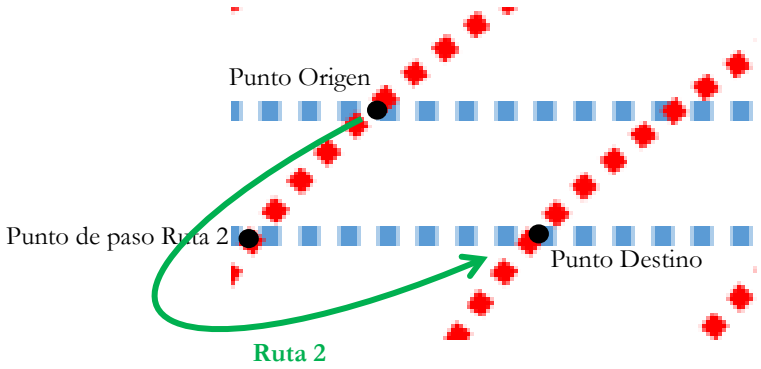
$$y_{(\varepsilon)} \cong 2 + \varepsilon$$

Que son las coordenadas del Punto Destino después de haber recorrido Tramo 1 + Tramo 2, es decir, Ruta 1.

Veamos ahora si por la otra Ruta llegamos al mismo punto.

[179] Despreciamos todos los términos que queden por encima de ε^2.

Analicemos ahora la Ruta 2.



En este caso, primero tomaremos un primer tramo de camino por al campo B (rojo), alcanzaremos un nuevo Punto Intermedio y, después, tomaremos un segundo tramo de camino por el campo A (azul) hasta llegar al Punto Destino.

Recordemos las ecuaciones de las 'líneas maestras' de cada campo:

- Campo A:

$$x_{(\lambda)} = \lambda + C_1$$
$$y_{(\lambda)} = C_2$$

- Campo B:

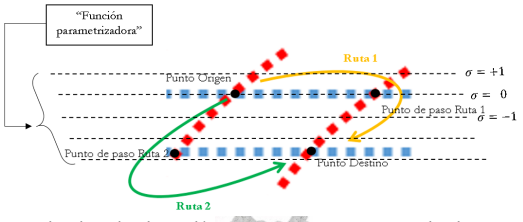
$$x = C_3\, cos\, \sigma + C_4\, sin\, \sigma$$
$$y = C_3\, sin\, \sigma - C_4\, cos\, \sigma$$

Como en esta Ruta 2, el primer tramo que tomamos discurre por las "líneas maestras" parametrizadas mediante σ, veamos exactamente qué línea maestra es la que vamos a tomar, es decir, conozcamos las constantes C_3 y C_4. Para ello recordemos que las coordenadas del Punto Inicial eran $(x = 1, y = 2)$ y que la parametrización que hemos hecho de las líneas es tan afortunada como para hacer que en dicho punto $\sigma = 0$[180].

Luego, sabiendo que $\sigma = 0, x = 1, y = 2$, podremos despejar las constantes en ese punto y, así, conocer exactamente la "línea maestra σ" que usaremos como Tramo 1 de esta Ruta 2:

$$1 = C_3\, cos\, 0 + C_4\, sin\, 0 \rightarrow C_3 = 1$$
$$2 = C_3\, sin\, 0 - C_4\, cos\, 0 \rightarrow C_4 = -2$$

[180] Esto puede parecer extraño en un primer momento puesto que ya habíamos dicho que en el punto intermedio de la Ruta 1, σ era igual a cero. Baste mirar el siguiente esquema para comprender cómo está parametrizando σ.



λ "procede de manera análoga" siguiendo las "líneas rojas"… λ=0 a lo largo de "la primera línea roja" que vemos en nuestro esquema.

Luego la ecuación de la "línea maestra concreta" que tomaremos en este primer tramo será:

$$x_{(\sigma)} = cos\,\sigma - 2\,sin\,\sigma$$

$$y_{(\sigma)} = sin\,\sigma + 2\,cos\,\sigma$$

Ecuaciones de "líneas maestras" que si recorremos una cierta cantidad desde $\sigma = 0$ hasta $\sigma = \varepsilon$, tendremos que:

$$x_{(\varepsilon)} = cos\,\varepsilon - 2\,sin\,\varepsilon$$

$$y_{(\varepsilon)} = sin\,\varepsilon + 2\,cos\,\varepsilon$$

Que serían las coordenadas del Punto Intermedio de la Ruta 2.

Ahora, como sabemos, tenemos que definir la "línea maestra concreta" del campo A que conforma el Tramo 2 de la Ruta 2 y que pasa por dicho punto[181], es decir:

$$cos\,\varepsilon - 2\,sin\,\varepsilon = \lambda + C_1 \rightarrow C_1 = cos\,\varepsilon - 2\,sin\,\varepsilon$$

$$sin\,\varepsilon + 2\,cos\,\varepsilon = C_2 \rightarrow C_2 = sin\,\varepsilon + 2\,cos\,\varepsilon$$

Es decir que la ecuación del Tramo 2 queda como:

$$x_{(\lambda)} = \lambda + cos\,\varepsilon - 2\,sin\,\varepsilon$$

$$y_{(\lambda)} = sin\,\varepsilon + 2\,cos\,\varepsilon$$

Que si recorremos, ahora una cierta distancia $\lambda = \varepsilon$, tendremos las coordenadas definitivas del Punto Destino:

$$x_{(\varepsilon)} = \varepsilon + cos\,\varepsilon - 2\,sin\,\varepsilon$$

$$y_{(\varepsilon)} = sin\,\varepsilon + 2\,cos\,\varepsilon$$

Que podemos aproximar mediante Taylor:

$$x_{(\varepsilon;destino)} \cong \varepsilon + \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2!}\right) - 2\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!}\right)$$

$$x_{(\varepsilon;destino)} \cong \varepsilon + 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} - 2\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{3}$$

$$x_{(\varepsilon;destino)} \cong 1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3}$$

$$x_{(\varepsilon;destino)} \cong 1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}$$

---

[181] En dicho punto, gracias a nuestra "parametrización feliz", $\lambda = 0$.

$$y_{(\varepsilon;destino)} \cong \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!}\right) + 2\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2!}\right)$$

$$y_{(\varepsilon;destino)} \cong \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{6} + 2 - \varepsilon^2$$

$$y_{(\varepsilon;destino)} \cong 2 + \varepsilon + -\varepsilon^2$$

Es decir, que el Punto Destino tiene las coordenadas:

$$\left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}, 2 + \varepsilon + -\varepsilon^2\right)$$

Calculemos la diferencia, ahora, del Punto Destino alcanzado mediante la Ruta 1 y el Punto Destino alcanzado mediante la Ruta 2. Si la diferencia es igual a cero, los caminos nos llevarán al mismo punto. Si, en cambio, no son el mismo punto, obtendremos la diferencia entre ambos:

$$\left(\left[\left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) - \left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)\right], [(2 + \varepsilon) - (2 + \varepsilon + -\varepsilon^2)]\right)$$

Que nos arroja un resultado de:

$$(0, \varepsilon^2)$$

Es decir:

$$\varepsilon^2 \cdot (0,1)$$

Y, si recordamos la expresión inicial de nuestro cálculo de "diferencias de rutas", teníamos que:

$$\Delta eR = \varepsilon^2\left[\mathcal{L}_A \vec{B}\right]$$

Es decir que, puesto que tenemos una diferencia entre Punto Destino/Ruta 1 y Punto Destino/Ruta 2 de:

$$\Delta eR = \varepsilon^2(0,1)$$

Tenemos que, necesariamente:

$$\mathcal{L}_A \vec{B} = 0,1$$

Es decir, que la Derivada de Lie que estamos desarrollando tiene el siguiente resultado:

$$\mathcal{L}_A \vec{B} = 0 \ e_x + 1 \ e_y$$

$$\mathcal{L}_A \vec{B} = e_y$$

Hagamos, ahora, lo mismo pero, esta vez, sencillamente aplicando la definición de Derivada de Lie y veremos la cantidad de esfuerzo que nos ahorramos.

Recordemos que definíamos nuestra variedad como construida con dos campos:

- El campo vectorial A define vectores del tipo:

$$\vec{A} = e_x \quad \text{donde} \quad \begin{bmatrix} A^1 = A^x = 1 \\ A^2 = A^y = 0 \end{bmatrix}$$

- El campo vectorial B define vectores del tipo:

$$\vec{B} = -y\, e_x + x\ e_y \quad \text{donde} \quad \begin{bmatrix} B^1 = B^x = -y \\ B^2 = B^y = +x \end{bmatrix}$$

Apliquemos nuestra definición de Derivada de Lie:

$$\mathcal{L}_A B^\alpha = A^\beta \partial_\beta B^\alpha - B^\beta \partial_\beta A^\alpha$$

- Empecemos por B^α, $\alpha = 1$, es decir: $B^1 = B^x$.

$$\mathcal{L}_A B^1 = A^1 \partial_1 B^1 + A^2 \partial_2 B^1 - B^1 \partial_1 A^1 + B^2 \partial_2 A^1$$

$$\mathcal{L}_A B^1 = A^x \partial_x B^x + A^y \partial_y B^x - B^x \partial_x A^x + B^y \partial_y A^x$$

$$\mathcal{L}_A B^1 = (1)\partial_x(-y) + (0)\partial_y(-y) - (-y)\partial_x(1) + (x)\partial_y(0)$$

De todo esto no sobrevive nada[182]:

$$\mathcal{L}_A B^1 = 0$$

- Continuemos ahora por B^α, $\alpha = 2$, es decir: $B^2 = B^y$.

$$\mathcal{L}_A B^2 = A^1 \partial_1 B^2 + A^2 \partial_2 B^2 - B^1 \partial_1 A^2 + B^2 \partial_2 A^2$$

$$\mathcal{L}_A B^2 = A^x \partial_x B^y + A^y \partial_y B^y - B^x \partial_x A^y + B^y \partial_y A^y$$

$$\mathcal{L}_A B^2 = (1)\partial_x(x) + (0)\partial_y(x) - (-y)\partial_x(0) + (x)\partial_y(0)$$

$$\mathcal{L}_A B^2 = (1)\partial_x(x) \to (1)\cdot(1) = 1$$

182

$(1)\partial_x(-y) \to (1)\cdot(0) = 0$
$(0)\partial_y(-y) \to (0)\cdot(-1) = 0$
$(-y)\partial_x(1) \to (-y)\cdot(0) = 0$ (derivada de una constante)
$(x)\partial_y(0) \to (x)\cdot(0) = 0$ (derivada de una constante)

Es decir, que, finalmente:

$$\mathcal{L}_A\vec{B} = 0\ e_x + 1\ \ e_y \qquad ^{183}$$

Es posible que, llegados a este punto, todo el desarrollo nos parezca perfectamente inteligible pero, igualmente, nos asalte una pregunta: ¿qué demonios era aquello que estábamos midiendo con la Derivada de Lie? Pues, en resumen, estamos midiendo cómo cambia un

---

[183] En algunos manuales aparece la Derivada de Lie expresada como "Corchete de Lie".

$$\mathcal{L}_A\vec{B} = [A, B]$$

Recordemos nuestras disquisiciones acerca de los conmutadores. Sabemos que:

$$[A, B] = AB - BA$$

Por otro lado, no es extraño encontrar en manuales la expresión de un vector según sus operadores, es decir (usamos de nuevo los ejemplos de nuestro hilo principal):

$$\vec{A} = e_x \rightarrow \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\vec{B} = -y\ e_x + x\ \ e_y \rightarrow \vec{B} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

Así trabajando desde el punto de vista del Corchete de Lie y esta definición de los vectores mediante operadores podemos hacer:

$$\mathcal{L}_A\vec{B} = [A, B] \quad // \quad [A, B] = AB - BA \quad // \quad \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x} \quad // \quad \vec{B} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

$$A \cdot B - B \cdot A = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) - \left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}$$

(OBSERVACIÓN 1. Cuidado que son derivadas de, ni un producto cualquiera. Estamos trabajando con operadores por lo que, en principio, no es lo mismo el producto de los operadores "hacia la derecha" que "hacia la izquierda". Por otro lado, recordemos, cada sumando dentro del paréntesis es un producto por lo que hay que hacer la derivada de un producto)

$$= -y\partial^2 x + (1) \cdot \partial y + \partial^2 xy + y\partial^2 x - x\partial^2 yx$$

(OBSERVACIÓN 2. Una vez vista la observación 1, a tener en cuenta, es necesario "desactivarla" ahora ya que las funciones de las que hablamos son 'suaves', derivables, y, por el ***Teorema de Schwartz****, el orden de la derivación es indiferente)*

Lo marcado en rojo se elimina mutuamente:

$$= -y\partial^2 x + (1) \cdot \partial y + \partial^2 xy + y\partial^2 x - x\partial^2 yx$$

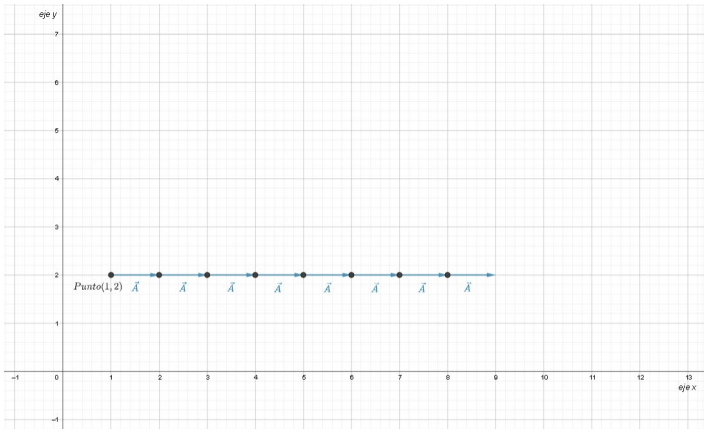
¿Y qué nos queda? Pues el mismo resultado al que ya hemos llegado dos veces en nuestro hilo principal:

$$\mathcal{L}_A\vec{B} \equiv [A, B] = \partial y$$

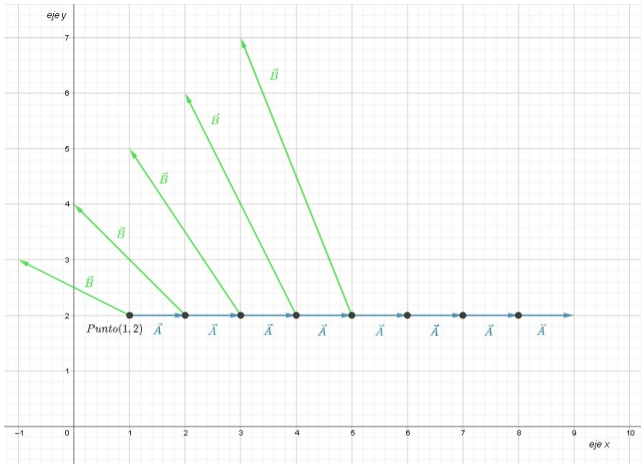
vector $\vec{B}$ cuando "recorremos", cuando va cambiando, un vector $\vec{A}$. Tratemos de visualizarlo. Recordemos cómo definíamos los campos A y B:

$$\vec{A} = e_x \quad // \quad \vec{B} = -y\, e_x + x\ e_y$$

Y ahora representemos "el movimiento" del vector $\vec{A}$, según le marca su propia definición[184]:



Y ahora añadamos los diferentes vectores $\vec{B}$ para cada uno de los puntos por los que ha pasado $\vec{A}$ [185]:



[184] Siempre enlazaremos cabeza del vector con la cabeza de una réplica del mismo.

[185] Obviamente:

$$\vec{B} = -y\, e_x + x\ e_y \rightarrow (1,2) \rightarrow -2 \cdot\ e_x + 1 \cdot\ e_y$$

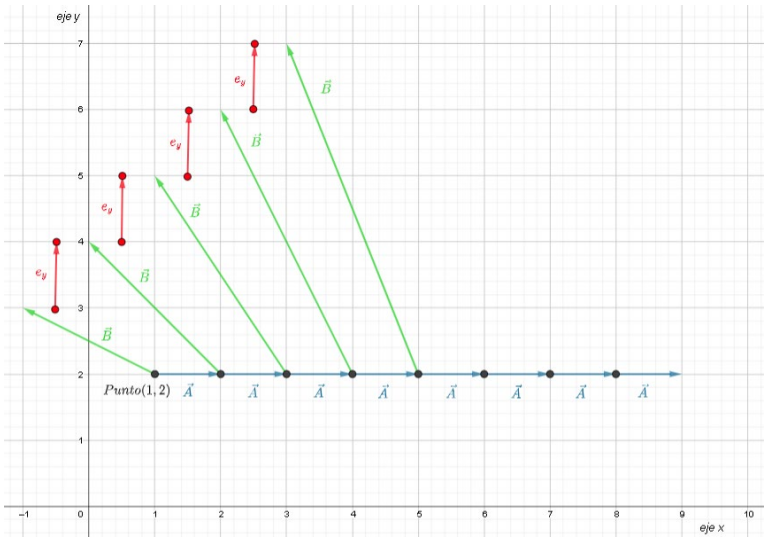
Esto es, siempre desde el punto de referencia en cada caso, el vector $\vec{B}$ recorrerá, por ejemplo desde este punto $(1,2)$: 2 unidades en sentido $-e_x$ y 1 unidad en sentido $+e_y$. Y así sucesivamente para el resto de posiciones (cambiando la cantidad de 'y', claro):

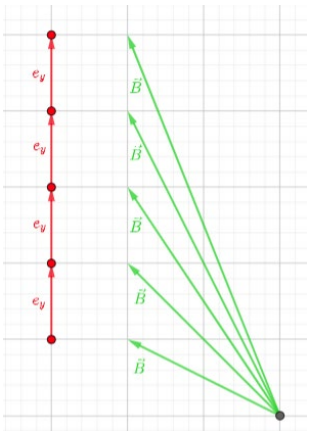
$$\vec{B} = -y\, e_x + x\ e_y \rightarrow (2,2) \rightarrow -2 \cdot\ e_x + 2 \cdot\ e_y$$

$$\vec{B} = -y\, e_x + x\ e_y \rightarrow (3,2) \rightarrow -2 \cdot\ e_x + 3 \cdot\ e_y$$

$$\vec{B} = -y\, e_x + x\ e_y \rightarrow (4,2) \rightarrow -2 \cdot\ e_x + 4 \cdot\ e_y$$

¿Cómo evoluciona, cambia, el vector $\vec{B}$? Si uniéramos todos los vectores que hemos trazado veríamos claramente que el vector cambia a razón de sumarle una unidad e_y a cada paso:





Es decir que, como decíamos, mediante la Derivada de Lie estudiamos el cambio de un vector $\vec{B}$ mientras "evoluciona" otro vector $\vec{A}$ [186]: $\mathcal{L}_A B^\alpha$ [187]

---

[186] En el "caso feliz" que hemos desarrollado, el vector $\vec{A}$ era "cómodamente" constante: $\vec{A} = e_x$ pero, ciertamente, la naturaleza es compleja y dicho vector podría ser tan complejo como fuera necesario. Por otro lado nótese que $\vec{B}$ es un vector en su forma contravariante.

[187] ¿Qué relación hay entre la Derivada de Lie y la Derivada Covariante? Para verlo, supongamos las siguientes Derivadas Covariantes:

$$\nabla_\beta B^\alpha = \left[\frac{\partial B^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} B^\gamma\right] = \partial_\beta B^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} B^\gamma$$

$$\nabla_\beta A^\alpha = \left[\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} A^\gamma\right] = \partial_\beta A^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} A^\gamma$$

Ahora, multipliquemos cada operación, respectivamente, por A^β y B^β:

$$A^\beta\left(\nabla_\beta B^\alpha\right) = A^\beta\left(\partial_\beta B^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} B^\gamma\right) \rightarrow A^\beta \partial_\beta B^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} A^\beta B^\gamma$$

$$B^\beta\left(\nabla_\beta A^\alpha\right) = B^\beta\left(\partial_\beta A^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} A^\gamma\right) \rightarrow B^\beta \partial_\beta A^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} A^\gamma B^\beta$$

Procedamos ahora a realizar la Derivada de Lie de un vector en su forma covariante, es decir:

$$\mathcal{L}_A B_\alpha$$

Para ello, antes, tendremos que tener en cuenta una serie de consideraciones:

a) Debe cumplirse la Regla de Leibniz (y se cumple) según la cual:

$$(A \cdot B)' = A' \cdot B + A \cdot B'$$

La Derivada de Lie de una función de α coordenadas ($\mathcal{L}_A f_{(x^\alpha)}$) debe ser una Derivada Direccional[188]. Supongamos una curva cualquiera y un vector tangente a cada punto. Según

---

Si restamos, resulta que:

$$\left(A^\beta \partial_\beta B^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} A^\beta B^\gamma\right) - \left(B^\beta \partial_\beta A^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} A^\gamma B^\beta\right)$$

(OBSERVACIÓN. En rojo lo que se anula. Recordemos que estamos en un espacio sin Torsión y, por lo tanto, los índices inferiores del Símbolo de Christoffel son simétricos)

$$= A^\beta \partial_\beta B^\alpha - B^\beta \partial_\beta A^\alpha$$

Que, recordemos, no es otra cosa que:

$$A^\beta \nabla_\beta B^\alpha - B^\beta \nabla_\beta A^\alpha \equiv \mathcal{L}_A B^\alpha$$

[188] Recordemos qué era una Derivada Direccional.

La Derivada Direccional de una función multivariante representa la tasa de cambio de dicha función en una dirección terminada dada por un vector. Recordémoslo con un ejemplo: hagamos la Derivada Direccional de una función $f_{(x,y)} = x^3y^2$, en un punto $P = (-1,2)$ y en la dirección de un vector $\vec{V} = 4\, e_x - 3\, e_y$.
Existen dos modos de proceder: a) Mediante la definición misma de Derivada Direccional o, b) mediante la multiplicación del vector por el gradiente de la función (por supuesto, son exactamente lo mismo). Sigamos los dos caminos. Empecemos por a).

a) $D_{\vec{V}} f_{(x,y)} = \partial_x f_{(x,y)} \cdot \hat{V}^x + \partial_y f_{(x,y)} \cdot \hat{V}^y$

Lo primero que vamos a hacer es encontrar el vector unitario $\hat{V}$.

$$\vec{V} = 4\, e_x - 3\, e_y$$
$$\vec{V} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$
$$\hat{V} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} \rightarrow \frac{4}{5}\, e_x - \frac{3}{5}\, e_y$$

A continuación busquemos las derivadas parciales:

$$\partial_x f_{(x,y)} \rightarrow \partial_x x^3y^2 = 3x^2y^2$$

$$\partial_y f_{(x,y)} \rightarrow \partial_y x^3y^2 = x^3 2y$$

Ahora apliquemos la definición:

$$D_{\vec{V}} f_{(x,y)} = \partial_x f_{(x,y)} \cdot \hat{V}^x + \partial_y f_{(x,y)} \cdot \hat{V}^y$$

$$= (3x^2y^2) \cdot \left(\frac{4}{5}\right) + (x^3 2y) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$$

Y ahora, miremos en el punto $P = (-1,2)$:

$$D_{\vec{V}} f_{(x,y)} = (3x^2y^2) \cdot \left(\frac{4}{5}\right) + (x^3 2y) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$= (3 \cdot (-1)^2 (4)^2) \cdot \left(\frac{4}{5}\right) + \left((-1)^3 2 \cdot (2)\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = 12$$

Es decir, obtenemos un escalar, que no es otra cosa que el módulo del vector que apunta en la dirección que nos ha marcado previamente el vector $\vec{V}$.

Veamos ahora el otro camino:

b) $D_{\vec{V}} f_{(x,y)} = \nabla f_{(x,y)} \cdot \vec{V}$ (ojo, no es el unitario)

Calculemos el Gradiente:

$$\nabla f_{(x,y)} = \partial_x f_{(x,y)}\, e_x + \partial_y f_{(x,y)}\, e_y$$

$$\nabla f_{(x,y)} = (3x^2y^2)\, e_x + (x^3 2y)\, e_y$$

Evaluemos el punto $P = (-1,2)$:

$$= (3(-1)^2(2)^2)\, e_x + ((-1)^3 2(2))\, e_y$$

$$= (3(-1)^2(2)^2)\, e_x + ((-1)^3 2(2))\, e_y$$

$$= (12)\, e_x + (12)\, e_y$$

Multipliquemos por $\vec{V}$:

$$= (12)e_x(4)e_x + (12)e_y(-3)\, e_y$$

$$= 12$$

La demostración de la Derivada Direccional de una función real de n-variables es muy simple a partir de la definición de Derivada Ordinaria. Recordemos que:

$$\Delta f_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h}$$

Pero ahora el pequeño desplazamiento que hacemos lo queremos medir mediante el producto con un vector que nos marca una determinada dirección y módulo, es decir:

$$\Delta_{\vec{V}} f_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{(\vec{x}+h\vec{V})} - f_{(\vec{x})}}{h}$$

(OBSERVACIÓN. Si la función $f_{(x)}$ es derivable, puede ser escrita mediante su Gradiente por lo que la Derivada Direccional también puede expresarse como un producto escalar entre dos vectores: el gradiente y el vector de referencia $D_{\vec{V}} f_{(x,y)} = \nabla f_{(x,y)} \cdot \vec{V}$)

En cualquier punto x_n, la Derivada Direccional de $f_{(x)}$ representa la tasa de cambio de la función con respecto al tiempo (o cualquier otra variable independiente) cuando, por ejemplo, un móvil que sigue la trayectoria descrita por la función se mueve a una velocidad y dirección dada por $\vec{V}$ en un punto determinado.
Lo normal es que se trabaje con el vector normalizado para poder alcanzar resultados independientes de la magnitud del vector $\vec{V}$, por lo que, siendo $\hat{V} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$, resulta que:

$$\Delta_{\vec{V}} f_{(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{f_{(\vec{x}+h\vec{V})} - f_{(\vec{x})}}{h} \to \lim_{h\to 0} \frac{f_{(\vec{x}+h\vec{V})} - f_{(\vec{x})}}{h|\vec{V}|} = \nabla f_{(x)} \cdot \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$$

Para demostrar $\Delta_{\vec{V}} f_{(x,y)}$, supongamos un espacio euclídeo de 3 dimensiones, una función 'suave', derivable $f_{(x,y)}$ y un vector $\vec{V}$ con dos componentes (V^x, V^y). Así por la definición que hemos dado:

$$\Delta_{\vec{V}} f_{(x,y)} = \lim_{h\to 0} \frac{f_{(x+hV^x\ ,\ y+hV^y)} - f_{(x,y)}}{h}$$

(OBSERVACIÓN. Digamos que se "pondera" el alejamiento h que hacemos por un vector determinado. Por eso sólo se le aplica a la h, porque sólo se le aplica al movimiento, el desplazamiento realizado)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f_{(x+hV^x, y+hV^y)} - f_{(x,y)}}{h}$$

Introduzcamos esto que, obviamente, es igual a cero:

$$0 = f_{(x,y+hV^y)} - f_{(x,y+hV^y)}$$

Es decir:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f_{(x+hV^x, y+hV^y)} + f_{(x,y+hV^y)} - f_{(x,y+hV^y)} - f_{(x,y)}}{h}$$

Por la propiedad de la suma de los límites podemos expresar como:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f_{(x+hV^x, y+hV^y)} - f_{(x,y+hV^y)}}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f_{(x,y+hV^y)} - f_{(x,y)}}{h}$$

Ahora definamos que:

$$h = \frac{h'}{V^x}$$

Luego, sustituyendo:

$$= \lim_{h'\to 0} \frac{f_{\left(x+h', y+\frac{h'}{V^x}V^y\right)} - f_{\left(x,y+\frac{h'}{V^x}V^y\right)}}{\frac{h'}{V^x}} + \lim_{h\to 0} \frac{f_{\left(x,y+\frac{h'}{V^x}V^y\right)} - f_{(x,y)}}{\frac{h'}{V^x}}$$

Desarrollemos el primer sumando:

$$\lim_{h'\to 0} \frac{f_{\left(x+h', y+\frac{h'}{V^x}V^y\right)} - f_{\left(x,y+\frac{h'}{V^x}V^y\right)}}{\frac{h'}{V^x}} = \lim_{h'\to 0} V^x \frac{\partial f_{\left(x,y+\frac{h'}{V^x}V^y\right)}}{\partial x} = V^x \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial x}$$

Y, procediendo del mismo modo en el otro sumando, obtenemos que:

$$\Delta_{\vec{V}} f_{(x,y)} = V^x \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial x} + V^y \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y}$$

Que, efectivamente, coincide con el Producto Escalar del Gradiente de la función por el vector de referencia:

$$\nabla f_{(x,y)} \cdot \vec{V} = \left(\frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial x}, \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y}\right) \cdot (V^x, V^y)$$

sea la deformación de la curva el vector tangente, en este caso $\vec{A}$, irá cambiando de manera que todo cambio en el módulo del vector tangente nos está indicando que la curva no cambia de manera homogénea.

$$\mathcal{L}_A f_{(x^\alpha)} = A^\alpha \partial_x f$$

b) Recordemos, finalmente, que el producto escalar entre vectores nos produce un escalar; el módulo de un vector sobre la línea en que discurre el otro; la proyección de uno sobre otro.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^\alpha e_\alpha + B^\beta e_\beta \rightarrow A^\alpha B^\beta \delta^\alpha_\beta = escalar$$

Y el resultado, al depender los vectores del punto en que se aplique (imaginemos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en una "malla curva") necesariamente el resultado de $\vec{A} \cdot \vec{B}$ será diferentes según sea el punto en que miremos, es decir, que podemos ***ver*** $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}$ ***como una función*** con el punto como variable independiente.

Teniendo estas tres consideraciones en mente, procedamos, como veníamos desarrollando, a calcular la Derivada de Lie de un vector en su forma covariante.

$$\mathcal{L}_A B_\alpha$$

Para ello usemos el siguiente procedimiento abreviado. Imaginemos que queremos calcular algo como esto:

$$\mathcal{L}_u (A^\alpha B_\alpha)$$

Como hemos dicho, puesto que damos por hecho que la Derivada de Lie cumple la Regla de Leibniz (y la cumple), podemos decir que:

$$\mathcal{L}_u (A^\alpha B_\alpha) = (\mathcal{L}_u A^\alpha) B_\alpha + A^\alpha (\mathcal{L}_u B_\alpha)$$

También hemos dicho que el producto entre dos vectores en una variedad curva puede entenderse como una función del punto en la variedad y como sabemos que la Derivada de Lie también se comporta como una Derivada Dirección, podemos decir que:

$$\mathcal{L}_u (A^\alpha B_\alpha) = \mathcal{L}_u f \rightarrow u^\mu \partial_\mu f = u^\mu \partial_\mu (A^\alpha B_\alpha)$$

Finalmente, para retomar el sentido de una Derivada Direccional, recuérdese que la derivada de un vector es otro vector y que el producto escalar entre vectores produce la proyección de un vector sobre otro. Así, por ejemplo:

$\vec{V} \cdot \frac{df(x)}{dx} = \vec{V} \cdot$ *(vector tg) , luego:* $\vec{V} \cdot \overrightarrow{tg} =$ *un escalar en la dirección del vector de referencia*

Es decir que, finalmente, podemos afirmar que:

$$\mathcal{L}_u(A^\alpha B_\alpha) \equiv u^\mu \partial_\mu (A^\alpha B_\alpha)$$

Por lo que (seguimos combinando nuestras consideraciones) podemos decir que:

$$(\mathcal{L}_u A^\alpha) B_\alpha + A^\alpha (\mathcal{L}_u B_\alpha) = u^\mu \partial_\mu (A^\alpha B_\alpha)$$

(OBSERVACIÓN. Fijémonos en que ya nos aparece aquello que estamos buscando: $\mathcal{L}_u B_\alpha$. Ahora sólo nos falta despejarlo)

Por la propia definición de Derivada de Lie ($\mathcal{L}_A B^\alpha = A^\beta \partial_\beta B^\alpha - B^\beta \partial_\beta A^\alpha$) podemos seguir sustituyendo algunos elementos en el término izquierdo de nuestra expresión:

$$(\mathcal{L}_u A^\alpha) B_\alpha + A^\alpha (\mathcal{L}_u B_\alpha) = u^\mu \partial_\mu (A^\alpha B_\alpha)$$

$$\left(u^\beta \partial_\beta A^\alpha - A^\beta \partial_\beta u^\alpha\right) B_\alpha + A^\alpha (\mathcal{L}_u B_\alpha) = u^\mu \partial_\mu (A^\alpha B_\alpha)$$

Y ahora podemos seguir trabajando en la parte que hemos marcado en rojo, pues es la derivada de un producto:

$$\left(u^\beta \partial_\beta A^\alpha - A^\beta \partial_\beta u^\alpha\right) B_\alpha + A^\alpha (\mathcal{L}_u B_\alpha) = u^\mu \left(\partial_\mu A^\alpha\right) B_\alpha + u^\mu A^\alpha \left(\partial_\mu B_\alpha\right)$$

Desarrollemos el producto en el término izquierdo:

$$u^\beta \partial_\beta A^\alpha B_\alpha - A^\beta \partial_\beta u^\alpha B_\alpha + A^\alpha (\mathcal{L}_u B_\alpha) = u^\mu \left(\partial_\mu A^\alpha\right) B_\alpha + u^\mu A^\alpha \left(\partial_\mu B_\alpha\right)$$

Ahora, si "reconducimos" los índices del término marcado en verde de manera que coincidan con el término similar en el lado izquierdo de nuestra expresión (recordemos, podemos hacerlo con aquellos que están libres) $\mu \to \beta$, tenemos que se anulan:

$$\cancel{u^\beta \partial_\beta A^\alpha B_\alpha} - A^\beta \partial_\beta u^\alpha B_\alpha + A^\alpha (\mathcal{L}_u B_\alpha) = \cancel{u^\mu \left(\partial_\mu A^\alpha\right) B_\alpha} + u^\mu A^\alpha \left(\partial_\mu B_\alpha\right)$$

$$-A^\beta \partial_\beta u^\alpha B_\alpha + A^\alpha (\mathcal{L}_u B_\alpha) = u^\mu A^\alpha \left(\partial_\mu B_\alpha\right)$$

$$A^\alpha (\mathcal{L}_u B_\alpha) = u^\mu A^\alpha \left(\partial_\mu B_\alpha\right) + A^\beta \partial_\beta u^\alpha B_\alpha$$

Y nos faltaría sacar factor común A^α en todos los términos para poder anularlo y quedarnos con la expresión que estamos buscando. Para ello baste con sustituir, en el término marcado en rojo, $\beta \leftrightarrow \alpha$:

$$A^\alpha (\mathcal{L}_u B_\alpha) = A^\alpha u^\mu \partial_\mu B_\alpha + A^\alpha \partial_\alpha u^\beta B_\beta$$

Y, puesto que μ está libre, podemos, para homogeneizar la expresión, intercambiar por β de manera que:

$$A^\alpha (\mathcal{L}_u B_\alpha) = A^\alpha u^\beta \partial_\beta B_\alpha + A^\alpha \partial_\alpha u^\beta B_\beta$$

$$(\mathcal{L}_u B_\alpha) = u^\beta \partial_\beta B_\alpha + B_\beta \partial_\alpha u^\beta$$

$$(\mathcal{L}_A B_\alpha) = A^\beta \partial_\beta B_\alpha + B_\beta \partial_\alpha A^\beta$$

Que es lo que estábamos buscando.

Y, de esta manera, por fin, tenemos la definición de la Derivada de Lie según cuatro modelos:

$$\mathcal{L}_A B^\alpha = A^\beta \partial_\beta B^\alpha - B^\beta \partial_\beta A^\alpha \quad // \quad \mathcal{L}_A B^\alpha = A^\beta \nabla_\beta B^\alpha - B^\beta \nabla_\beta A^\alpha \quad [189]$$

$$\mathcal{L}_A B_\alpha = A^\beta \partial_\beta B_\alpha + B_\beta \partial_\alpha A^\beta \quad // \quad \mathcal{L}_A B_\alpha = A^\beta \nabla_\beta B_\alpha + B_\beta \nabla_\alpha A^\beta \quad [190]$$

§

Llegados a este punto es muy importante anticipar hacia dónde nos dirigimos con el estudio de la Derivada de Lie. La Derivada de Lie de un Tensor Métrico[191], es decir, de la Métrica, nos va a proporcionar un resultado muy potente para el desarrollo del estudio de la Relatividad General: la Ecuación de Killing. Una ecuación que nos va a permitir conocer la simetría de un espacio-tiempo. Sin embargo, antes, como culminación de este epígrafe acerca de la Derivada de Lie, terminemos de desarrollar la Derivada de Lie de un Tensor tipo $(2,0)$ y otro del tipo $(0,2)$.

Derivada de Lie de un Tensor tipo (2,0): $\overline{T} = T^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu$

En primer lugar, recordemos que la Derivada de Lie de un vector es otro vector (recordemos el esquema gráfico). Es decir, si tenemos dos campos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y queremos calcular $\mathcal{L}_A \vec{B}$, el resultado, naturalmente, será la componente de un vector asociada a una base determinada. Es decir, un vector que se expresa en según una base:

$$\mathcal{L}_A \vec{B} = (\mathcal{L}_A B^\alpha) e_\alpha$$

Igualmente, si estamos calculando la Derivada de Lie de un campo $\vec{u}$ por un tensor, el resultado será una determinada componente que, igualmente, se "desplegará" mediante una combinación lineal de una base tensorial determinada, es decir:

---

[189] Véase nota 138.

[190] Mediante un desarrollo simétrico al realizado en la nota 139 tenemos que:

$$\nabla_\beta B_\alpha = \left[\frac{\partial B_\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} B_\gamma\right] = \partial_\beta B_\alpha + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} B_\gamma$$

$$\nabla_\beta A_\alpha = \left[\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} A_\gamma\right] = \partial_\beta A_\alpha + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} A_\gamma$$

Esto cómo va?...

[191] Definir bien…

$$\mathcal{L}_u \overline{T} \rightarrow \mathcal{L}_u (T^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu)$$

Que por la Regla de Leibniz:

$$= (\mathcal{L}_u T^{\mu\nu})\ e_\mu \otimes e_\nu + T^{\mu\nu} \left(\mathcal{L}_u (e_\mu \otimes e_\nu) \right)$$

En primer lugar puesto que $T^{\mu\nu}$ es una función de los puntos μ y ν, podemos desarrollar el término como la Derivada de Lie de una función[192]:

$$(\mathcal{L}_u T^{\mu\nu}) = u^\alpha \partial_\alpha T^{\mu\nu}$$

Dejemos esto de momento así y centremos nuestra atención ahora en un término más complejo. ¿Cómo resolveríamos esta parte?:

$$\mathcal{L}_u (e_\mu \otimes e_\nu)$$

Para ello, recordemos que hemos establecido como condición apriorística que la Derivada de Lie cumple la Regla de Leibniz (de hecho, es cosustancial a la definición de Derivada de Lie). Así, podremos afirmar que:

$$\mathcal{L}_u (e_\mu \otimes e_\nu) = (\mathcal{L}_u e_\mu) \otimes e_\nu + e_\mu \otimes (\mathcal{L}_u e_\nu)$$

Procedamos a estudiar esta expresión. Para ello cambiemos los índices momentáneamente para sumergirnos en su estudio y no confundir arrastrando índices que nos puedan confundir:

$$\mathcal{L}_u (e_\alpha \otimes e_\beta) = (\mathcal{L}_u e_\alpha) \otimes e_\beta + e_\alpha \otimes (\mathcal{L}_u e_\beta)$$

Y a continuación, para resolver esta expresión, concretémosla en un caso especialmente simplificado. Supongamos que estamos ante una expresión concreta en que:

$$e_\alpha = e_1 \ \text{ y } \ e_\beta = e_2$$

De manera que:

$$\mathcal{L}_u (e_1 \otimes e_2) = (\mathcal{L}_u e_1) \otimes e_2 + e_1 \otimes (\mathcal{L}_u e_2)$$

Naturalmente, el vector $e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + \cdots$ y $e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + \cdots$

Es decir, que el vector $\mathcal{L}_u e_1$, se puede expresar como:

$$\mathcal{L}_u e_1 = (\mathcal{L}_u A^\alpha) \cdot e_\alpha$$

Expresión para cuya parte marcada en verde ya tenemos una definición (adaptamos las letras para evitar confusiones):

$$\mathcal{L}_u A^\alpha = \left(u^\beta \partial_\beta A^\alpha - A^\beta \partial_\beta u^\alpha \right) \cdot e_\alpha$$

[192] Recoger dónde está.

Y, como en el caso que nos ocupa, A^α sólo puede ser 1 ó 0, necesariamente resulta que:

$$\left(\cancel{u^\beta \partial_\beta A^\alpha} - A^\beta \partial_\beta u^\alpha\right) \cdot e_\alpha$$

La parte roja se anula por ser la derivada de una constante y, lo que sobrevive queda como:

$$\left(-A^\beta \partial_\beta u^\alpha\right) \cdot e_\alpha$$

Puesto que estamos en un supuesto en que $\beta = 1$:

$$\mathcal{L}_u e_1 = \left(-A^\beta \partial_\beta u^\alpha\right) \cdot e_\alpha$$

$$= \left(-(1)\partial_1 u^\alpha\right) \cdot e_\alpha$$

$$= \left(-\partial_1 u^\alpha\right) \cdot e_\alpha$$

E igualmente, para $\mathcal{L}_u e_2$ en que $\beta = 2$:

$$\mathcal{L}_u e_2 = \left(-\partial_2 u^\alpha\right) \cdot e_\alpha$$

Ahora sustituyamos en la expresión provisional que estábamos estudiando:

$$\mathcal{L}_u(e_1 \otimes e_2) = (\mathcal{L}_u e_1) \otimes e_2 + e_1 \otimes (\mathcal{L}_u e_2)$$

$$\mathcal{L}_u(e_1 \otimes e_2) = \left((-\partial_1 u^\alpha) \cdot e_\alpha\right) \otimes e_2 + e_1 \otimes \left((-\partial_2 u^\alpha) \cdot e_\alpha\right)$$

Y ahora, confirmamos que $\mu = 1$ y $\nu = 2$ [193] de manera que:

$$\mathcal{L}_u\left(e_\mu \otimes e_\nu\right) = -\left(\partial_\mu u^\alpha \cdot e_\alpha\right) \otimes e_\nu - e_\mu \otimes \left(\partial_\nu u^\alpha \cdot e_\alpha\right)$$

$$= -\partial_\mu u^\alpha \ e_\alpha \otimes e_\nu - \partial_\nu u^\alpha \ e_\mu \otimes e_\alpha$$

Ahora recordemos nuestra expresión inicial:

$$\mathcal{L}_u \overline{T} \to \mathcal{L}_u(T^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu) = (\mathcal{L}_u T^{\mu\nu}) \ e_\mu \otimes e_\nu + T^{\mu\nu}\left(\mathcal{L}_u\left(e_\mu \otimes e_\nu\right)\right)$$

$$= u^\alpha \partial_\alpha T^{\mu\nu} \ e_\mu \otimes e_\nu + T^{\mu\nu}\left(-\partial_\mu u^\alpha \ e_\alpha \otimes e_\nu - \partial_\nu u^\alpha \ e_\mu \otimes e_\alpha\right)$$

$$= u^\alpha \partial_\alpha T^{\mu\nu} \ e_\mu \otimes e_\nu - T^{\mu\nu} \partial_\mu u^\alpha \ e_\alpha \otimes e_\nu - T^{\mu\nu} \partial_\nu u^\alpha \ e_\mu \otimes e_\alpha$$

Y ahora, tratemos de sacar $(e_\mu \otimes e_\nu)$ como factor común. Para ello:

- Término azul. Puesto que α es un índice libre, podemos hacer: $\alpha \leftrightarrow \mu$

$$-T^{\alpha\nu} \partial_\alpha u^\mu \ e_\mu \otimes e_\nu$$

- Término verde. Puesto que α es un índice libre, podemos hacer: $\alpha \leftrightarrow \nu$

$$-T^{\mu\alpha} \partial_\alpha u^\nu \ e_\mu \otimes e_\nu$$

[193] Recordemos que estamos en un escenario en que $e_\mu \otimes e_\nu = e_1 \otimes e_2$. ¿Por qué entonces hemos tenido que meter un '*alpha*' y una '*beta*'? Naturalmente, porque dentro del "submundo" $\mu = 1$ y/o $\nu = 2$ había que permitir el despliegue de todas las posibilidades mediante la inclusión de índices nuevos 'reseteados'. Si no lo hiciéramos así podríamos caer en un razonamiento circular.

Es decir, que:

$$= u^{\alpha}\partial_{\alpha}T^{\mu\nu}\ \ e_{\mu}\otimes e_{\nu} - T^{\alpha\nu}\partial_{\alpha}u^{\mu}\ \ e_{\mu}\otimes e_{\nu} - T^{\mu\alpha}\partial_{\alpha}u^{\nu}\ \ e_{\mu}\otimes e_{\nu}$$

Por lo que, finalmente:

$$\mathcal{L}_u\overline{T} \to \mathcal{L}_u(T^{\mu\nu}e_{\mu}\otimes e_{\nu}) = (u^{\alpha}\partial_{\alpha}T^{\mu\nu} - T^{\alpha\nu}\partial_{\alpha}u^{\mu} - T^{\mu\alpha}\partial_{\alpha}u^{\nu})e_{\mu}\otimes e_{\nu}$$

Es decir que la derivada de un Tensor tipo (2,0) es[194]:

$$u^{\alpha}\partial_{\alpha}T^{\mu\nu} - T^{\alpha\nu}\partial_{\alpha}u^{\mu} - T^{\mu\alpha}\partial_{\alpha}u^{\nu}$$

§

Procedamos análogamente con la Derivada de Lie de un Tensor tipo $(0,2)$.

Para ello traigamos aquí la definición de la que vamos a tener que hacer uso:

$$\mathcal{L}_u A_{\alpha} = u^{\beta}\partial_{\beta}A_{\alpha} + A_{\beta}\partial_{\alpha}u^{\beta}$$

En este caso vamos a abordar:

$$\mathcal{L}_u\overline{T} \to \mathcal{L}_u\left(T_{\mu\nu}\,e^{\mu}\otimes e^{\nu}\right)$$

Esto, por la Regla de Leibniz podemos plantearlo como:

$$\mathcal{L}_u\left(T_{\mu\nu}\,e^{\mu}\otimes e^{\nu}\right) =$$

$$= \left(\mathcal{L}_u T_{\mu\nu}\right)e^{\mu}\otimes e^{\nu} + T_{\mu\nu}\left(\mathcal{L}_u(e^{\mu}\otimes e^{\nu})\right)$$

El término marcado en verde, al ser tratado como la Derivada de Lie de una función, puede ser expresado como:

$$\mathcal{L}_u T_{\mu\nu} = u^{\alpha}\partial_{\alpha}T_{\mu\nu}$$

Centrémonos, ahora en la parte azul, mucho más interesante. Sabemos que por la Regla de Leibniz se cumple que:

$$\mathcal{L}_u(e^{\mu}\otimes e^{\nu}) = (\mathcal{L}_u e^{\mu})\otimes e^{\nu} + e^{\mu}\otimes(\mathcal{L}_u e^{\nu})$$

Ahora, tal y como hicimos en el caso anterior, para facilitar la resolución general de este caso, descendamos a un caso concreto muy simple para hallar el camino hacia la resolución. Supongamos, en tal sentido que:

$$e^{\mu} = e^{1}$$

[194] Obviamente, el resultado es una componente que se "desarrolla" en la base tensorial $e_{\mu}\otimes e_{\nu}$

$$e^{\nu} = e^{2}$$

Sustituyamos en nuestra expresión y desarrollemos análogamente a como hicimos anteriormente:

$$(\mathcal{L}_u e^{\mu}) \otimes e^{\nu} + e^{\mu} \otimes (\mathcal{L}_u e^{\nu})$$

$$(\mathcal{L}_u e^{1}) \otimes e^{2} + e^{1} \otimes (\mathcal{L}_u e^{2})$$

Sabemos que:

$$(\mathcal{L}_u e^{1}) = u^{\beta}\partial_{\beta}A_{\alpha} + A_{\beta}\partial_{\alpha}u^{\beta}$$

Es decir que:

$$(\mathcal{L}_u e^{1}) = \cancel{u^{1}\partial_{1}(1)_{\alpha}} + (1)_{1}\partial_{\alpha}u^{1}$$

Por lo que podemos afirmar que:

$$(\mathcal{L}_u e^{1}) = (\partial_{\alpha}u^{1}) \cdot e^{\alpha}$$

E, igualmente:

$$(\mathcal{L}_u e^{2}) = (\partial_{\alpha}u^{2}) \cdot e^{\alpha}$$

Ahora, como hemos dicho, identifiquemos $\mu = 1$ y $\nu = 2$ y sustituyamos de manera que podremos pasar desde:

$$(\mathcal{L}_u e^{1}) \otimes e^{2} + e^{1} \otimes (\mathcal{L}_u e^{2})$$

Hasta:

$$\left((\partial_{\alpha}u^{1}) \cdot e^{\alpha}\right) \otimes e^{2} + e^{1} \otimes \left((\partial_{\alpha}u^{2}) \cdot e^{\alpha}\right)$$

$$(\partial_{\alpha}u^{\mu}) \cdot e^{\alpha} \otimes e^{\nu} + e^{\mu} \otimes e^{\alpha} \cdot (\partial_{\alpha}u^{\nu})$$

Recordemos que esta expresión forma parte de una expresión más amplia:

$$\ldots + T_{\mu\nu}\left(\mathcal{L}_u(e^{\mu} \otimes e^{\nu})\right)$$

Es decir, que, sustituyendo, tenemos que la podemos expresar como:

$$\ldots + T_{\mu\nu}\left((\partial_{\alpha}u^{\mu}) \cdot e^{\alpha} \otimes e^{\nu} + e^{\mu} \otimes e^{\alpha} \cdot (\partial_{\alpha}u^{\nu})\right)$$

Que si desarrollamos el producto queda como:

$$\ldots + T_{\mu\nu}\partial_{\alpha}u^{\mu} \cdot e^{\alpha} \otimes e^{\nu} + T_{\mu\nu}\partial_{\alpha}u^{\nu} \cdot e^{\mu} \otimes e^{\alpha}$$

Y ahora, como hicimos anteriormente, reorganicemos índices para sacar la base tensorial como factor común ($\mu \leftrightarrow \alpha$ y $\nu \leftrightarrow \alpha$):

$$\ldots + T_{\alpha\nu}\partial_{\mu}u^{\alpha} \cdot e^{\mu} \otimes e^{\nu} + T_{\mu\alpha}\partial_{\nu}u^{\alpha} \cdot e^{\mu} \otimes e^{\nu}$$

Ahora, recordemos de nuevo que nuestra expresión era aún más completa. Presentémosla plenamente:

$$\mathcal{L}_u\left(T_{\mu\nu}\, e^{\mu} \otimes e^{\nu}\right) =$$

$$= u^{\alpha}\partial_{\alpha}T_{\mu\nu} \cdot \; e^{\mu} \otimes e^{\nu} + T_{\alpha\nu}\partial_{\mu}u^{\alpha} \cdot e^{\mu} \otimes e^{\nu} + T_{\mu\alpha}\partial_{\nu}u^{\alpha} \cdot e^{\mu} \otimes e^{\nu}$$

Si sacamos factor común ($e^{\mu} \otimes e^{\nu}$) obtenemos que:

$$= \left(u^{\alpha}\partial_{\alpha}T_{\mu\nu} + T_{\alpha\nu}\partial_{\mu}u^{\alpha} + T_{\mu\alpha}\partial_{\nu}u^{\alpha}\right) \cdot e^{\mu} \otimes e^{\nu}$$

Que es, definitivamente, la expresión general para el cálculo de la Derivada de Lie de un Tensor de tipo $(0,2)$.

§

Y ahora, por fin, llegamos a la conclusión definitiva de este epígrafe sobre las Derivadas de Lie. ¿Para que nos sirven en el estudio de la Relatividad General? Para calcular los vectores de Killing y la Ecuación de Killing. Veamos qué es esto y qué utilidad tiene.

Supongamos que tenemos una métrica $g_{\mu\nu}$ e imaginemos que existe un vector (o un tensor) $\vec{u}$ tal que resulta que:

$$\mathcal{L}_u g_{\mu\nu} = 0$$

En tal caso podremos decir que en el espacio regido por dicha Métrica[195] ***existe simetría en la dirección dada por el vector $\vec{u}$. A los vectores que hacen que se cumplan esta condición se les llama Vectores de Killing.***

Veamos cómo se llega de esta condición a la definición de la ***Ecuación de Killing***.

$$\mathcal{L}_u g_{\mu\nu} = 0$$

Es decir que:

$$u^{\alpha}\partial_{\alpha}g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu}\partial_{\mu}u^{\alpha} + g_{\mu\alpha}\partial_{\nu}u^{\alpha} = 0$$

Recordemos ahora que decíamos que:

$$\mathcal{L}_A B^{\alpha} = A^{\beta}\partial_{\beta}B^{\alpha} - B^{\beta}\partial_{\beta}A^{\alpha} \quad // \quad \mathcal{L}_A B^{\alpha} = A^{\beta}\nabla_{\beta}B^{\alpha} - B^{\beta}\nabla_{\beta}A^{\alpha}$$

$$\mathcal{L}_A B_{\alpha} = A^{\beta}\partial_{\beta}B_{\alpha} + B_{\beta}\partial_{\alpha}A^{\beta} \quad // \quad \mathcal{L}_A B_{\alpha} = A^{\beta}\nabla_{\beta}B_{\alpha} + B_{\beta}\nabla_{\alpha}A^{\beta}$$

[195] Hemos calculado la derivada de un Tensor Métrico, un tensor construido mediante los elementos de la métrica.

Es decir que, en el caso de las Derivadas de Lie, es decir, ante una combinación particular de Derivadas Parciales[196], podemos sustituir:

$$\partial_\alpha \leftrightarrow \nabla_\alpha$$

Esta propiedad va a facilitar mucho la resolución de la ecuación diferencial que hemos propuesto ya que podemos expresar esto:

$$u^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu}\partial_\mu u^\alpha + g_{\mu\alpha}\partial_\nu u^\alpha = 0$$

Como:

$$u^\alpha \nabla_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu}\nabla_\mu u^\alpha + g_{\mu\alpha}\nabla_\nu u^\alpha = 0$$

Y ahora recordemos que estábamos trabando en espacios sin Torsión, es decir, espacios en que:

$$\nabla g = 0$$

Por ello, podremos replantear como:

$$\cancel{u^\alpha \nabla_\alpha g_{\mu\nu}} + g_{\alpha\nu}\nabla_\mu u^\alpha + g_{\mu\alpha}\nabla_\nu u^\alpha = 0$$

$$g_{\alpha\nu}\nabla_\mu u^\alpha + g_{\mu\alpha}\nabla_\nu u^\alpha = 0$$

Ahora, sabiendo que estamos bajo la condición $\nabla g = 0$, desarrollemos el siguiente razonamiento aplicando la regla de Leibniz a la Derivada Covariante del producto de *algo* (X) por la *Métrica* (g):

$$\nabla(X \cdot g) \rightarrow R.L. \rightarrow \nabla(X) \cdot g + X \cdot \nabla g$$

Donde el segundo término es obviamente igual a cero (la Derivada Covariante de la métrica es cero). Es decir que:

$$\nabla(X \cdot g) = \nabla(X) \cdot g$$

O lo que es lo mismo, la Métrica puede entrar y salir al operador de la Derivada Covariante (cosa normal por otro lado, pues estamos diciendo que es constante). Así, podemos reescribir la expresión:

$$g_{\alpha\nu}\nabla_\mu u^\alpha + g_{\mu\alpha}\nabla_\nu u^\alpha = 0$$

Como (es decir, metiendo la métrica en el operador):

$$\nabla_\mu g_{\alpha\nu} u^\alpha + \nabla_\nu g_{\mu\alpha} u^\alpha = 0$$

Y, ahora, si recordamos que al multiplicar un una función u^α por el elemento de la métrica $g_{\mu\alpha}$ obteníamos u_μ [197], podremos decir que:

[196] Obviamente no siempre. Sólo ante el tipo de combinación de Derivadas Parciales que propone la Derivada de Lie.

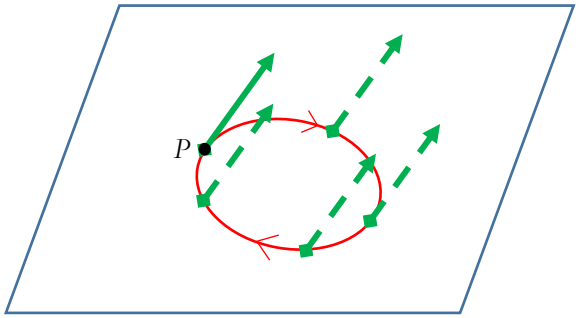
[197] Decir dónde.

$$\nabla_\mu u_\nu + \nabla_\nu u_\mu = 0$$

Que es la *Ecuación de Killing, mediante la cual podremos conocer magnitudes invariantes y simetrías en el espacio-tiempo*.

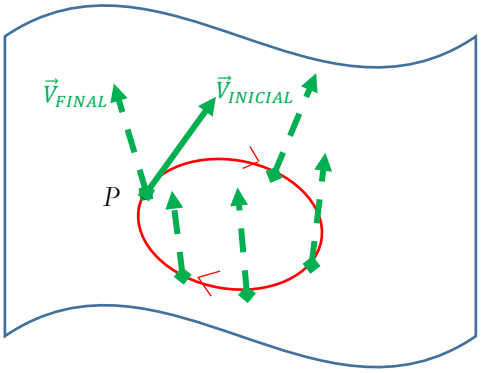
El Tensor de Riemann.

Imaginemos una variedad cualquiera cuya naturaleza desconocemos. ¿Cómo podemos saber si es plana o curva? Muy simple. Imaginemos el siguiente escenario: nuestra variedad de naturaleza desconocida, una trayectoria cerrada y un vector que se desplaza paralelamente a lo largo de dicha trayectoria desde un P hasta retornar a dicho punto P.



Efectivamente, si desplazamos paralelamente el vector a lo largo de la trayectoria cerrada de manera que cubramos una vuelta completa y el vector sigue siendo el mismo, ciertamente, podremos decir que estamos ante una variedad plana, sin curvatura.

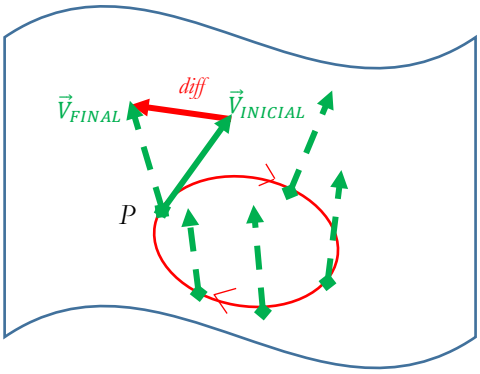
En cambio, si sucede que, al completar la vuelta, el vector ha cambiado de orientación o módulo:



Podremos asegurar que estamos ante una variedad que presenta curvatura[198]. De hecho, la variedad estará "más o menos curvada" de manera proporcional a la diferencia entre el $\vec{V}_{INICIAL}$ (antes del desplazamiento) y el $\vec{V}_{FINAL}$ (tras el desplazamiento).

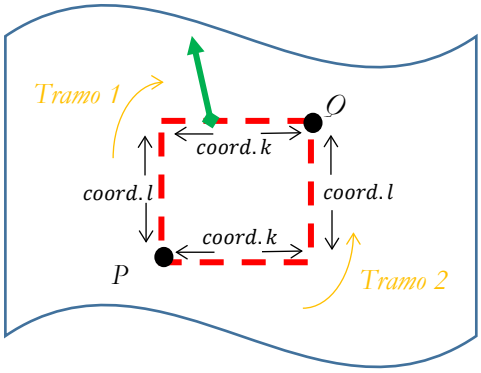
Dicha diferencia podremos verla como otro vector (propiamente dicho: un tensor):

[198] Recordemos lo que pasaba con la proyección de un vector en una superficie curva cuando transportábamos el vector "puro" paralelamente a lo largo de una trayectoria en una variedad curva (era la superficie de una esfera).



Esa diferencia (en el caso de la variedades más complejas, con más dimensiones, que la que estamos usando para ejemplificar el asunto) corresponde, de hecho, a un tensor de curvatura. En el caso que vamos a estudiar, al Tensor de Riemann.

Para desarrollar y poder estudiar cómodamente este concepto, supongamos que la trayectoria cerrada a lo largo de la que se desplaza el vector en nuestra variedad presenta la siguiente forma:



De hecho, podremos ver la variación (recordemos que estamos en un punto, en un diferencial) aún antes… Así, si suponemos que las líneas verticales de nuestra nueva trayectoria cerrada están asociadas a una dimensión l y las líneas horizontales a una dimensión k, podríamos estudiar el recorrido de esta trayectoria como: " ¿A qué es igual el comportamiento del desplazamiento paralelo del vector a lo largo del tramo 1 menos comportamiento del desplazamiento paralelo del vector del tramo 2?". Esto es, si la diferencia del comportamiento (y recordemos que estamos hablando de magnitudes diferenciales), es cero, podremos decir que la variedad, al menos en ese punto, es plana. En cambio si es diferente de cero, podremos afirmar que es curva.

¿Cómo analizamos esto? Muy simple. Recordemos la Derivada Covariante de un vector. Veamos cómo cambia el vector a lo largo de su desplazamiento por los diferentes tramos.

El primer tramo lo estudiaremos, parece obvio, según el modelo: "cómo cambia (o no) el vector cuando cambia la coordenada l y, después, cómo cambia el vector que ha llegado a ese punto intermedio (el vértice superior izquierdo del cuadrado) según cambia la coordenada k". Es decir (recordemos el orden de "dentro hacia afuera"):

$$\nabla_k(\nabla_l A^i)$$

De manera análoga, el segundo tramo será:

$$\nabla_l(\nabla_k A^i)$$

Es decir, que nuestro estudio tiene la forma de:

$$\nabla_k \nabla_l A^i - \nabla_l \nabla_k A^i = ¿?$$

¿A qué es igual esta diferencia? Pues como dijimos anteriormente, a la expresión misma de la curvatura de la variedad que puede llegar a ser desde cero (plana) a diferente de cero (curva). Dicha diferencia es, precisamente, como hemos dicho, el Tensor de Riemann.

$$\nabla_k \nabla_l A^i - \nabla_l \nabla_k A^i = R^i_{jkl} A^j \quad [199]$$

(OBSERVACIÓN. Observemos una j 'abajo' en la R y una j 'arriba' en la coordenada A, es decir, esto se despliega como un sumatorio según los criterios de sumación de Einstein)

Procedamos, pues a desarrollar nuestra expresión, para llegar a la definición del Tensor de Riemann.

$$\nabla_k \nabla_l A^i - \nabla_l \nabla_k A^i$$

Analicemos el primer término:

$$\nabla_k \nabla_l A^i$$

En concreto, desarrollemos la Derivada Covariante que hemos marcado en verde (recordemos que derivamos desde dentro hacia fuera):

$$\nabla_l A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{lj} A^j$$

Llamemos a todo esto T^i_l, pues es un tensor. Volvamos entonces al término completo y sigamos desarrollando la siguiente Derivada Covariante, es decir, la Derivada Covariante de un Tensor, que sabemos cómo se hace[200]:

$$\nabla_k \nabla_l A^i \equiv \nabla_k T^i_l$$

$$\nabla_k T^i_l = \partial_k T^i_l + \Gamma^i_{kj} T^j_l - \Gamma^j_{kl} T^i_j$$

Es decir, la Derivada Covariante, en base a la coordenada k, del vector que ha llegado por el tramo 1 al punto intermedio entre P y Q.

Ahora desarrollemos esto, pues sabiendo que:

---

[199] ¿Por qué tiene un nuevo índice 'j'? Muy simple, recordemos cómo definíamos la derivada Covariante de un vector A^i:

$$\nabla_k A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} A^j$$

Es decir, necesitamos desplegar el vector (o tensor resultante) en una coordenada cuyo índice se resetee para recorrer todos los valores posibles desde 1 hasta n.

[200] Recordarlo

$$T_l^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{lj}^i A^j \quad // \quad \nabla_k T_l^i = \partial_k T_l^i + \Gamma_{kj}^i T_l^j - \Gamma_{kl}^j T_j^i$$

Podremos proceder a sustituir[201]:

$$\nabla_k T_l^i = \partial_k \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{lj}^i A^j \right) + \Gamma_{kj}^i \left(\frac{\partial A^j}{\partial x^l} + \Gamma_{ln}^j A^n \right) - \Gamma_{kl}^j \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jm}^i A^m \right)$$

Ahora deshagámonos de los paréntesis:

- Primer término[202]:

$$\partial_k \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{lj}^i A^j \right) = \partial_{kl}^2 A^i + \left(\partial_k \Gamma_{lj}^i \right) A^j + \Gamma_{lj}^i \left(\partial_k A^j \right)$$

- Segundo término:

$$\Gamma_{kj}^i \left(\frac{\partial A^j}{\partial x^l} + \Gamma_{ln}^j A^n \right) = \Gamma_{kj}^i \partial_l A^j + \Gamma_{kj}^i \Gamma_{ln}^j A^n$$

- Tercer término:

$$-\Gamma_{kl}^j \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jm}^i A^m \right) = -\Gamma_{kl}^j \partial_j A^i - \Gamma_{kl}^j \Gamma_{jm}^i A^m$$

Por lo que, finalmente, el minuendo (Tramo 1) de nuestra expresión original es:

$$\nabla_k \nabla_l A^i = \partial_{kl}^2 A^i + \left(\partial_k \Gamma_{lj}^i \right) A^j + \Gamma_{lj}^i \left(\partial_k A^j \right) + \Gamma_{kj}^i \partial_l A^j + \Gamma_{kj}^i \Gamma_{ln}^j A^n - \Gamma_{kl}^j \partial_j A^i - \Gamma_{kl}^j \Gamma_{jm}^i A^m$$

Ahora recordemos que el sustraendo (Tramo 2) de nuestra expresión bajo estudio era:

$$\nabla_l \nabla_k A^i$$

Es decir, exactamente lo mismo, pero con la l y la k permutada. Procedamos pues a usar la misma expresión pero permutando dichos índices (el resto queda, por supuesto, tal cual, pues son independientes).

$$\nabla_l \nabla_k A^i = \partial_{lk}^2 A^i + \left(\partial_l \Gamma_{kj}^i \right) A^j + \Gamma_{kj}^i \left(\partial_l A^j \right) + \Gamma_{lj}^i \partial_k A^j + \Gamma_{lj}^i \Gamma_{kn}^j A^n - \Gamma_{lk}^j \partial_j A^i - \Gamma_{lk}^j \Gamma_{jm}^i A^m$$

Ahora, como estamos proponiendo, calculemos la resta entre ambos tramos[203]:

---

[201] Muy importante, los índices se tendrán que reacondicionar a la hora de hacer la sustitución, es decir, en el primer término la cosa quedará tal cual, pero en el segundo y tercer término los índices, en la expresión sustituida, deberán ser acordes a la forma T_l^j (lo que antes era i ahora deberán ser j, y, claro, las j 'antiguas' de la expresión original, tendrán que adoptar un índice nuevo, por ejemplo n) y T_j^i (las l deberán ser j, y las j antiguas, por ejemplo, m). Para llamar la atención sobre esto las marcaremos con colores.

[202] Recordemos que el término verde es la derivada de un producto.

[203] MUY IMPORTANTE. Antes de proceder a realizar la resta, recordemos que estamos en un espacio sin Torsión, donde los subíndices son perfectamente simétricos y donde, para las derivadas parciales, se puede aplicar el Teorema de Schwartz según el cual $\partial_{lk} = \partial_{kl}$. Marcamos en el mismo color los correspondientes que se anulan.

$$\partial^2_{kl}A^i + (\partial_k\Gamma^i_{lj})A^j + \Gamma^i_{lj}(\partial_k A^j) + \Gamma^i_{kj}\partial_l A^j + \Gamma^i_{kj}\Gamma^j_{ln}A^n - \Gamma^j_{kl}\partial_j A^i - \Gamma^j_{kl}\Gamma^i_{jm}A^m$$
$$(-)\quad \partial^2_{lk}A^i + (\partial_l\Gamma^i_{kj})A^j + \Gamma^i_{kj}(\partial_l A^j) + \Gamma^i_{lj}\partial_k A^j + \Gamma^i_{lj}\Gamma^j_{kn}A^n - \Gamma^j_{lk}\partial_j A^i - \Gamma^j_{lk}\Gamma^i_{jm}A^m$$

De manera que, finalmente, nuestra diferencia para saber si la variedad es curva, nos queda como:

$$\nabla_k\nabla_l A^i - \nabla_l\nabla_k A^i = (\partial_k\Gamma^i_{lj})A^j - (\partial_l\Gamma^i_{kj})A^j + \Gamma^i_{kj}\Gamma^j_{ln}A^n - \Gamma^i_{lj}\Gamma^j_{kn}A^n$$

Ahora tratemos de sacar A^j como factor común. Para ello habrá que 'reconducir' los índices en los términos tercero y cuarto (bastará con hacer conmutar $j \leftrightarrow n$):

$$\nabla_k\nabla_l A^i - \nabla_l\nabla_k A^i = (\partial_k\Gamma^i_{lj})A^j - (\partial_l\Gamma^i_{kj})A^j + \Gamma^i_{kn}\Gamma^n_{lj}A^j - \Gamma^i_{ln}\Gamma^n_{kj}A^j$$

De donde ya podemos sacar factor común A^j:

$$\nabla_k\nabla_l A^i - \nabla_l\nabla_k A^i = (\partial_k\Gamma^i_{lj} - \partial_l\Gamma^i_{kj} + \Gamma^i_{kn}\Gamma^n_{lj} - \Gamma^i_{ln}\Gamma^n_{kj})\,A^j$$

Y ahora recordemos cómo definíamos el Tensor de Riemann:

$$\nabla_k\nabla_l A^i - \nabla_l\nabla_k A^i = R^i_{jkl}A^j$$

Es decir, que el ***Tensor de Riemann*** (que se despliega en dimensiones A^j) es:

$$R^i_{jkl} = \partial_k\Gamma^i_{lj} - \partial_l\Gamma^i_{kj} + \Gamma^i_{kn}\Gamma^n_{lj} - \Gamma^i_{ln}\Gamma^n_{kj} \qquad ^{204}$$

---

[204] Por su importancia recojamos aquí el ***Tensor de Ricci***. No es sino una contracción del Tensor de Riemann. Un caso en el que los índices i y k son iguales:

$$R^i_{jkl} \to i = k \to R^k_{jkl} \to R_{jl}$$

Es decir, un Tensor de Ricci tipo:

$$R_{11} = R^1_{111} + R^2_{121} + R^3_{131} + \cdots$$

En relación a esto se define como ***Curvatura Escalar:***

$$R = g^{ij}R_{ij}$$

Que para dos dimensiones se desarrollaría como: $R = g^{11}R_{11} + g^{12}R_{12} + g^{21}R_{21} + g^{22}R_{22}$

Por otro lado, y puesto que nos va a ser muy útil para definir una serie de propiedades del Tensor de Riemann, veamos cómo se definiría el Tensor de Riemann pero con el índice i, en vez de contravariante, en su versión covariante. Para ello, recordemos [205], para bajar y subir índices, podemos hacer:

$$g_{in} \cdot R^{n}_{jkl} = R_{ijkl}$$

De manera que podemos definir las siguientes ***Propiedades del Tensor de Riemann***:

I) Antisimetría de los índices i, j

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}$$

II) $R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0$ *(la i fija, la j se desplaza)*

III) Identidad de Bianchi:

$$\partial_n \Gamma^i_{jkl} + \partial_l \Gamma^i_{jnk} + \partial_k \Gamma^i_{jln} = 0$$

IV) $R_{ij} = R_{ji}$

V) $R^{ij} = R^{ji}$

VI) $R^{ij} = \frac{1}{2} g^{ij} \partial_j R$ *(donde R es la curvatura escalar)*

VII) Si llamamos $|g|$ al Determinante de la Métrica, entonces el Tensor de Ricci puede ser definido como:

$$R_{ij} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_k \left(\sqrt{|g|}\, \Gamma^k_{ij} \right) - \partial_i \partial_j \left(ln \sqrt{|g|} \right) - \Gamma^k_{li} \Gamma^l_{jk}$$

Y a falta de las demostraciones de esto que lo quiero hacer en cada paso, ya se pasaría a los esquemas geométricos físicos.

[205] Decir dónde

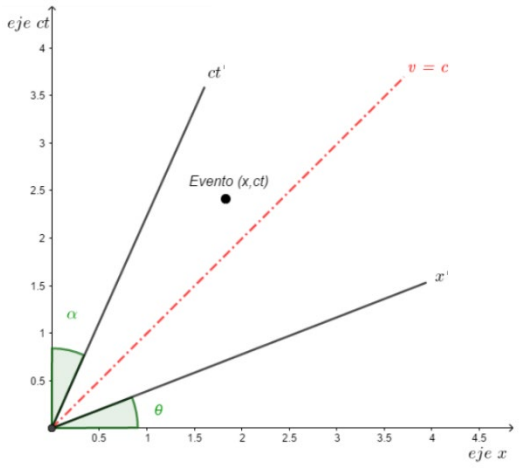
-2.5-

Recuerdos de Relatividad Especial

$\mathcal{S}$

2.5.1 La representación gráfica de eventos relativistas.

Recordemos rápidamente cómo representábamos eventos en el ámbito de la Relatividad Especial[206].



Y recordemos también cómo definíamos las rectas ct' y x'.

$$ct': \quad ct = \frac{c}{v}x \quad ^{207}$$

$$x': \quad ct = \frac{v}{c}x$$

Como sabemos, están coexistiendo dos Sistemas de Referencia:

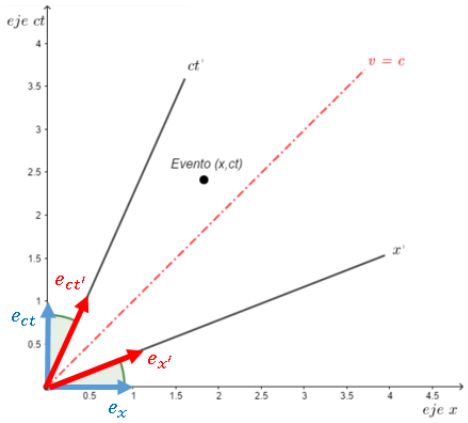
$(ct, x) \rightarrow$ Principal, considerado en reposo relativo a nosotros: S

[206] Véase tal o cual

[207] Es obvio por sí mismo. Si el eje totalmente vertical es ct, un eje viculado a una velocidad menor será vt.

(ct', x') → Primado, considerado en movimiento[208] relativo a nosotros: *S'*

Naturalmente, cada uno de estos sistemas tendrá una base:



Estudiemos la relación que hay entre los vectores de las dos bases[209].

Veamos, en primer lugar, la pendiente. Sabemos que la base del sistema S' debe poder expresarse mediante la base del sistema S, es decir que:

$$e_{ct'} = ¿?\, e_{ct} + ¿?\, e_x$$

$$e_{x'} = ¿?\, e_{ct} + ¿?\, e_x$$

Pero como conocemos las expresiones de la recta en que están insertos los vectores de la base podremos decir que[210]:

$$e_{ct'} = a\left(\frac{c}{v} e_{ct} + e_x\right)$$

$$e_{x'} = b\left(\frac{v}{c} e_{ct} + e_x\right)$$

Sabemos, pues, que esta forma genérica es la que deberían tener los vectores de la base del sistema S'. Pero, además, podemos, y debemos, seguir añadiendo condiciones. Hemos dicho

---

[208] De momento, por supuesto Movimiento Rectilíneo y velocidad constante. Es decir: Relatividad Especial.

[209] Aunque en esta ocasión vamos a tomar otro camino es interesante recordar que para calcular los módulos (unitarios) sencillamente habría que "convertir" la unidad de la base del sistema *S* a la unidad del sistema *S'* mediante la relación hiperbólica que sabemos que tienen.

[210] Recordemos que la pendiente de una recta viene dada por la expresión $y = n + mx$. Puesto que las rectas coinciden con el sistema principal en el origen de coordenadas, es decir, no hay desplazamiento, podemos reducirla a $y = mx$ (pues $n = 0$).
Así, siendo las ecuaciones de las rectas del sistema S':

$$ct': \quad ct = \frac{c}{v}x \quad // \quad x': \quad ct = \frac{v}{c}x$$

Tenemos que las pendientes son:

$$ct, para\ ct', es = \frac{c}{v}$$

$$ct, para\ x, es = \frac{v}{c} \text{ para } x'$$

que el sistema S' se desplaza a una velocidad v respecto del sistema S. Por ello, cuando la velocidad de desplazamiento vaya acercándose a cero, los sistemas deberían ir igualándose hasta, ciertamente, ser iguales cuando $v = 0$. Igualmente, los vectores de las bases deberían ser iguales en ese momento. Veámoslo.

Empecemos por $e_{x'}$:

$$e_{x'} = b\left(\frac{v=0}{c}e_{ct} + e_x\right)$$

$$e_{x'} = b\ e_x$$

De ello podemos deducir que, según parece, b es una cantidad que depende de v y que, en particular, para que nuestra condición se cumpla, cuando $v = 0$, $b_{(v)} = 1$.

Ahora desarrollemos $e_{ct'}$:

$$e_{ct'} = a\left(\frac{c}{v}e_{ct} + e_x\right)$$

De entrada observamos que, igualando $v = 0$, nos topamos con una indeterminación. Para evitarla tratemos de definir nuestra expresión de una manera alternativa que nos ahorre el disgusto. Saquemos $\frac{c}{v}$ como factor común:

$$e_{ct'} = a\left(\frac{c}{v}e_{ct} + \frac{c}{v}\frac{v}{c}e_x\right)$$

$$e_{ct'} = a\ \frac{c}{v}\left(e_{ct} + \frac{v}{c}e_x\right)$$

Ahora llamemos d al conjunto $a\ \frac{c}{v}$:

$$e_{ct'} = d\ \left(e_{ct} + \frac{v}{c}e_x\right)$$

Cuando $v = 0$, debería suceder que $e_{ct'} = e_{ct}$:

$$e_{ct'} = d\ \left(e_{ct} + \frac{v}{c}e_x\right)$$

Por la parte marcada en verde no hay problema:

$$\frac{v=0}{c}e_x + e_{ct} \rightarrow e_{ct}$$

Y por la parte marcada en rojo en la expresión debe cumplirse que d sea una función de v que cumpla que cuando $v = 0$:

$$d_{(v)} = 1$$

De manera que, efectivamente se cumpla que:

$$e_{ct'} = e_{ct}$$

Pasemos ahora a analizar la ortogonalidad de ambas bases. En dicho sentido, para seguir desarrollando nuestra investigación, recurramos a la métrica del espacio. Así, recordando nomenclatura según la cual: $e_{ct} \rightarrow e_0$ y $e_x \rightarrow e_1$… y si ambos vectores son perpendiculares, debe cumplirse que:

$$e_0 \cdot e_1 = 0$$

Es decir, en el sistema S (donde $v = 0$), el espacio es perfectamente euclídeo. Como sabemos que la métrica se construye a partir del producto vectorial de los vectores de la base, resulta que ciertamente:

$$e_0 \cdot e_1 \rightarrow g_{01} = 0$$

Y recordemos que la métrica se define como una matriz simétrica por lo que:

$$g_{01} = 0 = g_{10}$$

Ahora, como estamos en Relatividad Especial y sabemos que el sistema S' es plano (comprimido, lo que sea, pero plano) podemos (y según el primer postulado de la Relatividad Especial, debemos) exigir la misma condición de *perpendicularidad* [211] entre los vectores de la base:

$$e_{0'} \cdot e_{1'} = 0$$

$$g_{0'1'} = 0 = g_{1'0'}$$

Siendo esto así, "imponiendo" esto, sustituyamos:

$$e_{0'} \cdot e_{1'} = 0$$

$$e_{0'} = d\left(e_0 + \frac{v}{c}e_1\right) \quad // \quad e_{1'} = b\left(\frac{v}{c}e_0 + e_1\right)$$

$$\left[d\left(e_0 + \frac{v}{c}e_1\right)\right] \cdot \left[b\left(\frac{v}{c}e_0 + e_1\right)\right] = 0$$

$$db \cdot \left(\frac{v}{c}e_0e_0 + \frac{v}{c}e_1e_1\right) = 0$$

$$db \cdot \frac{v}{c} \cdot (g_{00} + g_{11}) = 0$$

Y llegados a este punto, tenemos tres posibilidades de que esto se cumpla:

- Que db sea cero. Esto es imposible ya que en tal caso estaríamos antes vectores $e_{0'}$ y $e_{1'}$ iguales a cero, cosa que negamos: $e_{0'} = d\left(e_0 + \frac{v}{c}e_1\right) \neq 0 \quad // \quad e_{1'} = b\left(\frac{v}{c}e_0 + e_1\right) \neq 0$

[211] En realidad son ortogonales, es decir, su producto escalar es cero. Ya sabemos que la *perpendicularidad* en estos mundos oblicuos es un concepto relativo a "vivir dentro y estar acostumbrado". A estas alturas nada de esto debe sorprendernos. En definitiva, por el primer Postulado de la Relatividad Especial de cumplirse que el comportamiento de las leyes físicas debe ser el mismo en sistemas inerciales. Así, alguien que se mueva en un mundo *oblicuo* debido a la velocidad a la que se desplaza, lo verá todo normal y en su mundo la perpendicularidad, por muy rara que nos parezca desde fuera, se sigue observando con toda normalidad desde dentro.

- Que $\frac{v}{c}$ sea cero, es decir, que $v = 0$ 'siempre'. Esto también lo negamos pues de manera general v será distinta de cero, es decir: 'puede llegar a ser cero' y, por lo tanto, no siempre es cero.
- Que $g_{00} + g_{11}$ sea cero. Ésta es la situación que nos interesa. Efectivamente para que esto sea cero debe cumplirse que:

$$-g_{00} = g_{11}$$

Esto implica que, seguro, hay alguna situación, alguna combinación normalizada de coordenadas en este sistema, que hace que:

$$g_{11} = 1$$

Y, por lo tanto:

$$g_{00} = -1$$

Esto es fundamental y, seguro, que nos empieza a recordar a la Métrica de Minkowski:

$$\begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hagamos ahora otra imposición en base al primer Postulado de la Relatividad Especial. Es decir, antes hemos impuesto que:

$$g_{0'1'} = 0 = g_{1'0'} \quad \leftrightarrow \quad g_{0'1'} = 0 = g_{1'0'}$$

Impongamos ahora que, puesto que:

$$g_{11} = 1 \text{ y } g_{00} = -1$$

Entonces debe darse que:

$$g_{1'1'} = 1 \text{ y } g_{0'0'} = -1$$

- Veamos $g_{1'1'} = 1$:

$$e_{1'} = b\left(\frac{v}{c}e_0 + e_1\right)$$

Es decir:

$$e_{1'} \cdot e_{1'} = 1$$

$$\left[b\left(\frac{v}{c}e_0 + e_1\right)\right] \cdot \left[b\left(\frac{v}{c}e_0 + e_1\right)\right] = 1$$

$$b^2\left(\frac{v^2}{c^2}e_0e_0 + e_1e_1\right) = 1$$

$$b^2\left(\frac{v^2}{c^2}g_{00} + g_{11}\right) = 1$$

$$b^2\left(\frac{v^2}{c^2}(-1) + (1)\right) = 1$$

$$b^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=1$$

$$b=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Que, ciertamente, es el factor de Lorentz.

- Sucede lo mismo con $g_{0'0'}=-1$:

$$e_{0'}\cdot e_0=-1$$

$$\left[d\ \left(e_0+\frac{v}{c}e_1\right)\right]\cdot\left[d\ \left(e_0+\frac{v}{c}e_1\right)\right]=-1$$

$$d^2\left(e_0e_0+\frac{v^2}{c^2}e_1e_1\right)=-1$$

$$d^2\left(g_{00}+\frac{v^2}{c^2}g_{11}\right)=-1$$

$$d^2\left((-1)+\frac{v^2}{c^2}(1)\right)=-1$$

$$d^2\left(\frac{v^2}{c^2}-1\right)=-1$$

$$d^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=1$$

$$d=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Así, ya conocemos la relación que hay entre los vectores de las bases respectivas de los Sistemas S y S':

$$e_{0'}=d\ \left(e_0+\frac{v}{c}e_1\right)\rightarrow\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(e_0+\frac{v}{c}e_1\right)$$

$$e_{1'}=b\left(\frac{v}{c}e_0+e_1\right)\rightarrow\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\frac{v}{c}e_0+e_1\right)$$

Es decir, si:

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\qquad //\qquad \beta=\frac{v}{c}$$

Entonces:

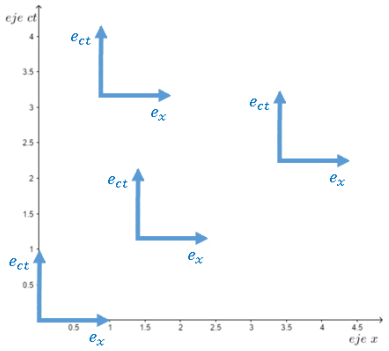
$$e_{0'}=\gamma(e_0+\beta e_1)\qquad //\qquad e_{1'}=\gamma(\beta e_0+e_1)$$

Donde, por supuesto:

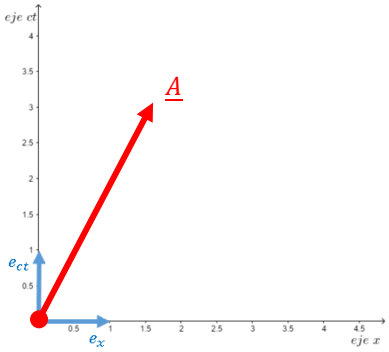
$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad g' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ya sabemos cómo se transforman los vectores de la base de los diferentes sistemas de referencia para que conserven la invarianza. ¿Qué queremos decir?: que para que el "vector puro, nouménico" permanezca invariante, debemos observar una "transformación" determinada de los "vectores fenoménicos", es decir, en la proyección de éstos en un sistema determinado. Estos "vectores puros", al ser invariantes, son Tensores de rango 1. Y, para ello, las bases (y componentes) deben transformarse, relacionarse, del modo en que decimos, el apropiado.

En un sistema S (también el S' internamente, puesto que, de momento, estamos en Relatividad Especial) la base es la misma, es constante para cada uno de sus puntos, es decir, se trata de un espacio-tiempo plano:



Si trazáramos un vector arbitrario cualquiera en este sistema[212] y que fuera considerado un invariante, un Tensor, es decir que su módulo fuera un invariante ante cambio de coordenadas según una transformación oportuna (Lorentz) [213]:



[212] Los vectores trazados en sistemas espaciales, efectivamente, los denotamos así: $\vec{A}$. Sin embargo, convencionalmente, los vectores trazados en sistemas espacio-temoporales se suelen designar así: $\underline{A}$, donde, por ejemplo:

$$\underline{A} = 1\, e_0 + 2\, e_1 + 3\, e_2 + 4\, e_3$$

Así, podemos encontrar definiciones como:

$$\underline{A} = 1\, e_0 + \vec{A} \rightarrow (1, \vec{A}) \rightarrow (1; 2,3,4)$$

[213] $\underline{A} \cdot \underline{A} =$ invariante.

… los ***vectores de la base del sistema*** "destino" (los del S') tendrían que transformarse, ante cambio de Sistemas de Coordenadas, según la expresión ya conocida[214]:

---

[214] Decir dónde. Usamos índices griegos para resaltar que estamos en el espacio-tiempo. Decimos que un vector $\vec{v}$ es un vector (un tensor de rango 1) si su módulo queda invariante bajo una rotación. Es decir, por ejemplo, en R^2, tras transformar un vector mediante una rotación:

$$\overrightarrow{v'} = \begin{pmatrix} cos\,\theta & -sin\,\theta \\ sin\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix} \vec{v}$$

El módulo del vector debe permanecer constante:

$$\overrightarrow{v'} \cdot \overrightarrow{v'} = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

Es invariante, es decir, que sus componentes, expresadas desde un sistema u otro, cumplen que:

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$$

Para ello, para que el módulo de los vectores se invariante para los observadores de los dos sistemas, ***el cambio de base (el cambio de los vectores de la base)***, la relación entre las bases, debe tener la forma conocida:

$$e_{o'} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}} e_\beta$$

Ya hemos visto, en nuestro hilo principal, cómo se transforman, en concreto, las bases de nuestro caso:

$$e_{0'} = \gamma(e_0 + \beta e_1) \qquad // \qquad e_{1'} = \gamma(\beta e_0 + e_1)$$

Recordemos, brevemente, cómo se transforman las coordenadas/componentes del sistema. Sabemos que $e_{o'} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}} e_\beta$. Así, en el caso de los vectores base con los que estamos trabajado lo desarrollaremos como:

$$e_{o'} = \frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}} e_0 + \frac{\partial x^1}{\partial x^{0'}} e_1 \leftrightarrow e_{0'} = \gamma(e_0 + \beta e_1)$$

$$e_{1'} = \frac{\partial x^0}{\partial x^{1'}} e_0 + \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} e_1 \leftrightarrow e_{1'} = \gamma(\beta e_0 + e_1)$$

Es decir que, necesariamente:

$$\frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}} = \gamma \quad // \quad \frac{\partial x^0}{\partial x^{1'}} = \gamma\beta \quad // \quad \frac{\partial x^1}{\partial x^{0'}} = \gamma\beta \quad // \quad \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} = \gamma$$

Esto nos permite encontrar la transformación entre coordenadas/componentes, que es lo que buscábamos en esta nota.

- Veamos x^0.
  Debe cumplir dos condiciones:
  1) $\frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}} = \gamma$. Es decir, que al derivarla por $x^{0'}$ debe darnos γ. Así si integramos a ambos lados:

$$\int \frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}} = \int \gamma\, dx^{0'}$$

$$x^0 = \gamma x^{0'} + K$$

  2) $\frac{\partial x^0}{\partial x^{1'}} = \gamma\beta$. Es decir, que al derivarla por $x^{1'}$ debe darnos $\gamma\beta$.

$$x^0 = \gamma\beta x^{1'} + K$$

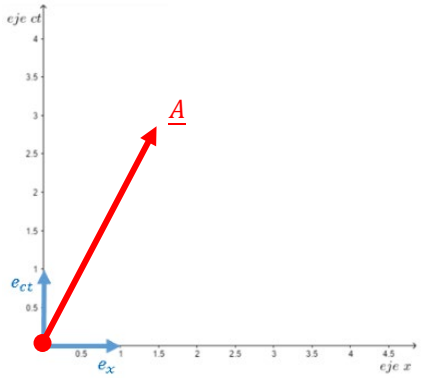
  En conjunto, x^0 debe ser:

$$e_{o'} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'}} e_{\beta}$$

Y las ***componentes (coordenadas) del vector*** deben transformarse, de un sistema a otro, según la expresión también conocida[215] [como nemotecnia, fijémonos que va a la inversa (numerador/denominador) que la base… cosa que tiene bastante sentido (contravariante/covariante)]:

$$A^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} A^{\beta}$$

Con esto que tenemos, exploremos la imposición que estamos haciendo, a saber: que el módulo del vector $\underline{A}$ que proponemos sea invariante para cualquier observador que haya transformado su sistema (tanto base como coordenadas/componentes) según el modelo necesario que conocemos. Es decir, siguiendo nuestro ejemplo genérico de un vector en un espacio-tiempo bidimensional:



$$x^0 = \gamma x^{0'} + \gamma\beta x^{1'} + K$$

- Veamos ahora x^1.
  Análogamente tendríamos que:

$$x^1 = \gamma\beta x^{0'} + \gamma x^{1'} + K$$

Y, como estamos trabajando con incrementos, distancias internas, relativas, no absolutas, podemos considerar que las constantes son cero, pues no afectan y, por lo tanto, ya tendríamos la transformación de coordenadas /componentes:

$$x^0 = \gamma x^{0'} + \gamma\beta x^{1'}$$
$$x^1 = \gamma\beta x^{0'} + \gamma x^{1'}$$

Si las constantes tuvieran valores diferentes de cero, en tal caso no se trataría de una rotación, sino de una Transformación de Poincaré. Sería un desplazamiento, no una rotación o, en todo caso, una rotación con transporte.

La transformación inversa, que nos va a hacer falta, por otro lado, era fácilmente calculable mediante la matriz inversa, y recordemos que es:

$$x^{0'} = \gamma x^0 - \gamma\beta x^1$$
$$x^{1'} = -\gamma\beta x^0 + \gamma x^1$$

[215] Decir dónde.

Queremos que se cumpla que $\underline{A} = A^0 e_0 + A^1 e_1 = A^{0'} e_{0'} + A^{1'} e_{1'}$. Y esto sucederá, como hemos dicho, si transformamos la base como ya hemos hecho y las componentes como estamos diciendo[216]:

$$A^{0'} = \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0} A^0 + \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^1} A^1 = \gamma A^0 - \gamma\beta A^1$$

$$A^{1'} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^0} A^0 + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} A^1 = -\gamma\beta A^0 + \gamma A^1$$

Llegados a este punto, ya tenemos todos los elementos que necesitamos para proseguir. Calculemos el módulo de $\underline{A}$ desde el sistema S:

$$\underline{A} \cdot \underline{A} = (A^0 e_0 + A^1 e_1) \cdot (A^0 e_0 + A^1 e_1)$$

$$= (A^0)^2 (e_0 e_0) + (A^1)^2 (e_1 e_1)$$

$$= (A^0)^2 (g_{00}) + (A^1)^2 (g_{11})$$

$$= (A^0)^2 (-1) + (A^1)^2 (+1)$$

$$= -(A^0)^2 + (A^1)^2$$

Calculemos el módulo de $\underline{A}$ desde el sistema S':

$$\underline{A} \cdot \underline{A} = \left(A^{0'} e_{0'} + A^{1'} e_{1'}\right) \cdot \left(A^{0'} e_{0'} + A^{1'} e_{1'}\right)$$

$$= (A^{0'})^2 (e_{0'} e_{0'}) + (A^{1'})^2 (e_{1'} e_{1'})$$

$$= (A^{0'})^2 (g_{0'0'}) + (A^{1'})^2 (g_{1''_1})$$

$$= (A^{0'})^2 (-1) + (A^{1'})^2 (+1)$$

$$= -(A^{0'})^2 + (A^{1'})^2$$

Como ya tenemos una expresión para $A^{0'}$ y $A^{1'}$, sustituyamos aquí y veamos si, efectivamente, es igual a $\underline{A} \cdot \underline{A} = -(A^0)^2 + (A^1)^2$.

$$-(A^{0'})^2 + (A^{1'})^2 = -\left(\gamma A^0 - \gamma\beta A^1\right)^2 + \left(-\gamma\beta A^0 + \gamma A^1\right)^2$$

$$= -\left(\gamma A^0 - \gamma\beta A^1\right)^2 + \left(-\gamma\beta A^0 + \gamma A^1\right)^2$$

---

[216] Es muy interesante imaginar visualmente estas cosas. Imaginemos un "vector nouménico", real en sí mismo. Imaginemos ahora la representación que, desde nuestro punto de vista, nos hacemos. Estamos mirando una flecha, sin más. Pero ahora resulta que alguien más lo mira desde otro sitio y lo ve, naturalmente, según su perspectiva. Ahora supongamos que estos observadores van girando en torno al vector puro, nosotros, que somos capaces de "manipular sus representaciones" vamos haciendo que se comporten de un modo determinado (el que ya hemos descrito) de manera que garanticemos que, en realidad, estos cambios en la representación están garantizando que el vector "real" permanece invariante. Otro modo, en realidad inverso, es imaginar que vamos moviendo el "vector real" de manera que ellos siempre lo vean igual y de manera coherente entre ellos, que el módulo que miden sea invariante. Ese movimiento, transformación, que nosotros hacemos, son las expresiones de transformación que estamos manejando.

$$= -\left[\gamma^2 \left(A^0\right)^2 + \gamma^2\beta^2 \left(A^1\right)^2 - 2\gamma A^0 \gamma\beta A^1\right] + \left[\gamma^2\beta^2 \left(A^0\right)^2 + \gamma^2 \left(A^1\right)^2 - 2\gamma\beta A^0 \gamma A^1\right]$$

$$= -\gamma^2 \left(A^0\right)^2 - \gamma^2\beta^2 \left(A^1\right)^2 + 2\gamma A^0 \gamma\beta A^1 + \left[\gamma^2\beta^2 \left(A^0\right)^2 + \gamma^2 \left(A^1\right)^2 - 2\gamma\beta A^0 \gamma A^1\right]$$

$$= -\gamma^2 \left(A^0\right)^2 - \gamma^2\beta^2 \left(A^1\right)^2 + 2\gamma^2\beta A^0 A^1 + \gamma^2\beta^2 \left(A^0\right)^2 + \gamma^2 \left(A^1\right)^2 - 2\gamma^2\beta A^0 A^1$$

$$= \gamma^2 \left[-\left(A^0\right)^2 - \beta^2 \left(A^1\right)^2 + 2\beta A^0 A^1 + \beta^2 \left(A^0\right)^2 + \left(A^1\right)^2 - 2\beta A^0 A^1\right]$$

$$= \gamma^2 \left[-\left(A^0\right)^2 - \beta^2 \left(A^1\right)^2 + \cancel{2\beta A^0 A^1} + \beta^2 \left(A^0\right)^2 + \left(A^1\right)^2 - \cancel{2\beta A^0 A^1}\right]$$

Sacamos factor común A^0 y A^1:

$$= \gamma^2 \left[\left(\left(-1+\beta^2\right)\left(A^0\right)^2\right) + \left(\left(1-\beta^2\right)\left(A^1\right)^2\right)\right]$$

$$= \gamma^2 \left[\left((-1)\cdot(-1+\beta^2)(-1)\cdot\left(A^0\right)^2\right) + \left(\left(1-\beta^2\right)\left(A^1\right)^2\right)\right]$$

$$= \gamma^2 \left[\left(\left(1-\beta^2\right)\left(-\left(A^0\right)^2\right)\right) + \left(\left(1-\beta^2\right)\left(A^1\right)^2\right)\right]$$

$$= \gamma^2(1-\beta^2)\left[-\left(A^0\right)^2 + \left(A^1\right)^2\right]$$

Y recordemos que:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad // \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

Es decir que:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

De manera que:

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$$

Luego:

$$= \gamma^2(1-\beta^2)\left[-\left(A^0\right)^2 + \left(A^1\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}(1-\beta^2)[-(A^0)^2 + (A^1)^2]$$

O lo que es lo mismo:

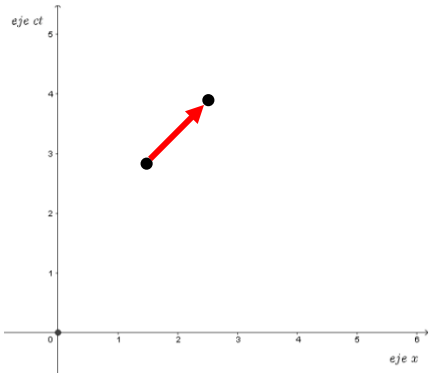
$$= \left[-\left(A^0\right)^2 + \left(A^1\right)^2\right]$$

Q.E.D.

Es decir, que estas transformaciones, efectivamente, dejan invariante el vector que proponíamos.

2.5.2. Elemento de línea o intervalo espaciotemporal. Cuadrivelocidad, tiempo propio y cuadriaceleración.

Con esto que ya conocemos estudiemos ahora dos eventos que se separan por un incremento de espaciotiempo diferencial.



Así, el incremento temporal será[217]:

$$\Delta x^0 = \gamma \Delta x^{0'} + \gamma\beta \Delta x^{1'}$$

Y el incremento en la dimensión espacial:

$$\Delta x^1 = \gamma\beta \Delta x^{0'} + \gamma \Delta x^{1'}$$

Donde, efectivamente, Δx^0 y Δx^1serían las componentes del vector invariante que une los dos eventos:

$$\underline{V} = \Delta x^0 e_0 + \Delta x^1 e_1$$

Decimos invariante porque, como sabemos, para dos observadores S / S', debe cumplirse (si las transformaciones son las que hemos definido) que:

$$\underline{V} \cdot \underline{V} = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 = -\left(\Delta x^{0'}\right)^2 + \left(\Delta x^{1'}\right)^2$$

Por otro lado, como estamos diciendo que la distancia entre los eventos es infinitesimal, las diferencias que estamos recogiendo podemos considerarlas diferenciales:

$$-(dx^0)^2 + (dx^1)^2 = -\left(dx^{0'}\right)^2 + \left(dx^{1'}\right)^2$$

[217] γ y β no tienen incremento. Recordemos que están en función de v y ésta es constante en nuestro entorno provisional de Relatividad Especial.

Y, precisamente, se define el ***elemento de línea*** o intervalo espacio temporal a esta distancia diferencial que, además, cumple que es invariante para sistemas inerciales (***Relatividad Especial***) S/S' transformados adecuadamente:

$$\boldsymbol{ds^2 \equiv -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 = -\left(dx^{0'}\right)^2 + \left(dx^{1'}\right)^2}$$

Para el caso de sistemas no inerciales, es decir, para ***Relatividad General***, el ***elemento de línea*** se define como:

$$\boldsymbol{ds^2 \equiv g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}$$

Observemos que, realmente es lo mismo, puesto que para un espacio plano de Minkowski (en nuestro caso ahora con solo dos dimensiones):

$$ds^2 \equiv g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

$$ds^2 \equiv g_{00} dx^0 dx^0 + g_{01} dx^0 dx^1 + g_{10} dx^1 dx^0 + g_{11} dx^1 dx^1$$

Como la métrica es de un espacio de Minkowski, entonces:

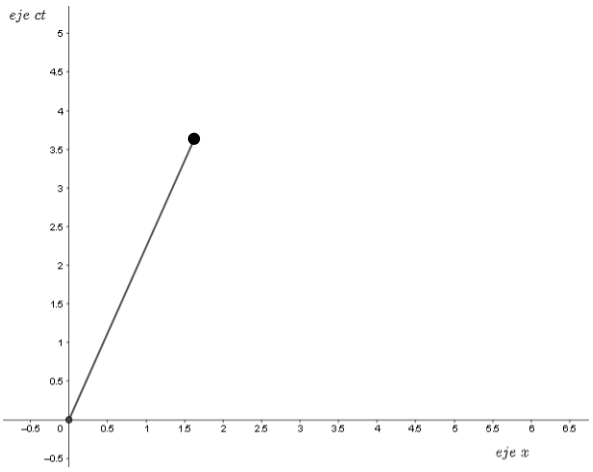
$$ds^2 \equiv (-1) dx^0 dx^0 + (0) dx^0 dx^1 + (0) dx^1 dx^0 + (+1) dx^1 dx^1$$

$$ds^2 \equiv (-1)(dx^0)^2 + (+1)(dx^1)^2$$

$$ds^2 \equiv -(dx^0)^2 + (dx^1)^2$$

Imaginemos ahora un escenario que nos va a permitir retomar el concepto de ***Tiempo Propio*** *(τ)*.

Supongamos un observador S que ve pasar frente a sí una partícula con una velocidad determinada v según un Movimiento Rectilíneo Uniforme. En nuestro modelo de representación gráfica de eventos relativistas, podríamos representar la trayectoria que define la ***cuadrivelocidad*** así:



(OBSERVACIÓN. Es obvio que la partícula habría recorrido unos 1,6 metros en unos 3,8 c ·segundos)

Ahora, si imaginamos un observador S' que se desplaza (con MRU) a la misma cuadrivelocidad v que la partícula, dirá que ésta permanece quieta para él. De hecho, como para S' la partícula estará, en todo momento, en $x' = 0$, podremos decir de la representación

anterior (la del sistema S) que la línea que hemos trazado entre el origen de coordenadas hasta la partícula conforma, de hecho, el eje vertical de S' en el que siempre sucede que $x' = 0$. Es decir, sólo pasa el tiempo, no el espacio (reposo de la partícula para S').

Así, según S, la partícula se mueve pero, según S', no. Sin embargo, como sabemos, a pesar de ello, el elemento de línea debe permanecer invariante para ambos observadores:

$$ds^2 \equiv -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 = -\left(dx^{0'}\right)^2 + \left(dx^{1'}\right)^2$$

$$-c^2dt^2 + dx^2 = -c^2dt'^2 + (dx')^2$$

$$-c^2dt^2 + dx^2 = -c^2dt'^2 + 0^2$$

Con la imposición de esta igualdad vamos a poder ver la relación que existe entre el tiempo de los dos sistemas. Dividamos en ambos lados por $-c^2$:

$$\frac{-c^2dt^2}{-c^2} + \frac{dx^2}{-c^2} = \frac{-c^2dt'^2}{-c^2} + \frac{0}{-c^2}^2$$

$$dt^2 - \frac{1}{c^2}dx^2 = dt'^2$$

Ahora saquemos factor común dt^2 en el término izquierdo:

$$dt^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{1}{dt^2}dx^2\right) = dt'^2$$

$$dt^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dx^2}{dt^2}\right) = dt'^2$$

$$dt^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) = dt'^2$$

$$dt^2\left(1 - \frac{1}{c^2}(\dot{x})^2\right) = dt'^2 \qquad [218]$$

Que finamente nos queda como:

$$dt' = \sqrt{\left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)}dt$$

Que es la definición de ***Tiempo Propio*** $\equiv \boldsymbol{\tau}$ (el tiempo que percibe S' que, en definitiva, es comóvil a la partícula bajo estudio). Los tiempos de los dos observadores son diferentes aunque, ciertamente, a velocidades pequeñas $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ no se percibe pues estamos dividiendo, nada más y nada menos, que por c^2.

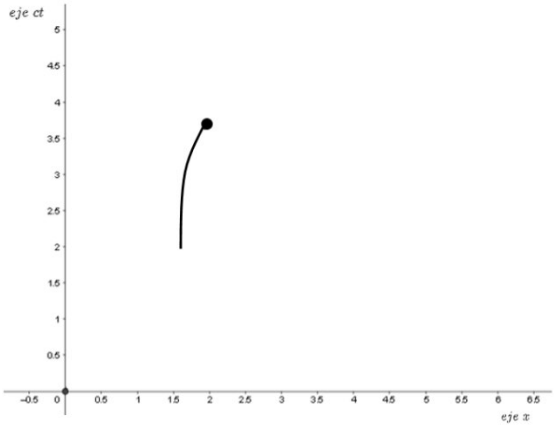
[218] Recordemos la convención $\dot{x}$: derivada primera de x respecto del tiempo, $\ddot{x}$: derivada segunda de x respecto del tiempo, etc…

$$d\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)}\, dt$$

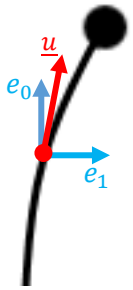
Donde dt es un pequeño incremento de t, el tiempo del observador externo y, muy importante, $d\tau$ es un invariante.

Ahora, a partir del concepto de tiempo propio (τ), podremos llegar el concepto de cuadriaceleración.

Supongamos que la trayectoria que dibuja la cuadrivelocidad no es una línea recta, sino una curva. Efectivamente, la pendiente de la cuadrivelocidad estaría cambiando y, por lo tanto, se trataría de un movimiento acelerado. Veámoslo en un esquema gráfico[219]:



Si hacemos zoom a la trayectoria y analizamos la cuadrivelocidad ($\underline{u}$) en un punto (el vector tangente) estaremos de acuerdo en que podremos definirlo como una combinación lineal de los vectores de la base (e_0, e_1):



$$\underline{u} = u^0\, e_0 + u^1\, e_1$$

Y, siendo $\underline{u}$, una cuadrivelocidad (un vector), podremos reescribir como:

$$\underline{u} = \frac{dx^0}{d\tau} e_0 + \frac{dx^1}{d\tau}\, e_1 \rightarrow \frac{dct}{d\tau} e_0 + \frac{dx}{d\tau}\, e_1 \qquad [220]$$

[219] Téngase en cuenta que la trayectoria de la curva que dibuja la cuadrivelocidad no podrá, en ningún caso, superar los 45º con ninguno de los ejes ya que, en tal caso, la partícula estaría igualando la velocidad de la luz.

$$\underline{u} = c\frac{dt}{d\tau}e_0 + \frac{dx}{d\tau}\,e_1$$

Ahora, para calcular el módulo de la cuadrivelocidad, hacemos el producto escalar por sí mismo:

$$\underline{u}\cdot\underline{u} = \left(c\frac{dt}{d\tau}e_0 + \frac{dx}{d\tau}\,e_1\right)\cdot\left(c\frac{dt}{d\tau}e_0 + \frac{dx}{d\tau}\,e_1\right)$$

Que, sabiendo que estamos en un espacio con métrica de Minkowski, podemos resolver como:

$$\underline{u}\cdot\underline{u} = c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 g_{00} + \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 g_{11}$$

$$= c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2(-1) + \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2(+1)$$

$$= -c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2$$

Pero, ahora, recordemos que, para calcular el tiempo propio, decíamos que:

$$ds^2 \equiv -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 = -\left(dx^{0'}\right)^2 + \left(dx^{1'}\right)^2$$

$$-c^2dt^2 + dx^2 = -c^2dt'^2 + (dx')^2$$

$$-c^2dt^2 + dx^2 = -c^2dt'^2 + 0^2$$

$$-c^2dt^2 + dx^2 = -c^2dt'^2$$

Si dividimos esta expresión por $d\tau^2$ tenemos que[221]:

$$\frac{-c^2dt^2}{d\tau^2} + \frac{dx^2}{d\tau^2} = \frac{-c^2d\tau^2}{d\tau^2}$$

$$-c^2\frac{dt^2}{d\tau^2} + \frac{dx^2}{d\tau^2} = -c^2$$

$$-c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = -c^2$$

Es decir, que nuestra expresión marcada en rojo y nuestra expresión marcada en verde son iguales, a saber:

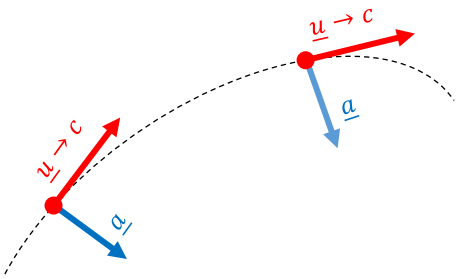
$$-c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = -c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = -c^2$$

[220] Como c es una constante, sale de la derivación. Recordemos que estamos derivando, en base al tiempo propio, τ, la trayectoria en cada uno de los ejes.

[221] Recordemos que t' es τ.

$$-(u^0)^2 + (u^1)^2 = -c^2$$ [222]

De todo esto se deduce que $\underline{u}$ siempre tiene un módulo constante c. Sin embargo, hemos dicho que la trayectoria que define la partícula en nuestro esquema, la trayectoria que dibuja nuestra cuadrivelocidad, es una curva. ¿Qué clase de aceleración se le puede estar aplicando de manera que no modifique su módulo? Naturalmente, una aceleración que se aplica de manera perfectamente perpendicular (mejor, ortogonal) a la dirección de la cuadrivelocidad.



Efectivamente, la cuadrivelocidad no cambia de módulo, sino de dirección y, para ello, para que este cambio de dirección se produzca sin que cambie el módulo, la aceleración que se ejerce debe ser aplicada en una dirección que sea linealmente independiente a la dirección hacia la que se proyecta la cuadrivelocidad. La cuadriaceleración en Relatividad Especial es Ortogonal a la cuadrivelocidad.

Este resultado es importantísimo. Ya nos aparecía en nuestros estudios de Relatividad Especial y ahora cobra pleno sentido. De hecho, esta conceptualización de la cuadriaceleración nos servirá para abordar el principio de equivalencia débil y fuerte, es decir, establecer los fundamentos para saltar de la Relatividad Especial a la Relatividad General. A partir de ahora vamos a buscar Sistemas de Referencia Acelerados configurados de manera que entre ellos podamos definir magnitudes invariantes. En un primer momento lo haremos usando la métrica plana de Minkowski pero, al introducir la cuadriaceleración, vamos a ir derivando el modelo hasta que podamos incluir la gravedad. De cualquier modo, no nos anticipemos, Sigamos explorando las propiedades de esta cuadriaceleración que hemos encontrado.

Vamos a explorar dos escenarios:

- La aceleración es igual a cero.

---

[222] ¡Este resultado es acojonante! Tiene una implicaciones ontológicas muy poderosas ya que, pase lo que pase con la cuadrivelocidad $\underline{u}$, el módulo del vector tangente en cualquier punto de la trayectoria debe ser una constante: $-c^2$. Esto quiere decir que el paso de un punto a otro en el espacio tiempo se produce con un módulo de c. La existencia, el devenir, el fluir de la existencia se produce nada más y nada menos que a c. Obsérvese que la velocidad de la luz aquí ejerce como una constante fundamental de la naturaleza de manera que la máxima velocidad electromagnética, la velocidad de los fenómenos atómicos (no somos sino átomos) está en la base misma del devenir fenoménico. Y, por supuesto, el pensamiento no es más rápido que la velocidad de la luz. Determinismo. Desarrollar mejor.
De hecho, este resultado se suele recoger como:

$$\underline{u} \cdot \underline{u} = -c^2$$

$$\|-\underline{u} \cdot \underline{u}\| = -c^2 \to \sqrt{--c^2} = c$$

- La aceleración es igual a una constante diferente de cero.

a) Veamos el primer escenario: la aceleración es igual a cero: $\underline{a} \cdot \underline{a} = 0$.

Hemos dicho que la cuadrivelocidad tiene un módulo constante. Entonces, tiene todo el sentido del mundo que consideremos que la cuadriaceleración (la derivada de la cuadriaceleración respecto al tiempo propio) sea igual a cero. Exploremos esta consideración:

$$\underline{a} \cdot \underline{a} = 0 \text{ en un espacio con métrica de Minkowski } g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto implica que, definiendo $\underline{a}$ como una combinación lineal de vectores de su base:

$$\underline{a} = a^0 e_0 + a^1 e_1$$

Necesariamente:

$$\underline{a} \cdot \underline{a} = -(a^0)^2 + (a^1)^2 = 0$$

Igualdad que sólo se cumple cuando:

$$a^0 = a^1$$

Donde el valor interno podría ser cualquiera. Llamémoslo, por ejemplo: α.

$$\underline{a} = \alpha \ e_0 + \alpha \ e_1$$

Como sabemos, la cuadriaceleración podríamos representarla como la derivada, por el tiempo propio, de la cuadrivelocidad, es decir:

$$\underline{a} = \frac{du^0}{d\tau} e_0 + \frac{du^1}{d\tau} \ e_1$$

En este escenario, naturalmente:

$$\frac{du^0}{d\tau} = \frac{du^1}{d\tau} = \alpha$$

Esta α, ahora mismo, podría ser *cualquier cosa*. Exploremos varias posibilidades.

a.1) α es una función arbitraria de τ: $\alpha_{(\tau)}$.

Partiendo de esta hipótesis, resolvamos las dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{du^0}{d\tau} = \alpha_{(\tau)}$$

$$\int \frac{du^0}{d\tau} d\tau = \int \alpha_{(\tau)} \, d\tau$$

$$u^0 = \alpha_{(\tau)} \tau + k_1$$

Análogamente:

$$u^1 = \alpha_{(\tau)} \tau + k_2$$

Analicemos estos valores. Sabemos que debe cumplirse que:

$$-(u^0)^2 + (u^1)^2 = -c^2$$

Sustituyamos:

$$-\left(\alpha_{(\tau)}\tau + k_1\right)^2 + \left(\alpha_{(\tau)}\tau + k_2\right)^2 = -c^2$$

$$-\left(\alpha_{(\tau)}\tau^2 + {k_1}^2 + 2\alpha_{(\tau)}\tau k_1\right) + \alpha_{(\tau)}\tau^2 + {k_2}^2 + 2\alpha_{(\tau)}\tau k_2 = -c^2$$

$$-\cancel{\alpha_{(\tau)}\tau^2} - {k_1}^2 - 2\alpha_{(\tau)}\tau k_1 + \cancel{\alpha_{(\tau)}\tau^2} + {k_2}^2 + 2\alpha_{(\tau)}\tau k_2 = -c^2$$

$$-{k_1}^2 + {k_2}^2 + 2\alpha_{(\tau)}\tau(k_2 - k_1) = -c^2$$

Naturalmente, $-c^2$, es una constante y no está en función de τ. Justamente por eso, el término que hemos marcado en verde debe quedar anulado. Para ellos debe cumplirse que:

$$k_2 = k_1$$

Pero, lamentablemente, si esto es así, también anulamos el primer término, de manera que llegamos a la siguiente contradicción:

$$0 = -c^2$$

Es decir, que esta posibilidad (a.1) en que α es una función arbitraria de τ: $\alpha_{(\tau)}$ queda descartada para nosotros. Es un cul de sac.
Probemos otra.

a.2) α es una constante arbitraria: α.

En este caso:

$$\frac{du^0}{d\tau} = \alpha$$

$$\int \frac{du^0}{d\tau} d\tau = \int \alpha \, d\tau$$

$$u^0 = \alpha\tau + k_1$$

Análogamente:

$$u^1 = \alpha\tau + k_2$$

Es obvio, que estamos ante una situación exactamente como la anterior:

$$-(u^0)^2 + (u^1)^2 = -c^2$$

Sustituyamos:

$$-(\alpha\tau + k_1)^2 + (\alpha\tau + k_2)^2 = -c^2$$

$$-(\alpha\tau^2 + {k_1}^2 + 2\alpha\tau k_1) + \alpha\tau^2 + {k_2}^2 + 2\alpha\tau k_2 = -c^2$$

$$-\cancel{\alpha\tau^2} - {k_1}^2 - 2\alpha\tau k_1 + \cancel{\alpha\tau^2} + {k_2}^2 + 2\alpha\tau k_2 = -c^2$$

$$-{k_1}^2 + {k_2}^2 + 2\alpha\tau(k_2 - k_1) = -c^2$$

Al igual que antes, puesto que $-c^2$ no está en función de tau, necesariamente:

$$k_2 = k_1$$

Lo que nos lleva de nuevo a una contradicción:

$$0 = -c^2$$

Probemos una alternativa más.

a.3) α es una constante: 0.

Ahora tendríamos:

$$\frac{du^0}{d\tau} = 0$$

$$\int \frac{du^0}{d\tau} d\tau = \int 0 \, d\tau$$

$$u^0 = 0 + k_1$$

Y análogamente:

$$u^1 = 0 + k_2$$

Ahora:

$$-(u^0)^2 + (u^1)^2 = -c^2$$

$$-{k_1}^2 + {k_2}^2 = -c^2$$

Y esto, por fin, ya reúne las condiciones para que se cumpla la igualdad propuesta.

Sabemos que:

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = k_1 \quad // \quad u^1 = \frac{dx^1}{d\tau} = k_2 \quad \leftrightarrow \quad u^0 = \frac{dct}{d\tau} = k_1 \quad // \quad u^1 = \frac{dx}{d\tau} = k_2$$

Así, si integramos:

$$\int \frac{dct}{d\tau} d\tau = \int k_1 d\tau \rightarrow ct = k_1\tau + D_1$$

$$\int \frac{dx}{d\tau} d\tau = \int k_2 d\tau \rightarrow x = k_2\tau + D_2$$

Ahora, si ponemos k_2 en función de k_1:

$$-{k_1}^2 + {k_2}^2 = -c^2$$

$$k_2 = \sqrt{{k_1}^2 - c^2}$$

De manera que finalmente tenemos que:

$$ct = k_1\tau + D_1$$

$$x = \left(\sqrt{{k_1}^2 - c^2}\right)\tau + D_2$$

Que es una solución coherente que satisface las condiciones que necesariamente había que cumplir.

Y ahora, si nos fijamos, observamos que estamos ante la definición de una recta pues los valores de cada coordenada están definidos como un polinomio de primer grado en τ. Esto quiere decir que siendo, ciertamente, $\alpha = 0$ y, por lo tanto, $\underline{a} \cdot \underline{a} = 0$ (aunque su aplicación se defina de manera perpendicular a la trayectoria de la velocidad, del vector tangente), la trayectoria de la partícula no acelerada está definida por una línea recta.

b) Exploremos ahora el segundo escenario que proponíamos: la aceleración es igual a una constante distinta de cero: $\underline{a} \cdot \underline{a} = cte$.

(OBSERVACIÓN. Los eventos se desplazan por el espaciotiempo de manera acelerada… es decir, empezamos a adentrarnos en el terreno de la Relatividad General)

Supongamos que: $\underline{a} \cdot \underline{a} = cte$. Así:

$$\underline{a} \cdot \underline{a} = -(a^0)^2 + (a^1)^2 = cte$$

Debe quedarnos claro que el resultado final es el que debe ser constante, es decir, cabe la posibilidad de que a^0 y a^1 estén en función de τ pero, una vez se procese en la expresión $-(a^0)^2 + (a^1)^2$, el resultado debe ser la constante, por ejemplo, α. Esto, naturalmente es perfectamente posible.

Analicemos ahora la expresión $-(a^0)^2 + (a^1)^2 = cte$. Esto nos recuerda mucho a la identidad trignométrico-hiperbólica[223] según la cual:

$$cosh^2\,\theta - sinh^2\,\theta = 1$$

Es decir, la expresión que tenemos, está definida con la forma de nuestra identidad "trigonohiperbólica". Como desconocemos la constante a la que es igual nuestra aceleración, supongámosla α, así, si:

$$a^0 = \alpha\, sinh\,\theta$$

$$a^1 = \alpha\, cosh\,\theta$$

Entonces:

[223] Recordemos cómo la deducíamos en el Liber Primvs.

$$-(a^0)^2 + (a^1)^2 = (\alpha\,(-sinh\,\theta))^2 + (\alpha\,cosh\,\theta)^2$$

$$= \alpha^2(-sinh^2\theta + cosh^2\,\theta)$$

$$= \alpha^2(1)$$

Es decir, que finalmente, nuestra expresión quedaría como:

$$-(a^0)^2 + (a^1)^2 = \alpha^2$$

Lo que implica que el resultado de:

$\underline{a} \cdot \underline{a}$ es siempre positivo

(OBSERVACIÓN. ¡En el espaciotiempo siempre se podrá acelerar hacia el futuro, nunca hacia el pasado!)

Desarrollemos los elementos involucrados en nuestro cálculo del módulo de la aceleración:

$$a^0 = \alpha\,sinh\,\theta$$

$$a^1 = \alpha\,cosh\,\theta$$

Podríamos decir que θ es una función de τ pero, en tal caso, estaríamos introduciendo una magnitud (tiempo, en segundos) dentro de una función trigonométrica, cosa que no podemos hacer. Para anular esa unidad multipliquemos τ por una cierta constante, por ejemplo β que sea, por ejemplo: $\frac{1}{s}$ y, así, el elemento interno a la función trigonométrica deja de ser una magnitud con unidades:

$$a^0 = \alpha\,sinh(\beta\tau)$$

$$a^1 = \alpha\,cosh(\beta\tau)$$

Por otro lado, sabiendo que:

$$\underline{u} = u^0\,e_0 + u^1\,e_1$$

Y que:

$$\underline{a} = \frac{du^0}{d\tau}e_0 + \frac{du^1}{d\tau}\,e_1$$

Podremos suponer que debe darse la siguiente igualdad:

$$\frac{du^0}{d\tau}e_0 + \frac{du^1}{d\tau}\,e_1 = \alpha\,sinh(\beta\tau)\;e_0 + \alpha\,cosh(\beta\tau)\;e_1$$

De donde podemos decir que:

$$\frac{du^0}{d\tau} = \alpha\,sinh(\beta\tau)$$

$$\frac{du^1}{d\tau} = \alpha\,cosh(\beta\tau)$$

Si integramos en ambas partes para despejar los valores de u^0 y u^1, obtenemos que:

$$\int \frac{du^0}{d\tau} d\tau = \int \alpha \, sinh(\beta\tau) \, d\tau$$

$$u^0 = \alpha \int sinh(\beta\tau) \, d\tau$$

$$u^0 = \frac{\alpha}{\beta} cosh(\beta\tau) + K_1 \quad ^{224}$$

Igualmente, para u^1:

$$u^1 = \frac{\alpha}{\beta} sinh(\beta\tau) + K_2$$

Como sabemos, debe cumplirse que:

$$-(u^0)^2 + (u^1)^2 = -c^2$$

Veamos sustituyendo:

$$-\left(\frac{\alpha}{\beta} cosh(\beta\tau) + K_1\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{\beta} sinh(\beta\tau) + K_2\right)^2 = -c^2$$

$$-\left[\frac{\alpha^2}{\beta^2} cosh^2(\beta\tau) + {K_1}^2 + 2\frac{\alpha}{\beta} cosh(\beta\tau) K_1\right] + \left[\frac{\alpha^2}{\beta^2} sinh^2(\beta\tau) + {K_2}^2 + 2\frac{\alpha}{\beta} sinh(\beta\tau) K_2\right] = -c^2$$

$$-\frac{\alpha^2}{\beta^2} cosh^2(\beta\tau) + \frac{\alpha^2}{\beta^2} sinh^2(\beta\tau) - {K_1}^2 + {K_2}^2 - 2\frac{\alpha}{\beta} cosh(\beta\tau) K_1 + 2\frac{\alpha}{\beta} sinh(\beta\tau) K_2 = -c^2$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(-cosh^2(\beta\tau) + sinh^2(\beta\tau)\right) - {K_1}^2 + {K_2}^2 + 2\frac{\alpha}{\beta}(-cosh(\beta\tau) K_1 + sinh(\beta\tau) K_2) = -c^2$$

$$\frac{-\alpha^2}{\beta^2}\left(cosh^2(\beta\tau) - sinh^2(\beta\tau)\right) - {K_1}^2 + {K_2}^2 + 2\frac{\alpha}{\beta}(-cosh(\beta\tau) K_1 + sinh(\beta\tau) K_2) = -c^2$$

$$\frac{-\alpha^2}{\beta^2} - {K_1}^2 + {K_2}^2 + 2\frac{\alpha}{\beta}(-cosh(\beta\tau) K_1 + sinh(\beta\tau) K_2) = -c^2$$

El término marcado en verde debe ser cero para que la expresión quede libre de la dependencia de τ que la aleja de poder ser igual a $-c^2$ (justo como hemos hecho hace poco). Para ello debe cumplirse que:

$$-cosh(\beta\tau) K_1 + sinh(\beta\tau) K_2 = 0$$

Es decir que:

$$K_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad K_2 = 0$$

De manera que:

$$\frac{-\alpha^2}{\beta^2} = -c^2$$

[224] Beta en rojo para recalcar la regla de la cadena.

$$\beta = \pm\frac{\alpha}{c}$$

Así, la expresión de las componentes de la cuadriaceleración nos queda como:

$$a^0 = \alpha\, sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right)$$

$$a^1 = \alpha\, cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right)$$

Y la cuadrivelocidad como:

$$u^0 = \frac{\alpha}{\left(\frac{\alpha}{c}\right)} cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) + (K_1 = 0) \quad \rightarrow \quad c\, cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right)$$

$$u^1 = \frac{\alpha}{\left(\frac{\alpha}{c}\right)} sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) + (K_2 = 0) \quad \rightarrow \quad c\, sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right)$$

Si ahora queremos calcular la trayectoria, tan sólo habrá que integrar una vez más respecto de τ.

$$u^0 = \frac{dct}{d\tau} = c\, cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right)$$

$$\int \frac{dct}{d\tau} d\tau = \int c\, cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) d\tau$$

$$ct = \frac{c}{\left(\frac{\alpha}{c}\right)} sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) + D_1$$

$$ct = \frac{c^2}{\alpha} sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) + D_1 \quad ^{225}$$

Análogamente:

$$u^1 = \frac{dx}{d\tau} = c\, sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right)$$

$$\int \frac{dx}{d\tau} d\tau = \int c\, sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) d\tau$$

$$x = \frac{c}{\left(\frac{\alpha}{c}\right)} cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) + D_2$$

$$x = \frac{c^2}{\alpha} cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) + D_2$$

[225] Usamos D_1 como una constante de integración arbitraria. Usamos D para no confundirnos con las K de antes, o la C como velocidad de la luz…

Y ya tendríamos todas las ecuaciones del "cuadrimovimiento" de aceleración constante diferente de cero en un entorno relativista[226].

$$a^0 = \alpha \sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) \quad // \quad u^0 = c\cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) \quad // \quad ct = \frac{c^2}{\alpha}\sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) + D_1$$

$$a^1 = \alpha\, cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) \quad // \quad u^1 = c\, sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) \quad // \quad x = \frac{c^2}{\alpha} cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) + D_2$$

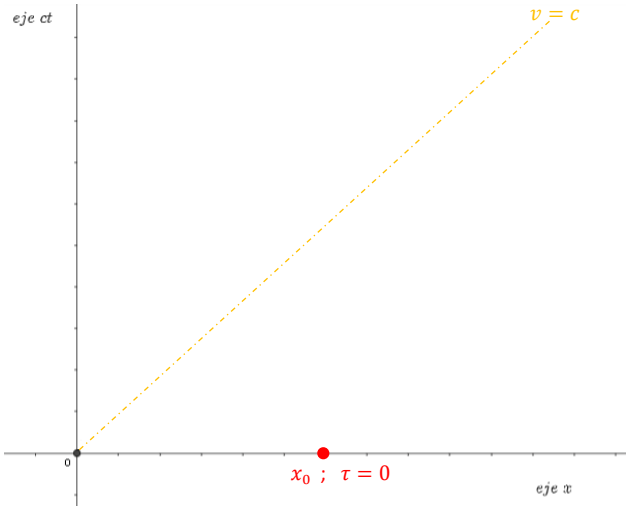
Así, en un entorno gráfico relativista, supongamos una partícula que en un tiempo $\tau = 0$, se encuentra a una x determinada del origen. Veamos, para estas condiciones cuánto valen nuestras constantes.

$$ct = \frac{c^2}{\alpha} sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) + D_1 \rightarrow \frac{c^2}{\alpha} sinh(0) + D_1 \rightarrow \frac{c^2}{\alpha}(0) + D_1 \rightarrow ct = D_1$$

$$c(0) = D_1 \rightarrow 0 = D_1$$

$$x_0 = \frac{c^2}{\alpha} cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) + D_2 \rightarrow \frac{c^2}{\alpha} cosh(0) + D_2 \rightarrow \frac{c^2}{\alpha}(1) + D_2 \rightarrow x_0 = \frac{c^2}{\alpha} + D_2$$

$$D_2 = x_0 - \frac{c^2}{\alpha}$$



Una vez conocidas nuestras constantes, retomemos las ecuaciones del elemento de línea para estas condiciones iniciales:

$$ct = \frac{c^2}{\alpha} sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right)$$

$$x = \frac{c^2}{\alpha} cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) + x_0 - \frac{c^2}{\alpha}$$

Despejemos las funciones trigonométricas:

[226] Recordemos que α es el valor de la aceleración constante que hemos supuesto.

$$\sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) = \frac{ct}{\left(\frac{c^2}{\alpha}\right)}$$

$$cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) = \frac{x - x_0 + \frac{c^2}{\alpha}}{\left(\frac{c^2}{\alpha}\right)}$$

Como sabemos que necesariamente:

$$cosh^2\,\theta - sinh^2\,\theta = 1$$

Entonces:

$$\left(\frac{x - x_0 + \frac{c^2}{\alpha}}{\left(\frac{c^2}{\alpha}\right)}\right)^2 - \left(\frac{ct}{\left(\frac{c^2}{\alpha}\right)}\right)^2 = 1$$

$$\frac{\left(x - x_0 + \frac{c^2}{\alpha}\right)^2}{\left(\frac{c^4}{\alpha^2}\right)} - \frac{c^2t^2}{\left(\frac{c^4}{\alpha^2}\right)} = 1$$

$$\frac{(x - x_0)^2 + \left(\frac{c^2}{\alpha}\right)^2 + 2(x - x_0)\left(\frac{c^2}{\alpha}\right) - c^2t^2}{\left(\frac{c^4}{\alpha^2}\right)} = 1$$

$$(x - x_0)^2 + \frac{c^4}{\alpha^2} + 2(x - x_0)\left(\frac{c^2}{\alpha}\right) - c^2t^2 = \frac{c^4}{\alpha^2}$$

$$(x - x_0)^2 + 2(x - x_0)\left(\frac{c^2}{\alpha}\right) - c^2t^2 = \frac{c^4}{\alpha^2} - \frac{c^4}{\alpha^2}$$

$$(x - x_0)^2 + 2(x - x_0)\left(\frac{c^2}{\alpha}\right) - c^2t^2 = 0$$

Sea:

$$(x - x_0) = y$$

Entonces:

$$y^2 + \frac{2c^2}{\alpha}y - c^2t^2$$

$$y = \frac{-\frac{2c^2}{\alpha} \pm \sqrt{4\frac{c^4}{\alpha^2} + 4c^2t^2}}{2}$$

$$y = \frac{-\frac{2c^2}{\alpha} \pm \sqrt{4\frac{c^4}{\alpha^2} + \left(\frac{c^2a^2}{c^2a^2}\right)4c^2t^2}}{2}$$

$$= \frac{-\frac{2c^2}{\alpha} \pm \sqrt{4\frac{c^4}{\alpha^2} + \left(\frac{4c^4\,a^2t^2}{a^2c^2}\right)}}{2}$$

$$y = \frac{-\frac{2c^2}{\alpha} \pm \sqrt{4\frac{c^4}{\alpha^2}\left(1 + \frac{\alpha^2t^2}{c^2}\right)}}{2}$$

$$y = \frac{-\frac{2c^2}{\alpha} \pm 2\frac{c^2}{\alpha}\sqrt{\left(1 + \frac{\alpha^2t^2}{c^2}\right)}}{2}$$

$$y = -\frac{c^2}{\alpha} \pm \frac{c^2}{\alpha}\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha t}{c}\right)^2}$$

Sustituyamos y:

$$x = x_0 - \frac{c^2}{\alpha} \pm \frac{c^2}{\alpha}\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha t}{c}\right)^2}$$

Y tomamos la raíz positiva[227]:

$$x = x_0 - \frac{c^2}{\alpha} + \frac{c^2}{\alpha}\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha t}{c}\right)^2}$$

Es decir que tenemos que:

$$x_{(t)} = x_0 - \frac{c^2}{\alpha} + \frac{c^2}{\alpha}\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha t}{c}\right)^2}$$

Así, la estudiar la posición de la partícula cuando $t \to \infty$, sucede que:

$$x_{(t\to\infty)} = x_0 - \frac{c^2}{\alpha} + \frac{c^2}{\alpha}\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha t}{c}\right)^2}$$

Donde la parte la marcada en rojo es tan inmensa que el 1 es perfectamente despreciable y por lo tanto tendríamos que:

$$x_{(t\to\infty)} = x_0 - \frac{c^2}{\alpha} + \frac{c^2}{\alpha}\sqrt{\left(\frac{\alpha t}{c}\right)^2}$$

[227] Tomamos la positiva porque y es una distancia y ésta siempre deberá ser positiva.

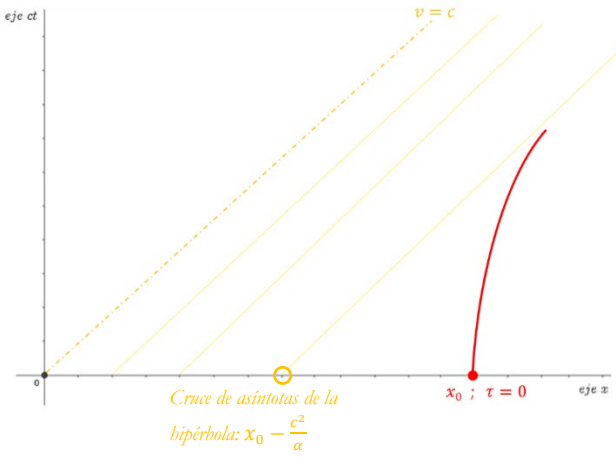
$$x_{(t\to\infty)} = x_0 - \frac{c^2}{\alpha} + \frac{c^2}{\alpha}\frac{\alpha t}{c}$$

$$x_{(t\to\infty)} = x_0 - \frac{c^2}{\alpha} + ct$$

Es decir, que, puesto que $x_0 - \frac{c^2}{\alpha}$ es una constante (todos sus componentes son constantes) y, por otro lado, ct está creciendo y creciendo, resulta que siempre sucederá que:

$$x_{(t\to\infty)} \leq ct \quad ^{228}$$

Que gráficamente se presenta como una aproximación asintótica de nuestra partícula a la diagonal marcada por la velocidad de la luz (desplazada, como es el caso, una cierta cantidad constante: $x_{(t\to\infty)} + x_{(0)} \leq ct + x_{(0)}$):



[228] El eje x' del Sistema de Referencia móvil siempre estará por debajo (o coincidente) con la diagonal ($x = ct$) que marca la luz. Es decir, la ecuación del eje x' no podrá escapar a la ecuación definitoria: $x \leq c$.

-2.6-

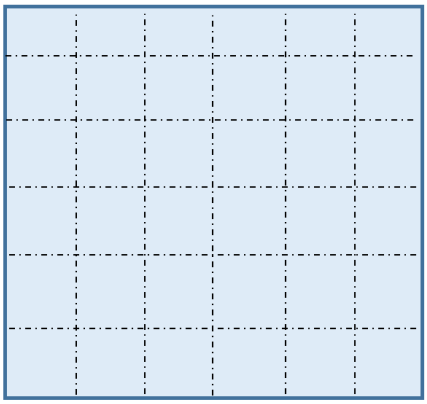
Primeros pasos por la Relatividad General

§

2.6.1. Coordenadas de Rindler.

Saltemos de la Relatividad Especial, es decir, desde los Sistemas Inerciales en espacios planos de Minkowski hacia los Sistemas No-Inerciales (acelerados) en los que las trayectorias de las partículas móviles no son rectas. No estamos hablando aún de que se curve el espacio. Se curvan las trayectorias, es decir: estaremos ante un espacio plano con "líneas de referencia" curvadas. Después, como hizo Albert Einstein, empezaremos a establecer relaciones entre estos espacios planos con "líneas maestras" curvas con sistemas hipotéticamente curvados por la gravedad con el fin de encontrar un ***principio de equivalencia*** entre ambos modelos: el acelerado y el gravitatorio.

Antes de proceder, dejemos clara la estructura epistemológica de lo que vamos a hacer durante nuestro análisis. Imaginemos un espacio plano con "líneas maestras" planas al estilo cartesiano de toda la vida:

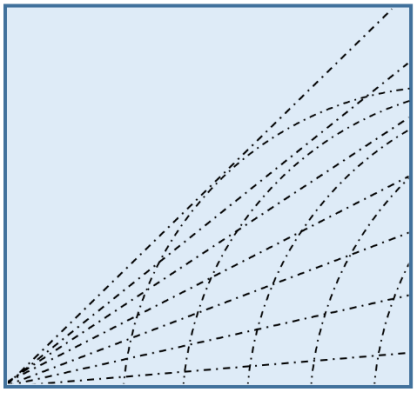


En este espacio se producen los eventos insertos en la Relatividad Especial, es decir, en un espacio-tiempo plano con coordenadas planas ya que al tratarse de eventos que suceden en

Sistemas de Referencia Inerciales (no acelerados) las partículas dibujan líneas rectas. El elemento de línea en un espacio plano con estas coordenadas es del tipo:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2$$

Sin embargo, si en dicho espacio-tiempo plano, los eventos presentan aceleración, las trayectorias que dibujen los eventos empezarán a ser curvas y, por lo tanto, sería interesante redefinir un sistema de coordenadas curvo que nos permita estudiar más cómodamente el comportamiento de las partículas. Algo así:



Recordemos, muy importante: seguimos en un espacio-tiempo plano pero hemos pasado de un modelo de coordenadas plano (cartesiano) a un modelo de coordenadas curvo (hiperbólico). En este espacio plano, con este tipo de coordenadas, el elemento de línea tiene esta forma (en breve lo demostraremos):

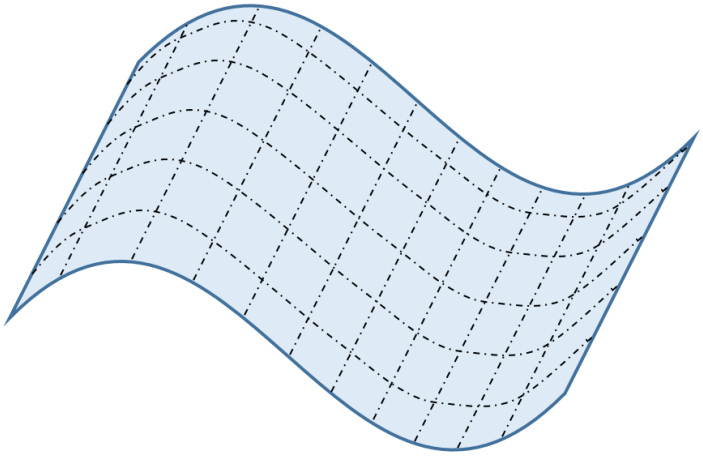
$$ds^2 = -x^2c^2d{\tau_1}^2 + dx^2$$

Si nos paramos a pensar el modo en que experimentarían las trayectorias los cuerpos involucrados en los diferentes modelos podemos entender que:

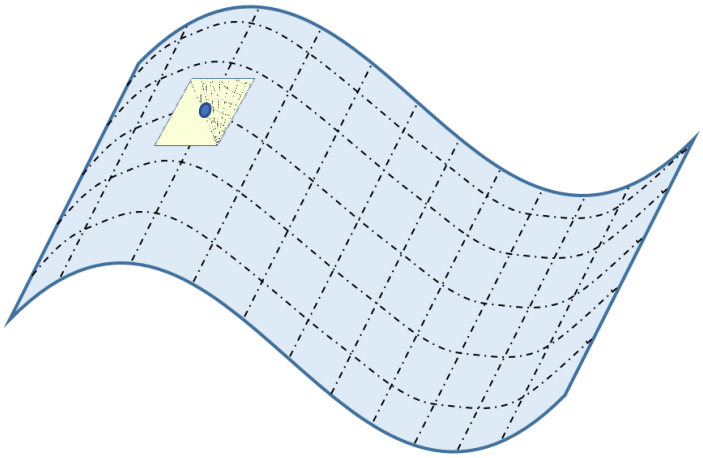
- Para nosotros, observadores externos, los eventos que se suceden sin aceleración definen líneas rectas mientras que los eventos que sufren aceleración nos aparecerán como curvos… sin embargo…
- Para una partícula acelerada (cuadriacelerada), su sistema, su trayectoria, internamente, le parecerá perfectamente recta mientras que verá que las partículas con velocidad constante (para nosotros) para ella tienen una aceleración que provocaría que sus trayectorias (la de las partículas no aceleradas) se curvasen, justo hacia el otro lado del que a nosotros, observadores externos, nos parecen curvarse las aceleradas. Es obvio que para una partícula acelerada lo que parece acelerado, hacia el lado contrario, es el resto del universo.

Y estos dos modelos, como decimos, siempre están ubicados en un espaciotiempo plano, aunque, como hemos dicho, con Sistemas de Coordenadas diferentes: coordenadas "rectas" y coordenadas "curvas". Recordemos, espaciotiempo plano: Relatividad Especial, pero con la aparición de aceleraciones y líneas curvas que nos van a servir para transitar a la Relatividad General, en la que consideraremos un espaciotiempo curvado a causa de la gravedad.

En tal sentido los fenómenos de la Relatividad General se estudian sobre modelos espaciotemporales curvos como el siguiente:



El problema es que no existe transformación de coordenadas que nos lleve de un espacio plano a uno curvo. Algo así como el problema de la representación cartográfica de la Tierra en mapamundis planos. ¿Qué se puede hacer entonces para resolver este problema? La solución la encontramos en el Principio de Equivalencia: localmente, la aceleración es indistinguible de la gravedad. ¿Qué quiere decir esto? Que, localmente, en un plano tangente a un punto de la variedad, podemos usar nuestro esquema proveniente del mundo plano pero con coordenadas curvadas. De aquí que la aceleración sea localmente indistinguible de la gravedad[229]:



¿Cómo saber, entonces, si estamos en un espaciotiempo plano acelerado o un espaciotiempo curvo gravitatorio? Muy simple: estudiando el elemento de línea:

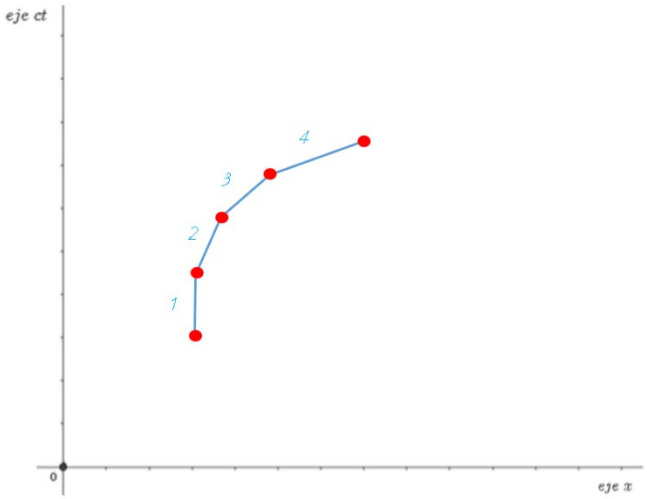
$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta$$

Y analizando el Tensor de Riemann: Si el tensor de Riemann es igual a cero, entonces estaremos ante un espaciotiempo plano (sin gravedad). Si es distinto de cero, estaremos ante un espaciotiempo curvo (afectado por un campo gravitatorio).

[229] Nótese que nos hemos tomado la licencia de poner como plano tangente aquél en que figuran las líneas maestras como curvas cuando, en realidad, lo más fácil será "meterse" a habitante de "sistema de líneas maestras curvas" y verlas como rectas.

Ahora, una vez expuestas estas consideraciones preliminares, pasemos a desarrollar las coordenadas de Rindler y veamos cómo vamos transicionando hacia la Relatividad General.

Con tal fin, para empezar, estudiemos, de nuevo, el movimiento de una partícula acelerada pero, esta vez, hagámoslo mediante la subdivisión de la trayectoria curva en la suma de pequeños segmentos rectos. Es decir, estudiemos lo curvo como la acumulación de muchos "fenómenos rectos" pequeños. Por ejemplo:



Estudiemos el segmento 1.

Al ser totalmente vertical, cuando lo definamos como una combinación lineal de vectores de la base e_0, e_1, sólo tendremos que recurrir al vector e_0. No hay cambio en el vector espacial e_1 por lo que podemos saber que la partícula está espacialmente en reposo y su único "desplazamiento" es temporal. En definitiva, la partícula, a lo largo del segmento 1, está quieta ($v = 0$) *dejando que sólo pase el tiempo* y e_0 es tangente a la trayectoria representada por el segmento 1.

Estudiemos el segmento 2.

Aquí ya hay una cierta velocidad puesto que la partícula, no sólo se desplaza en el tiempo, sino también en el espacio. Ahora, obviamente, el vector e_0 ya no es tangente a la trayectoria. Si quisiéramos definir ***un nuevo vector base tangente a la trayectoria***, ciertamente, estaríamos generando una nueva base y podríamos hacerlo definiéndola como una combinación lineal de los vectores de la base "antigua".

Así, definiríamos un:

$$e_{0'} = A\, e_0 + B\, e_1$$

Y, puesto que la métrica del espacio configurado según esa nueva base debe ser la misma que la del espacio previo, es decir:

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, salvaguardando la obligatoriedad de la ortogonalidad en la nueva base, debe darse que:

$$e_{0'} \cdot e_{0'} = -1$$

$$e_{0'} \cdot e_{1'} = 0 = e_{1'} \cdot e_{0'}$$

$$e_{1'} \cdot e_{1'} = +1$$

Y, para construir el vector ortogonal $e_{1'}$, tan sólo tendríamos que hacer[230]:

$$e_{0'} = A\, e_0 + B\, e_1 \quad // \quad e_{1'} = B\, e_0 + A\, e_1$$

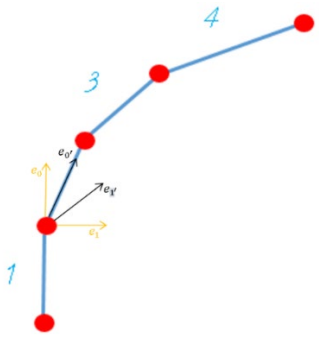
De manera que:

$$e_{0'} \cdot e_{1'} = (AB) e_0 e_0 + (BA) e_1 e_1$$

$$e_{0'} \cdot e_{1'} = (AB)(-1) + (BA)(+1)$$

$$e_{0'} \cdot e_{1'} = -AB + BA = 0$$

Esto, gráficamente, podría ser algo como:



Es decir, y apreciemos la belleza[231], en el tramo 2 definimos un nuevo Sistema de Referencia (S'), naturalmente con su base propia, según el cual la partícula está en reposo. Esto se hace evidente si nos detenemos a reflexionar que, ciertamente, podemos definir la trayectoria con un solo vector $e_{0'}$ que es tangente a la trayectoria en el tramo 2. Sólo habría cambio en la dirección de $e_{0'}$.

[230] Es trivialmente obvio. Al intercambiar las componentes obtenemos un vector ortogonal (compruébese mentalmente con cualquier ejemplo cartesiano).

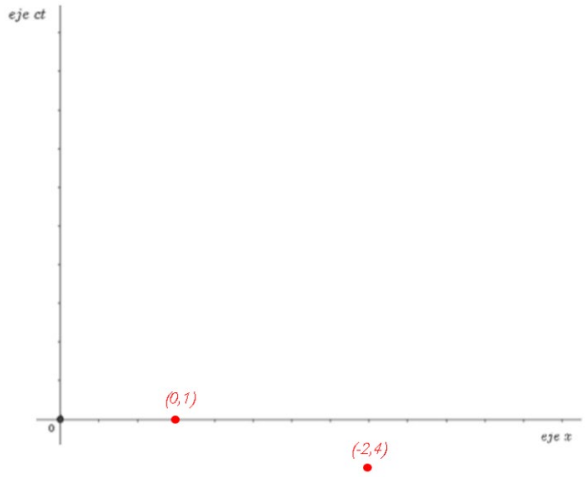
[231] Vamos a ir cambiando de Sistema, y base, según avancemos diferencial a diferencial a lo largo de la trayectoria. Es algo así como una cosa a la que jugaba de pequeño cuando viajaba en el coche con mis padres. La cosa era ir modificando la orientación de mi cabeza (el Sistema de Referencia) según avanzaba el coche para conseguir que un objeto externo (un poste de la luz de madera... ¡De los antiguos! Camino de Matalascañas) pareciera que estaba siempre en el mismo sitio.

Al estudiar los segmentos en los tramos 3 y 4, obtendríamos nuevas bases en las que se cumpliera el reposo espacial de la partícula[232]:

$$e_0'' \text{ y } e_1'' \quad // \quad e_0''' \text{ y } e_1'''$$

Digamos, entonces algo así como que vamos a situar a diferentes observadores en cada tramo para que la partícula pueda ser estudiada por cada uno de ello como un Cuadri-MRU[233] es decir, conformando un Sistema Inercial en cada tramo. Así, a pesar de que se trata de un movimiento acelerado vamos a poder estudiarlo como la acumulación infinita de pequeños movimientos no acelerados. Al cada uno de uno de los sistemas de referencia inerciales que fuerzan que parezca, para cada uno de ellos, que la partícula está en reposo espacial, sólo desplazándose en el tiempo (o, en todo caso, con un MRU) se le llama ***Sistema de Referencia Comóvil***. Es tan simple como considerar que si vamos a estudiar la velocidad en cada uno de los puntos de la trayectoria, lo que vamos a hacer es estudiar la derivada de la trayectoria (el vector tangente) en cada uno de los puntos de la misma y que dicha derivada, vector tangente, es el vector temporal de la base del Sistema de Referencia. De hecho, lo más simple será definir un vector base que recorre la trayectoria y analizar cómo cambia según sea el punto en el que *miramos para hacer que, desde "su punto de vista", la partícula sólo se desplaza temporalmente*. Cómo cambia la derivada. Por supuesto, en nuestro ejemplo, lo hemos hecho de manera discreta pero, realmente, minimizando infinitamente la longitud de los segmentos habremos conseguido acceder al secreto del continuo.

Profundicemos un poco más en este modo de relacionar los Sistemas de referencia. Para ello imaginemos dos partículas en una disposición como la siguiente:

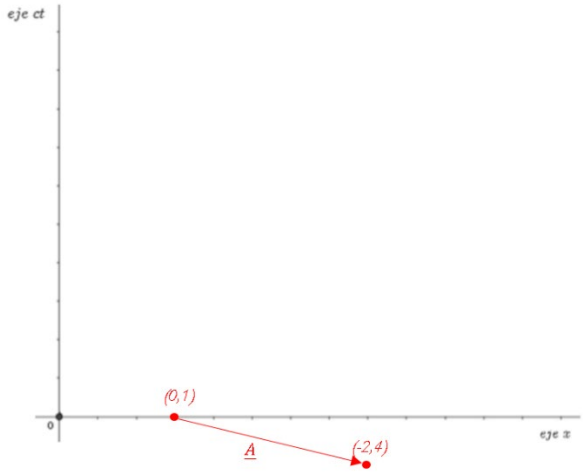


¿Qué distancia, proyectada sobre el eje x, separa a las partículas (distancia sólo espacial)?

[232] Es obvio que el ángulo que separa los ejes de los nuevos Sistemas de Referencia y, por lo tanto, a los vectores de las bases subsiguientes (en el caso de la trayectoria concreta que hemos trazado), es cada vez menor.

[233] Decimos cuadri-movimiento porque, de hecho, estamos diciendo que no se mueven espacialmente, sino sólo en el tiempo.

A simple vista observamos que 3 unidades. Esto, para casos más complejos, se puede calcular sencillamente calculando la proyección sobre el eje x del vector $\underline{A}$ que une las partículas:



Donde:

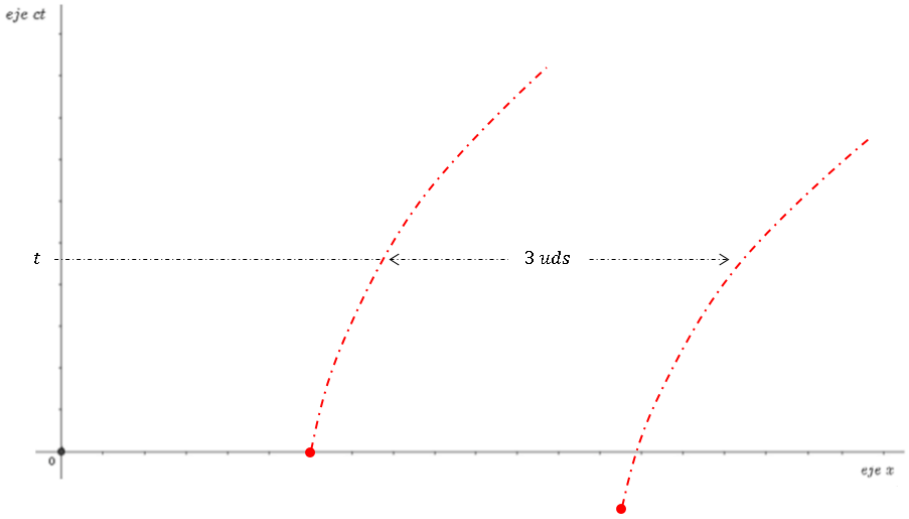
$$\underline{A} = (-2-0)e_0 + (4-1)e_1$$

Y si ahora proyectamos sobre x multiplicando por e_1:

$$[(-2-0)e_0 + (4-1)e_1] \cdot e_1 = 3$$

En definitiva, nos quedamos sólo con su componente e_1.

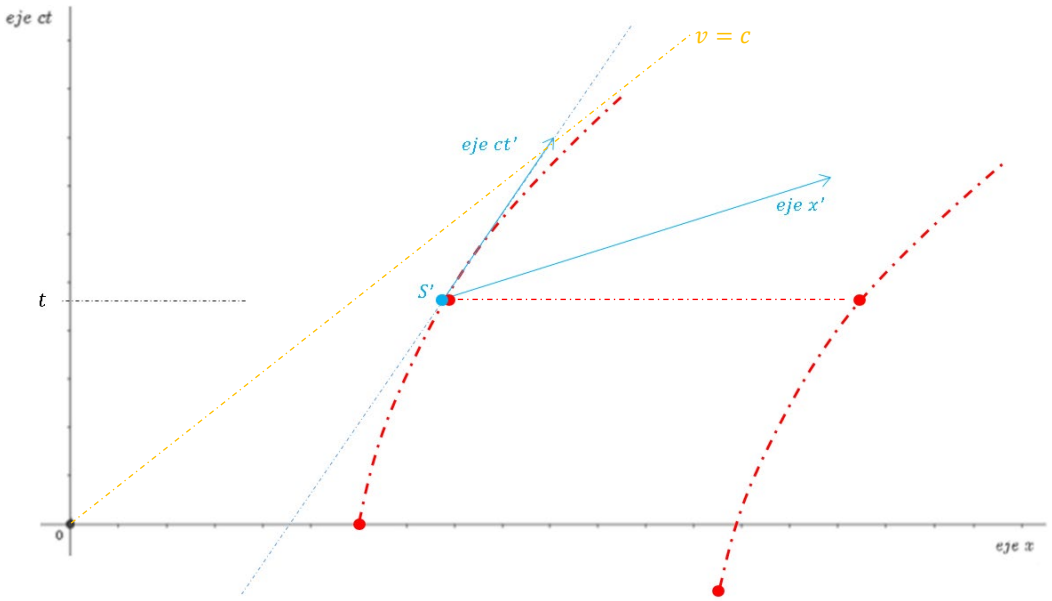
Ahora supongamos que ambas partículas se mueven con la misma aceleración constante y que, por lo tanto, dibujan la misma trayectoria pero desplazada una distancia de 3 unidades:



Ciertamente, para nosotros observadores externos omniscientes (S), las partículas, al desplazarse con ***la misma aceleración***, al realizar el mismo tipo de movimiento, conservarán la distancia que mutuamente las separa (en breve veremos que este escenario, precisamente, no nos interesa).

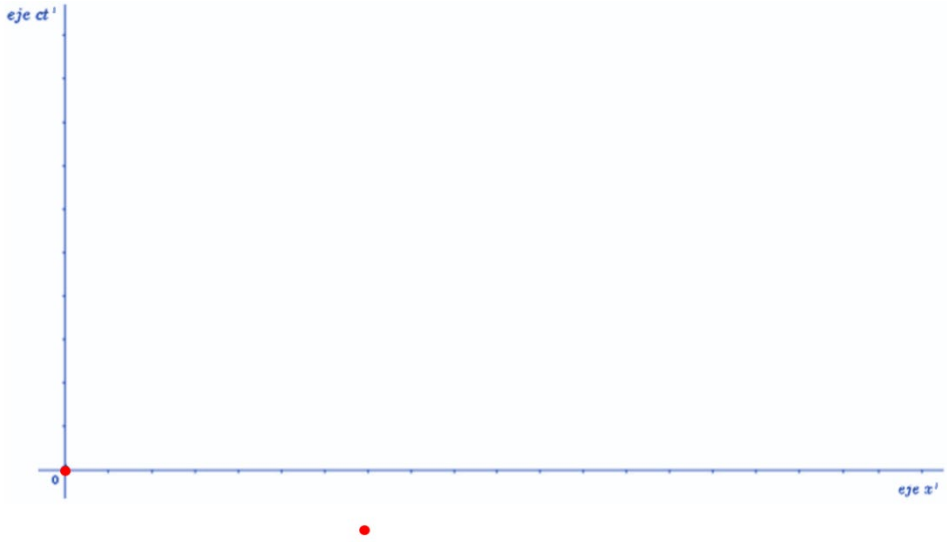
Imaginemos ahora por un momento que somos otro observador diferente a nosotros mismos, que somos externos y lo vemos todo. Nos referimos a un nuevo observador S' 'que

pasaba por allí'. ¿Por dónde? Pues justamente por el lugar que ocupa la partícula de la izquierda en el tiempo t. El nuevo observador S' 'que pasaba por allí', lleva una velocidad constante y, casualmente, la misma que la partícula con que se cruza en ese punto tangente a la curva que describe la misma:



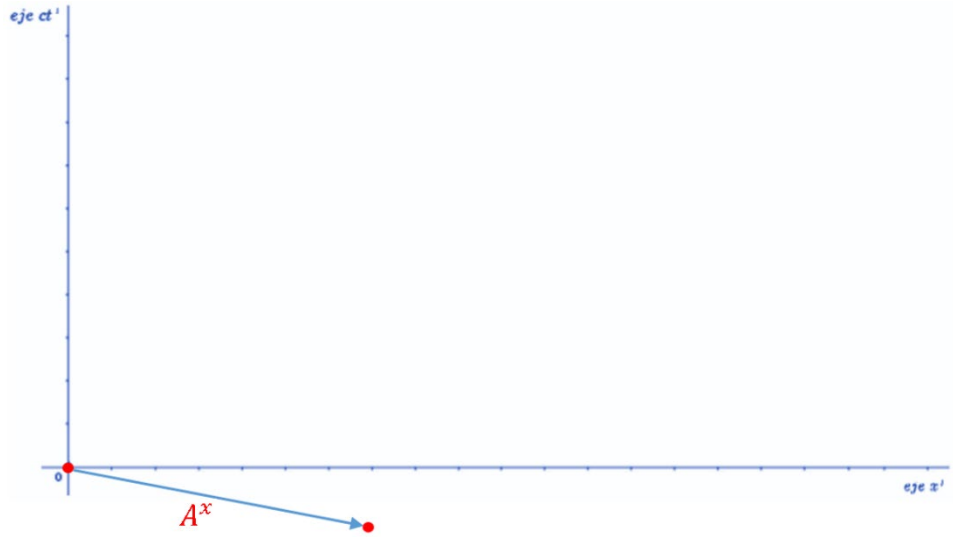
Naturalmente, el Sistema de referencia S', que se mueve con velocidad constante (aunque justo en el momento que nos interesa 'lo pongamos en pause'), traza su propio eje de coordenadas (ct', x'). De hecho coincidiría con el sistema de referencia de la partícula de la izquierda si, justo en ese momento dejara de acelerar. Es digamos, el sistema de referencia de la partícula de la izquierda justo en ese preciso momento. Un sistema que, en el caso de la partícula de la izquierda, se modificaría en el instante infinitesimal siguiente.

¿Qué ve el observador S' en el momento t? Veámoslo, tracémoslo en su sistema de referencia:



Obviamente, para el observador S', en el tiempo t, la partícula de la izquierda está justo en u origen de coordenadas mientras que la de la derecha está por debajo de *su eje* x (x').

Ahora preguntémosle a este observador S' por la distancia espacial que, desde su punto de vista, separa a ambas partículas. Procedamos de manera análoga a como hicimos en el sistema S.



$$A^x = A^x \cdot e_{1'}$$

Estamos estudiando la distancia espacial, sólo en su componente espacial de los dos sistemas de referencia, en un tiempo t. Como estamos haciendo referencia sólo a la distancia espacial, es decir, a las proyecciones del vector en los ejes x de los diferentes sistemas de referencia, calculémoslas y relacionémoslas para confirmar que son la misma entidad.

Empecemos por $\underline{A} \rightarrow A^x$[234]

$$A^x = \Delta x\, e_1 \quad [235]$$

Para calcular $\underline{A} \rightarrow A^x$ necesitamos conocer $e_{1'}$. Para ello, por ejemplo, vamos a calcular $e_{0'}$ y después como sabemos, intercambiando las componentes, habremos encontrado $e_{1'}$. Procedamos con $e_{0'}$.

Como $e_{0'}$ es tangente a la trayectoria del observador del Sistema de referencia S' podríamos encontrarlo, como vector unitario (normalizado), sencillamente dividiendo la velocidad $\underline{v}$ del observador S' por su módulo, es decir:

$$e_{0'} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

¿Cómo encontramos $\underline{v}$? Pues como ya hemos dejado entrever: derivando la trayectoria observador S'. Recordemos las ecuaciones del movimiento con aceleración constante[236].

[234] La base de este espacio es simplemente e_0 y e_1.

[235] En nuestro caso particular sería 3 uds.

$$ct = \frac{c^2}{\alpha} sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right)$$

$$x = \frac{c^2}{\alpha} cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) + x_0 - \frac{c^2}{\alpha}$$

Entonces, necesariamente:

$$\underline{v} = \left(\frac{dct}{d\tau}\right) e_0 + \left(\frac{dx}{d\tau}\right) e_1$$

$$\underline{v} = \left(\frac{d\left(\frac{c^2}{\alpha} sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right)\right)}{d\tau}\right) e_0 + \left(\frac{d\left(\frac{c^2}{\alpha} cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) + x_0 - \frac{c^2}{\alpha}\right)}{d\tau}\right) e_1$$

$$\underline{v} = \left(\frac{c^2}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{c}\right) cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right)\ e_0 + \left(\frac{c^2}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{c}\right)\ sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) e_1 \quad [237]$$

$$\underline{v} = c\ cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right)\ e_0 + c\ \ sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) e_1$$

Recordemos que el módulo de la cuadrivelocidad era siempre igual a c [238], es decir que:

$$e_{0'} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \frac{c\ cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right)\ e_0 + c\ \ sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) e_1}{c} = cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right)\ e_0 + sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) e_1$$

$$e_{0'} = cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right)\ e_0 + sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) e_1$$

Ahora, para conocer $e_{1'}$, como hemos dicho, sólo tendríamos que intercambiar las componentes:

$$e_{1'} = sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right)\ e_0 + cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) e_1$$

Ya tenemos los vectores de las dos bases. También tenemos ya la magnitud de la proyección del vector $\underline{A} \rightarrow A^x$, así que vamos a calcular la proyección del vector $\underline{A}$ en su eje x'.

---

[236] Es obvio que en este caso el sistema es el primado, aunque ahora no incorporemos el apóstrofe. Por otro lado, la aceleración puede ser, perfectamente la constante cero, como es el caso del observador S'.

[237] En rojo la aplicación de la regla de la cadena.

[238] Véase página 292.

$$A^x = (\Delta x\ e_1) \cdot e_{1'} \quad ^{239}$$

$$A^x = (\Delta x\ e_1) \cdot \left(sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right)\ e_0 + cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) e_1\right)$$

$$A^x = \Delta x\ cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right)$$

Que es la distancia espacial entre las partículas que percibe el observador del sistema de referencia S'.

Por supuesto, se hace algebraicamente obvio de inmediato que mientras que A^x, la distancia entre las partículas que nosotros, observadores externos omniscientes, según pasa el tiempo, medimos como constante (pues no depende de ninguna variable), la distancia interpartículas A^x que observa S' se va incrementando con el transcurso del tiempo (pues depende del producto de una constante $\left(\frac{\alpha}{c}\right)$ y tiempo propio). Esto quiere decir que:

A) En un primer momento, puesto que en el inicio del tiempo $(t = 0)$[240] resulta que el tiempo propio también es cero $(\tau = 0)$, es obvio que la distancia entre partículas que miden ambos observadores es la misma:

$$A^x = \Delta x$$

$$A^x = \Delta x\ cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) \rightarrow \Delta x\ cosh\left(\frac{\alpha}{c} \cdot 0\right) \rightarrow \Delta x\ cosh(0) \rightarrow \Delta x \cdot (1) = \Delta x$$

$$A^x = A^x$$

Sin embargo…

B) según el tiempo "general" t pase, el tiempo propio τ cambiará según un patrón directamente proporcional ya definido y recogido en:

$$ct = \frac{c^2}{\alpha} sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right)$$

Y, por lo tanto, como la distancia espacial que mide S' depende de τ, resulta que si bien para nosotros (observadores externos), la distancia interpartículas es fija, para el observador S' va creciendo, ya que:

$$A^x = \Delta x\ cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right)$$

Puesto que el codominio del coseno hiperbólico es $[1, \infty)$, podemos afirmar que, según pase el tiempo propio τ (que está relacionado algorítmicamente con t), el observador S' vería cómo las partículas se alejan entre sí (a diferencia de nosotros, externos que vemos siempre

---

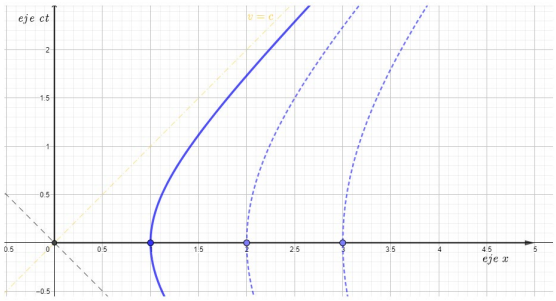
[239] Recordemos que aquí, en S^1, A^x ejerce de "vector puro".

[240] Digamos que t=0 es el momento t que marcamos en nuestro diagrama $S(ct, x)$ anterior como "reset". Algo así como "empezamos a contar desdeee…….. ¡ahora!".

una distancia fija de 3 uds entre ellas). Si las partículas estuvieran unidas por una cinta no flexible… ¿Se rompería la cinta? Pues parece que para nosotros no pero para S' sí[241].

El problema que esto nos genera de inmediato es que nos imposibilita vincular dos sistemas de referencia (el de las dos partículas) en un mismo Sistema de Referencia Comóvil y Simultáneo.

¿Cómo podríamos apañárnoslas, entonces, para poder establecer un Sistema Comóvil para las dos partículas? Pues haciendo lo mismo que hacía de pequeño mirando por la ventana del coche modificando la perspectiva para que pareciera que se producía un fenómeno de invarianza… en este caso: ***modificando las aceleraciones*** (y el tiempo propio) para que la distancia que ahora hemos visto que cambia, no lo haga. Tendría que darse algo parecido, por ejemplo, a esto:



(OBSERVACIÓN. Nótese que ahora las curvas SÍ comparten asíntota)

Y esto se logra a través de lo que se denomina Espacio o Coordenadas de Rindler.

Construyamos, entonces, un Sistema de Coordenadas de Rindler. El plan será el siguiente: construyamos un eje de coordenadas externo omnisciente nuestro (S^{ext}) y un eje interno (S^1) que coincida en un punto tangente determinado con la trayectoria de una primera partícula (de las varias que lanzaremos) y que ejercerá de Sistema de Referencia Inercial y Comóvil.

Comencemos con el sistema de referencia externo S^{ext}. Para ello, con el fin de facilitar el desarrollo, eliminemos el posible desplazamiento constante a la izquierda o la derecha de la diagonal $v = c$. Para ello, recordemos que estamos tratando de calcular el sistema para un observador externo S^{ext} que mide según su tiempo t general (no el tiempo tau propio de alguna partícula) y que define, en función de la aceleración que observa y el tiempo que mide para sí mismo, la trayectoria de la Partícula 1 como:

$$x_{(t)} = x_0 - \frac{c^2}{a} + \frac{c^2}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2} \quad {}^{242}$$

[241] Esto es conocido como la Paradoja de Bell. A priori, podríamos defender que "la cinta" no se rompe ya que no es que la cinta se elongue sino que es el espacio, el lecho que la acoge, el "globo en que hemos pintado la línea" es el que se estira. Se romperá el espacio, si es que esto puede llegar a suceder, pero no la cinta.

[242] Recordemos esta forma, que ***no está en función de tau, sino de t*** (tampoco está en función de funciones trigonomo-hiperbólicas), la posición x de la trayectoria que traza la cuadrivelocidad para el observador externo. Aprovechamos para cambiar alpha por 'a' latina con el fin de facilitar la escritura. Véase página …

Y puesto que queremos eliminar los desplazamientos constantes a izquierda o de derecha de la diagonal, obligamos a que:

$$x_0 = \frac{c^2}{a}$$

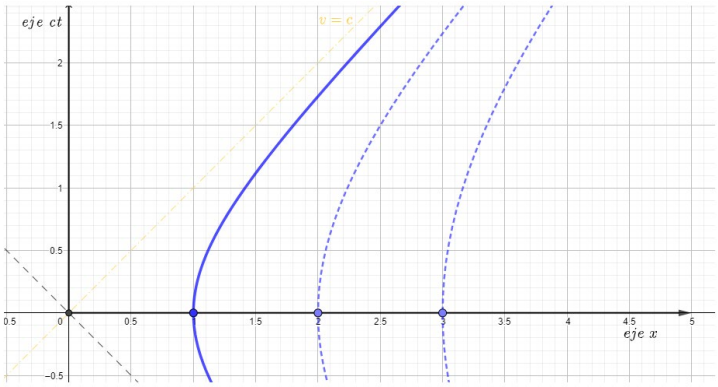
Por lo que finalmente tendríamos que:

$$x_{(t)} = \frac{c^2}{a} - \frac{c^2}{a} + \frac{c^2}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}$$

$$x_{(t)} = 0 + \frac{c^2}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}$$

$$x_{(t)} = \frac{c^2}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}$$

Obsérvese que esto nos va a facilitar mucho la obtención de leyes generales simples pues el sistema se muestra como una Hipérbola Canónica. Así, podremos definir la trayectoria de la Partícula 1 para nuestro S^{ext} 'centrado' en un modelo hiperbólico canónico como:

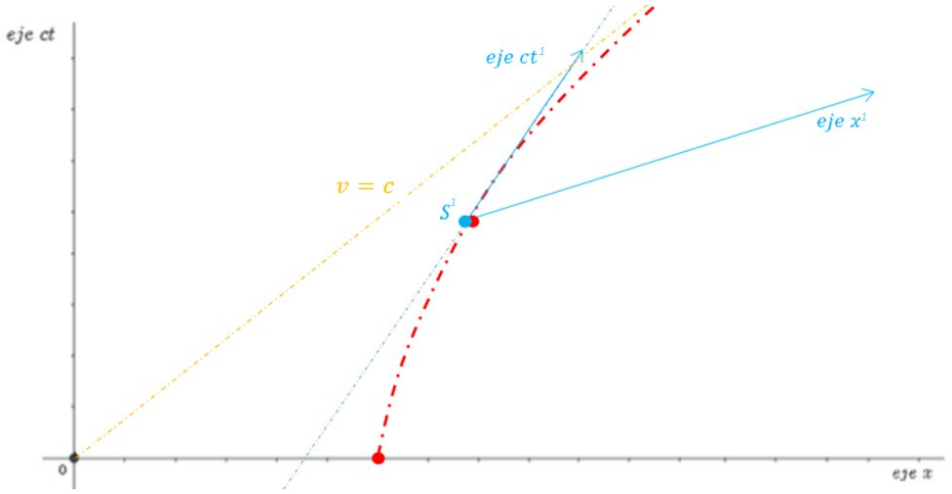


En este caso, como vamos a estudiar varias partículas en movimiento, las denominaremos $P^1, P^2, P^3, \dots, P^n$[243]. De momento marcamos como línea continua sólo la Partícula 1 (P^1) pues es la primera (y determinante, como veremos) que se observa desde S^{ext}. Dicha partícula posee una cuadrivelocidad no constante, es decir, una cuadrivelocidad que está afectada por una cuadriaceleración que hace que no se dibuje una línea recta como es, por ejemplo, el eje marcado en amarillo y que se corresponde con la velocidad constante de la luz. Ciertamente, nuestra partícula dibujará una cuadrivelocidad hiperbólica (con comportamiento asintótico a la diagonal marcada por la velocidad de la luz) a causa de la ***cuadriaceleración propia***[244] constante que le afecta. De esta manera, ya tenemos controlado el sistema S^{ext} que ocupamos nosotros como observadores externos omniscientes.

[243] La posición inicial de estas partículas será, respectivamente: $x = 1, x = 2, x = 3, \dots, x = n$

[244] Del mismo modo que antes definíamos el tiempo propio de cada partícula (cada Sistema de Referencia), éstas también poseen aceleración propia. El concepto es exactamente el mismo pero aplicado a la aceleración.

Ahora imaginemos que dicho Observador S^{ext} se percata de que, como ya hemos hecho anteriormente, en ése, su escenario, aparece un observador S^1 que justamente pasa, a velocidad constante, por un punto tangente a la trayectoria de la Partícula 1 (por supuesto también coinciden en velocidad).



Puesto que tenemos la ecuación de la trayectoria que traza la Partícula 1 tal y como la ve el observador S^{ext}:

$$x = \frac{c^2}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}$$

Tratemos de ver, desde nuestro punto de vista S^{ext}, qué velocidad le 'otorgamos' (desde nuestro omnisciente S^{ext}) al repentino observador S^1 que, como veremos, será el Sistema de Referencia Comóvil primordial. Para ello tengamos en cuenta la situación en la que el observador S^1, que viaja a velocidad constante, coincide en un punto tangente a la trayectoria de la Partícula 1, en un momento determinado. Justo en ese punto se trazará el sistema de coordenadas de S^1. Para ello, lo primero que tenemos que conocer es la velocidad ordinaria de la Partícula 1 para poder establecer, en el punto seleccionado, el eje (su dirección tangente) ct^1 del observador S^1 (por supuesto, en dirección tangente a su trayectoria). Esto es importante: nos estamos refiriendo a la velocidad ordinaria de la Partícula 1 y no a su cuadrivelocidad. Téngase en cuenta que el observador S^1, sencillamente, 'pasaba por allí', es decir, que no comparte ni aceleración propia ni tiempo propio de la Partícula 1. El observador S^1 se desplaza a velocidad constante. Digamos que sólo necesitamos conocer la velocidad ordinaria de la partícula para poder acompasarlos a los dos en un punto. Así, puesto que sabemos que una velocidad no es sino:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Imaginemos dos sistemas 1 y 2 que se mueven a una misma velocidad constante. De pronto el Sistema 2 se ve afectado por una aceleración. El sistema 1 observará un cambio en el estado del Sistema 2 y podrá achacarlo a la aparición de una ***aceleración propia*** 'a ' en el Sistema 2. En nuestro caso, la aceleración medida desde un Sistema Comóvil S^1.

Y puesto que hemos definido la trayectoria x de la Partícula 1, claro está, desde el punto de vista de S^{ext}, como:

$$x = \frac{c^2}{a}\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}$$

Podemos proceder con una derivada ordinaria:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d\left(\frac{c^2}{a}\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}\right)}{dt} = \frac{c^2}{a}\frac{\frac{a^2}{c^2}2t}{2\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}} = \frac{at}{\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}}$$

Como hemos partido de que:

$$x = \frac{c^2}{a}\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}$$

Podemos decir que:

$$\frac{xa}{c^2} = \sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}$$

Que podemos sustituir:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{at}{\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}} = \frac{at}{\frac{xa}{c^2}} = \frac{c^2 t}{x}$$

Esto lo podemos expresar como:

$$v = c \cdot \frac{ct}{x}$$

Y como sabemos que, ***internamente***, para cualquier observador:

$$ct = \frac{c^2}{a}sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right)$$

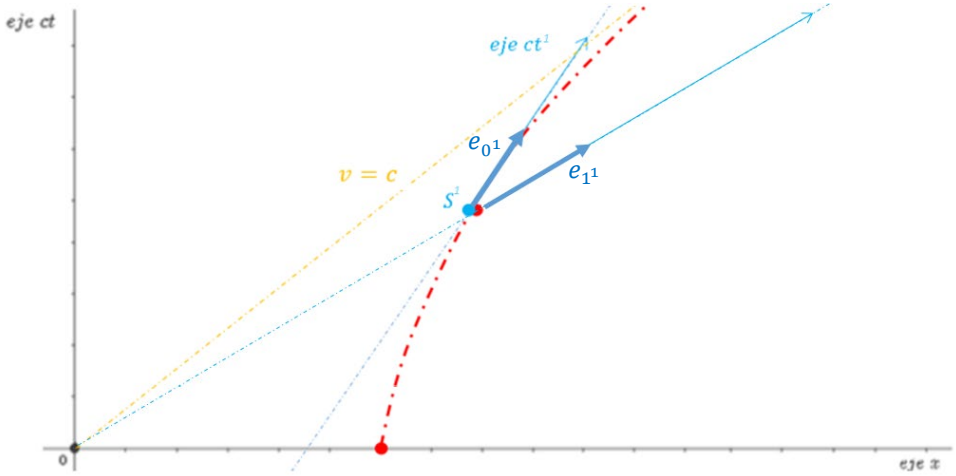
$$x = \frac{c^2}{a}cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right)$$

Resulta que podemos expresar la velocidad que observa S^{ext} en función del tiempo y aceleración propios de S^1 (y la Partícula 1 en ese preciso momento):

$$v = c \cdot \frac{\frac{c^2}{a} sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right)}{\frac{c^2}{a} cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right)} = c \cdot tanh\left(\frac{a}{c}\tau\right) \quad ^{245}$$

Es decir, que ya tenemos la velocidad que mide el Observador externo S^{ext} para el observador S^1 pero en función de la aceleración y del tiempos propios de S^1 y P^1. No caigamos en errores: ciertamente hemos dicho que el Observador S^1 va a una velocidad constante y, aunque ahora tengamos un dato en función de a y τ, recordemos que el Observador S^1 sencillamente toca tangencialmente la trayectoria de la Partícula 1, es decir, venía de paso y seguirá en el futuro con una velocidad constante que, justamente, tiene los valores a y τ que la Partícula 1 tiene en ese preciso momento. La velocidad y trayectoria de la Partícula 1 seguirá cambiando según cambien dichas magnitudes, pero para el observador S^1, los valores en ese punto, son constantes. Él es comóvil a P^1 en ese preciso momento.

Recordemos que hemos dicho que ante Movimiento Rectilíneo Uniforme, en Sistemas Inerciales, como el caso de nuestro observador S^1, los vectores de la base se definían como:



Donde:

$$e_{0^1} = \gamma e_0 + \gamma\beta e_1 \qquad \beta = \frac{\dot{x}}{c} = \frac{v}{c}$$

$$e_{1^1} = \gamma\beta e_0 + \gamma e_1 \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

---

[245] Se podría haber calculado desde la cuadrivelocidad mediante esta expresión 'atajo'. Siendo:

$$\underline{u} = u^0 e_0 + u^1 e_1$$

Entonces:

$$v = c \cdot \frac{u^1}{u^0} = c \cdot \frac{c\, sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right)}{c\, cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right)} = c \tanh\left(\frac{a}{c}\tau\right)$$

Esto no es otra cosa que una ratio de cambio multiplicada una cantidad c...(la velocidad con la que el tiempo avanza…).

Así, S^1, que es un Sistema de Referencia Comóvil a la partícula 1 en el punto tangente, podrá mediante su modelo $S^1: (ct^1, x^1)$, medir la aceleración que percibe en la Partícula 1.

Claro, recordemos que e_{0^1} y e_{1^1} son ***ortogonales*** y puesto que estamos mirando desde S^1, que es un sistema que ha alineado sus ejes con los de la P^1, apreciará que la aceleración de la Partícula 1 discurre exclusivamente por la componente espacial[246]. ¿Por qué sólo por ahí? Porque al ser S^1 inercial respecto a P^1, la aceleración no puede modificar el módulo de la velocidad que dibuja la trayectoria, es decir, porque para S^1, que es Comóvil, la partícula no está acelerada en el tiempo (S^1y la Partícula 1 comparten tiempo propio) ya que se mueven al unísono y, por lo tanto, la aceleración sólo tiene componente espacial y, de hecho, como veremos, en el primer caso coinciden plenamente de manera que parecería no existir aceleración alguna.

¿Cómo definimos esta aceleración propia que observa S^1 en la Partícula 1? Pues será, naturalmente algo como:

$$a = a^{1^1} \cdot e_{1^1}$$

Calculemos, de entrada e_{1^1}:

$$e_{1^1} = \gamma\beta e_0 + \gamma e_1$$

$$\beta = \frac{\dot{x}}{c} = \frac{c\,tanh\left(\frac{a}{c}\tau\right)}{c} = tanh\left(\frac{a}{c}\tau\right) = \frac{sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right)}{cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right)}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$1 - \beta^2 = 1 - \frac{sinh^2\left(\frac{a}{c}\tau\right)}{cosh^2\left(\frac{a}{c}\tau\right)}$$

Ponemos común denominador:

$$= \frac{cosh^2\left(\frac{a}{c}\tau\right) - sinh^2\left(\frac{a}{c}\tau\right)}{cosh^2\left(\frac{a}{c}\tau\right)} = \frac{1}{cosh^2\left(\frac{a}{c}\tau\right)}$$

Luego sustituyendo:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{cosh^2\left(\frac{a}{c}\tau\right)}}} = \frac{1}{\frac{1}{cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right)}} = cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right)$$

Si ahora sustituimos:

[246] Sabemos que en un sistema inercial la aceleración discurre de manera ortogonal al paso del tiempo (e_0). Es más, estamos diciendo que, además, en dicho punto, S^1 no percibe aceleración alguna en P^1 ya uqe ambos sitemas son comóviles, es decir, están en reposo relativo entre ellos.

$$e_{1^1} = \gamma\beta e_0 + \gamma e_1$$

$$e_{1^1} = cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right) \cdot \frac{sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right)}{cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right)} e_0 + cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right) e_1$$

$$e_{1^1} = sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right) e_0 + cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right) e_1$$

Y ahora recordemos que definíamos la aceleración propia como[247]:

$$a = a\, sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right) e_0 + a\, cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right) e_1$$

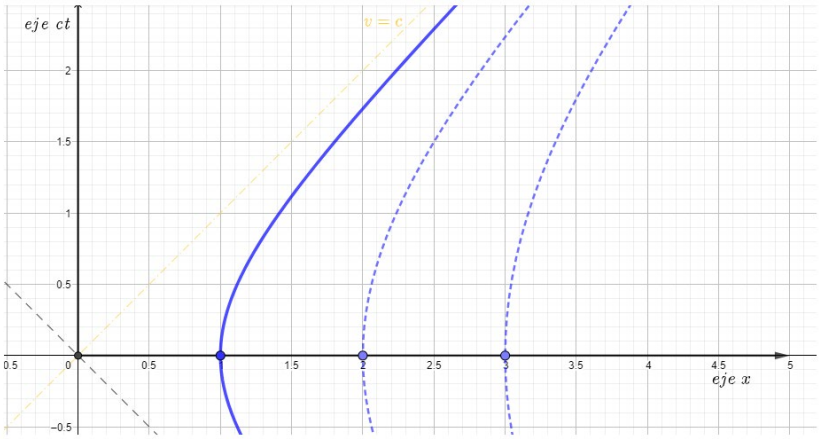
Por lo que tras nuestra búsqueda de:

$$a = a^{1^1} \cdot e_{1^1}$$

Podemos afirmar que a^{1^1} es el módulo, en el eje x_1, de la aceleración propia que S^1 mide en la Partícula 1.

Añadamos ahora más partículas pero siguiendo el siguiente patrón ya mencionado al inicio del presente epígrafe: vamos a añadir nuevas partículas pero con la condición de que tengan una aceleración y un tiempo propio que permitan verlas, desde S^1, como inerciales. Ciertamente, desde S^{ext} veremos que se dibujan líneas parabólicas cada vez más apretadas, acercándose a la asíntota $v = c$, pero, desde S^1, se verán perfectamente inmóviles o, mejor dicho, comóviles.

Para ello, como dijimos, supongamos que la Partícula 1 parte de una $x = 1$:



Así, puesto que para cualquier partícula (y en concreto para S^1, acompañante de la Partícula 1, la ecuación que define la evolución de su coordenada espacial es:

$$x = \frac{c^2}{a} cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right)$$

Resulta que en nuestro caso:

$$t = 0 = \tau_1$$

[247] Decir dónde.

$$x = \frac{c^2}{a} cosh\left(\frac{a}{c} 0\right) = \frac{c^2}{a} cosh(0) = \frac{c^2}{a} \cdot 1 \rightarrow x = \frac{c^2}{a}$$

Y puesto que decimos que $x = 1$, entonces:

$$1 = \frac{c^2}{a} \rightarrow a = c^2$$

Luego sus ecuaciones generales de movimiento serán:

$$ct^{Part.1} = \frac{c^2}{a} sinh\left(\frac{a}{c}\tau_1\right) \rightarrow \frac{c^2}{c^2} sinh\left(\frac{c^2}{c}\tau_1\right) = sinh(c\,\tau_1)$$

$$x^{Part.1} = \frac{c^2}{a} cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right) \rightarrow \frac{c^2}{c^2} cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right) = cosh(c\,\tau_1)$$

Que coincide plenamente con la definición hecha para la base del Sistema Comóvil[248]:

$$e_{0^1} = \frac{\underline{u}}{c} = \frac{1}{c}(c\ cosh(c\,\tau_1)e_0 + c\ \ sinh(c\,\tau_1)e_1)$$

$$e_{0^1} = cosh(c\,\tau_1)e_0 + sinh(c\,\tau_1)e_1$$

$$e_{1^1} = sinh(c\,\tau_1)e_0 + cosh(c\,\tau_1)e_1 \quad [249]$$

Rindler, además, observó que el vector e_{1^1} siempre discurre inserto en el eje que une la partícula en cuestión con el origen de coordenadas[250] (e_{0^1}, por otro lado, será siempre tangente a la curva).

---

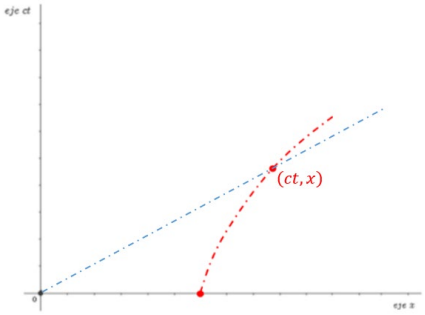
[248] Véase página 310 y ss.

[249] Ya sabemos que la ortogonalidad se alcanza intercambiando las componentes.

[250] Un vector es paralelo y, por lo tanto, linealmente dependiente y, por ello, 'insertable' en otro, si se da la proporcionalidad:

$$\underline{A} = \alpha \cdot e_{1^1} = \alpha(ct\ e_0 + x\ e_1)$$

Definamos la recta que pasa por la partícula y el origen de coordenadas y veamos si ciertamente dicha recta es proporcional y, por lo tanto, puede contener al vector e_{1^1} de la base:

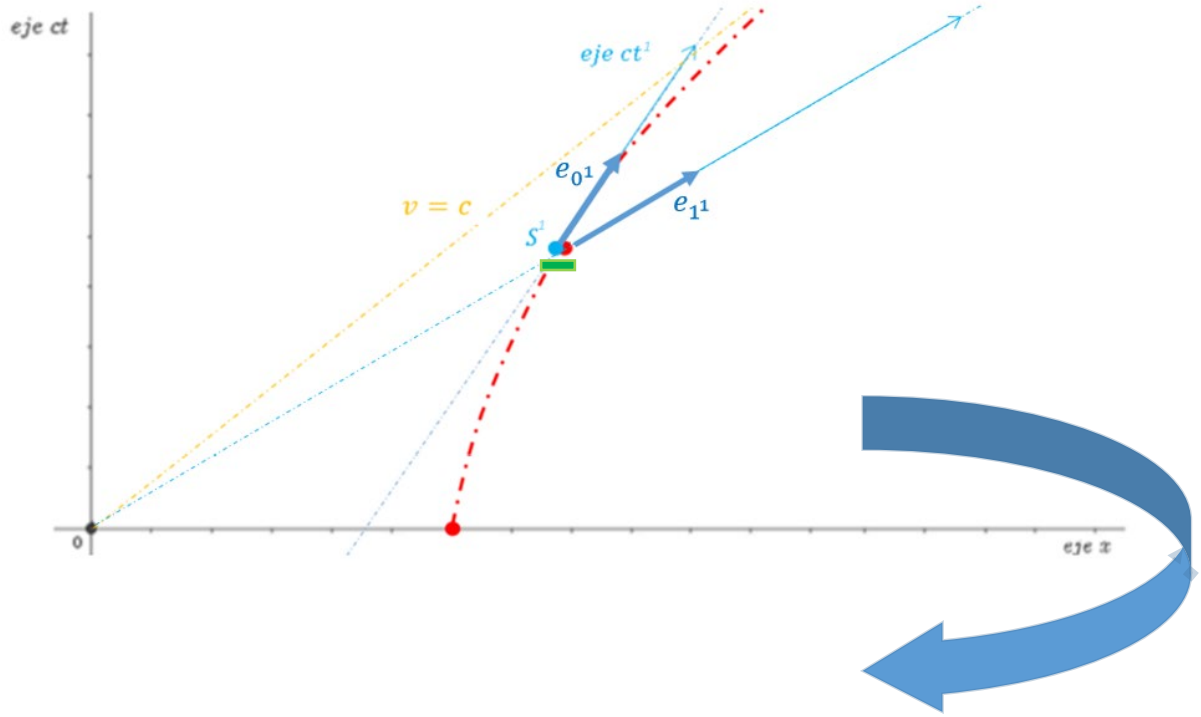


Es una recta, luego estamos buscando una proporcionalidad lineal directa del tipo:

$$ct = m \cdot x$$

Obliguemos a que la recta pase por el punto (ct, x). Según hemos definido los ejes en nuestro hilo principal:

Introduzcámonos gráficamente en el sistema S^1 comóvil a la Partícula 1. Pasemos de la visión externa de S^{ext} :



$$ct = sinh(c\,\tau_1)$$

$$x = cosh(c\,\tau_1)$$

Luego:

$$ct = m \cdot x \rightarrow sinh(c\,\tau_1) = m \cdot cosh(c\,\tau_1) \rightarrow m = \tanh(c\,\tau_1)$$

Es decir que:

$$ct = \tanh(c\,\tau_1) \cdot x$$

Parametricemos esta recta mediante:

$$x = \lambda$$
$$ct = \lambda \tanh(c\,\tau_1)$$

Ahora para calcular un vector tangente cualquiera a esta recta, derivemos cada función para encontrar los componentes de e_0 y e_1:

$$\textit{Componente de } e_0 = \frac{dct}{d\lambda} = \frac{d(\lambda\, tanh(c\,\tau_1))}{d\lambda} = tanh(c\,\tau_1)$$
$$\textit{Componente de } e_1 = \frac{dx}{d\lambda} = 1$$

Luego, un vector contenido en esta recta necesariamente debe tener la forma:

$$\underline{A} = \tanh(c\,\tau_1)\, e_0 + e_1$$

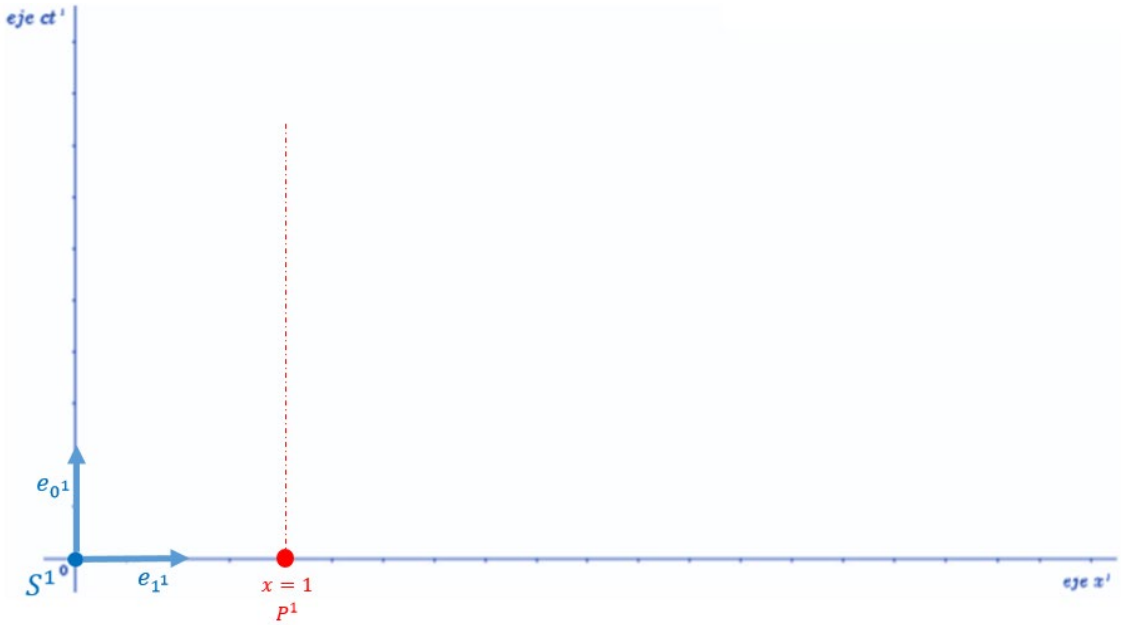
Decíamos que debía tener la forma:

$$\underline{A} = \alpha \cdot e_{1^1} = \alpha(ct\, e_0 + x\, e_1)$$

¿Son la misma?... Sí. Luego, efectivamente, e_{1^1} está en la línea que une la partícula con el origen de coordenadas.

$$\underline{A} = \alpha(ct\, e_0 + x\, e_1) = \alpha x \left(\frac{ct}{x} e_0 + e_1\right) = \tanh(c\,\tau_1)\, e_0 + e_1$$

A verlo directamente desde dentro de S^1 [251]:



Ciertamente, al ser S^1 y P^1 sistemas comóviles, desde S^1 veremos una Partícula 1 inmóvil, que sólo se desplaza en el tiempo[252].

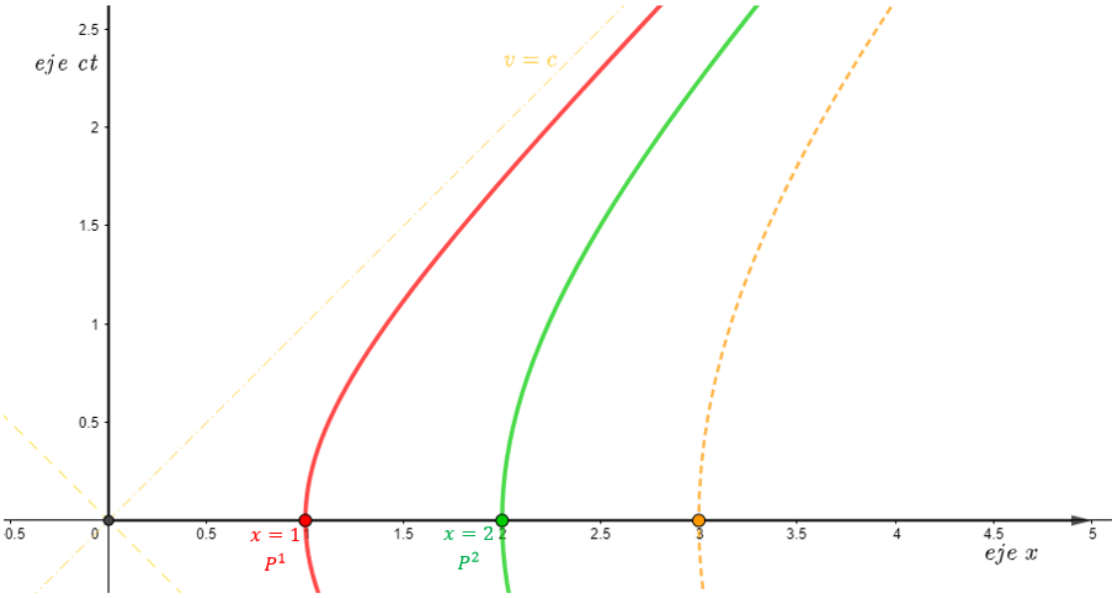
(OBSERVACIÓN. El procedimiento que se va a seguir es "alinear" en el glimpse y después estudiar el movimiento de S^1 para que esa "conjunción de astro"continuará en el tiempo…. Ya lo veremos…)

Introduzcamos ahora otra 'muñeca rusa'[253]. Añadamos otra partícula P^2 y veámoslo desde nuestra butaca privilegiada de observadores externos omniscientes S^{ext}.

[251] Téngase en cuenta que la pequeña distancia que hemos marcado ahora en verde equivale por convención propia a 1 unidad. S^1 es comóvil a P^1, pero supongamos que en vez de moverse estrechamente pegado a la P^1, están desplazados, como hemos dicho, una distancia de una unidad espacial.

[252] Téngase en cuenta que esto es un *glimpse*, un pestañeo. S^1 seguirá su rumbo y el frágil equilibrio se romperá en el siguiente instante pero, en ese lapso infinitesimal de tiempo, S^1 podrá montarse una película acerca de cómo evolucionaría el sistema en el futuro.

[253] Muy importante. Si bien en casos anteriores vimos trayectorias que no compartían asíntotas y, precisamente por eso no se trataban de Sistemas de Referencia Comóviles, en este caso, sí que lo hacen. De hecho, ahí está el truco pues dijimos que teníamos que manipular las aceleraciones para forzar que desde un sistema de referencia Comóvil (S^1), los movimientos de las partículas parezcan no acelerados, inerciales. Las aceleraciones serán tan, tan, felices y apropiadas que a ojos del observador comóvil no se percibirá movimiento interpartículas.



Puesto que la Partícula 2 debe seguir estas ecuaciones:

$$ct_2 = \frac{c^2}{a} sinh\left(\frac{a}{c}\tau_2\right)$$

$$x_2 = \frac{c^2}{a} cosh\left(\frac{a}{c}\tau_2\right)$$

Y debe cumplir estas condiciones en el inicio del proceso de medida:

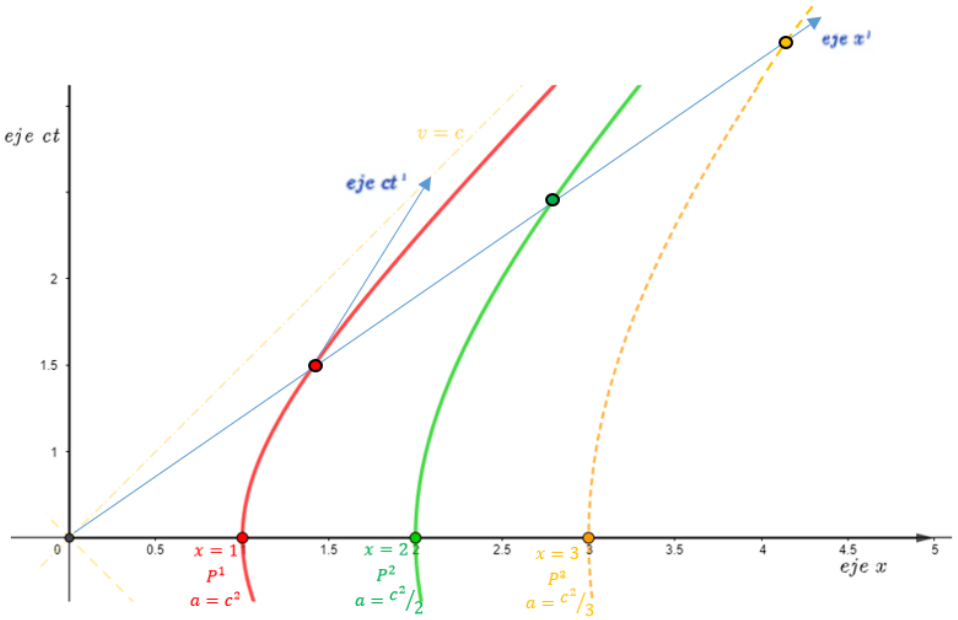
$$x = 2 \quad // \quad \tau_2 = \tau_1 = t = 0$$

Resulta que la aceleración deberá ser:

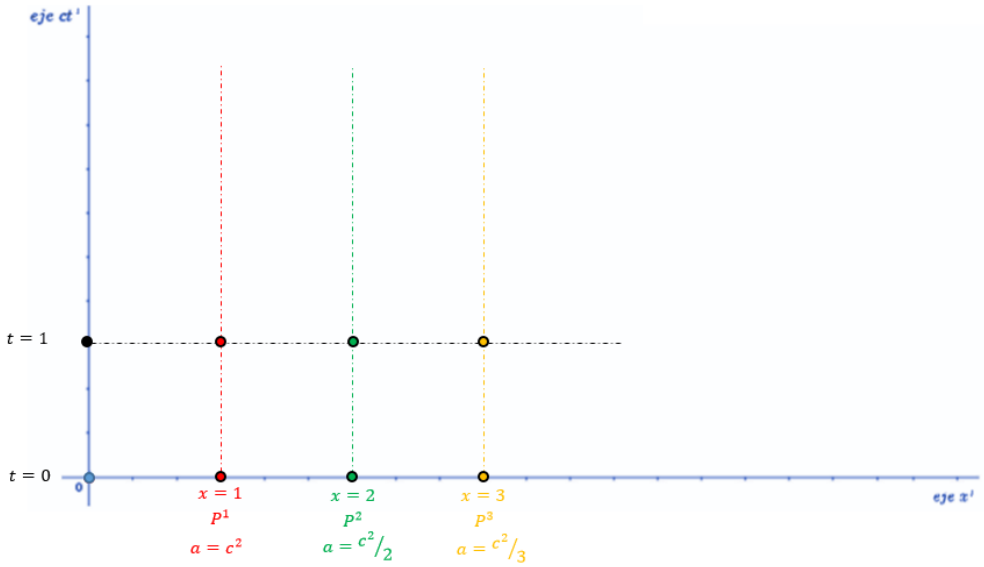
$$x_2 = \frac{c^2}{a} cosh\left(\frac{a}{c}\tau_2\right)$$

$$2 = \frac{c^2}{a} cosh\left(\frac{a}{c}0\right) \rightarrow 2 = \frac{c^2}{a}(1) \rightarrow a = \frac{c^2}{2}$$

Para que pasado un tiempo $t = 1 = \tau_1$, consigamos que, a pesar de que el escenario visto por S^{ext} fuera el siguiente…:



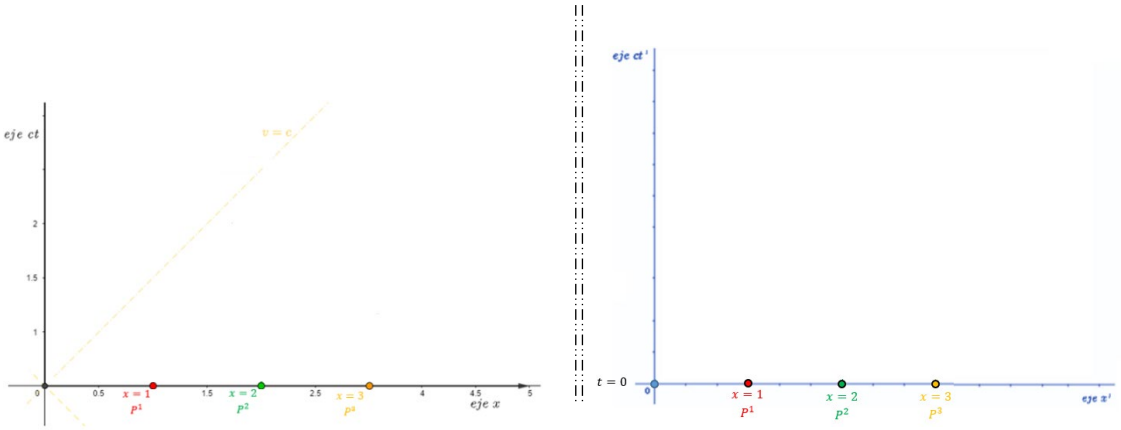
… desde dentro del Sistema Comóvil S^1 se vería algo como esto:



(OBSERVACIÓN. ¿Cómo es posible que teniendo aceleraciones diferentes lleguen al mismo punto respecto de S^1? Porque no perciben el tiempo del mismo modo. En breve veremos esta maravillosa particularidad. Además, tras este esquema se esconde el razonamiento principal que nos lleva a la comprensión del principio fundamental la Relatividad General. Pensemos en el ***Principio de Equivalencia****. ¿Y si realmente las trayectorias que estamos viendo son realmente "líneas rectas" pero que se desarrollan en espacios curvos? (ojo, recordando que aún estamos en espacios planos… en todo caso serán localmente planos y con coordenadas "curvas" pero en planos tangentes a la variedad espaciotemporal curva). Es decir, y si las partículas realmente se están moviendo como Sistemas Inerciales en un espacio de Minkowski pero desarrollan ese comportamiento "plano" en un "lecho espaciotemporal" que hace que se perciba como curvo/acelerado? Las aceleraciones producidas por la gravedad, entonces, no se aplicarían sobre los cuerpos sino sobre los caminos que siguen en su movimiento inercial. En tal caso, lo que tendríamos es que buscar el Sistema de Referencia localmente (plano tangente) apropiado que, como el Sistema Comóvil de Rindler, nos permita estudiar como 'inerciales' movimientos que se desarrollan en espaciotiempos curvados por el efecto gravitatorio y que generan en observadores externos (e internos) 'la ilusión fenoménica' de estar sometidos a aceleraciones)*

Retomemos en paralelo la evolución del sistema visto desde el punto de vista tanto desde S^{ext} como de S^1.

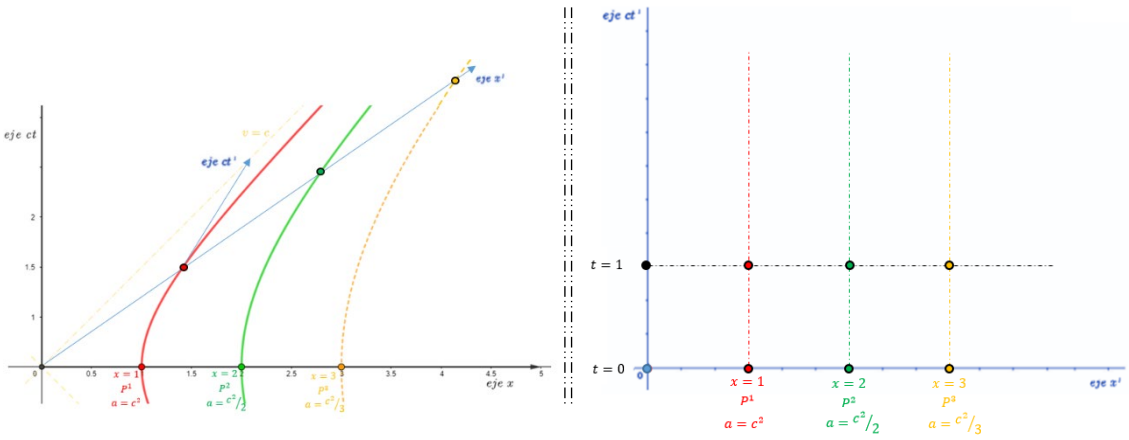
$$t = \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$$ [254]



Ahora, según corre el tiempo:

$$t = \tau_1 = 1; \qquad \tau_2 = 2; \qquad \tau_3 = 3$$

(OBSERVACIÓN. El tiempo propio es diferente para cada partícula)



Si nos fijamos en el esquema de la derecha, el que observa el Sistema de Referencia Comóvil S^1, ¿cómo es posible que con aceleraciones diferentes y, acumuladas en el tiempo, con velocidades diferentes, lleguen las tres partículas al mismo punto? Simplemente porque el tiempo transcurre de manera diferente para cada una de ellas y, además, lo hace de manera proporcional a la aceleración que tienen. Mientras que la Partícula 1 tarda 1 unidad de 'su tiempo' en llegar a ese punto, la Partícula 2 tarda 2 unidades de 'su tiempo' para llegar a ese punto.

Veámoslo. ¿Cómo mide el tiempo alguien que monte sobre la Partícula 2? Tengamos en cuenta:

- Si S^1, comóvil con la Partícula 1:

$$ct_1 = tanh(c\,\tau_1)\,x$$

- Para un S^2, comóvil con la Partícula 2:

[254] Recuérdese que τ_1 es el tiempo propio tanto de la partícula 1 como del Sistema de Referencia Comóvil S^1.

$$x_2 = \frac{c^2}{a} cosh\left(\frac{a}{c}\tau_2\right) \rightarrow 2 = \frac{c^2}{a} cosh\left(\frac{a}{c}0\right) \rightarrow 2 = \frac{c^2}{a}(1) \rightarrow a = \frac{c^2}{2}$$

$$ct_2 = \frac{c^2}{a} sinh\left(\frac{a}{c}\tau_2\right)$$

Multiplicando por 1 bajo la forma de $\frac{x}{x}$:

$$ct_2 = tanh\left(\frac{c}{2}\,\tau_2\right) x$$

Y puesto que estamos imponiendo que para S^1 se dé que estén en la misma línea, debe darse que[255]:

$$ct_1 = ct_2$$
$$tanh(c\,\tau_1)\,x = tanh\left(\frac{c}{2}\,\tau_2\right) x$$

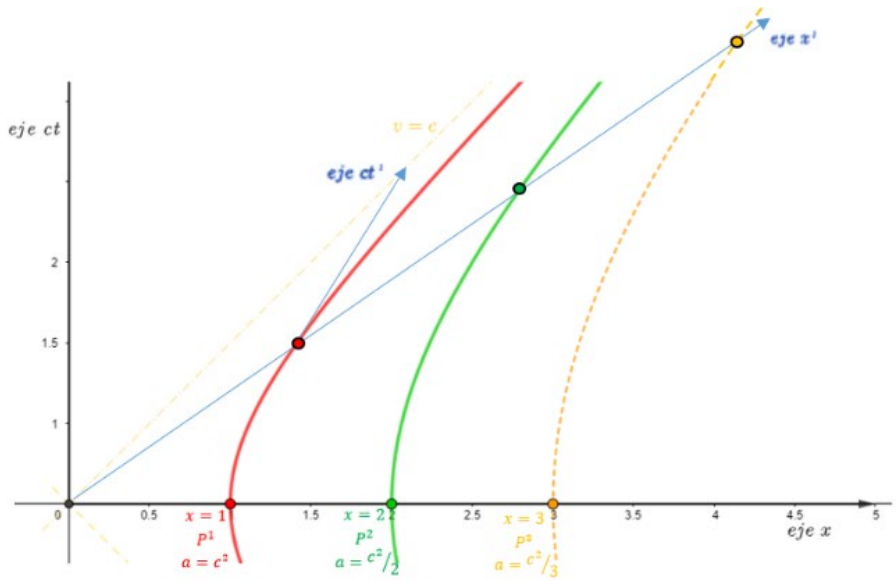
Y esta igualdad sólo se cumple si:

$$c\,\tau_1 = \frac{c}{2}\,\tau_2$$

Es decir, que:

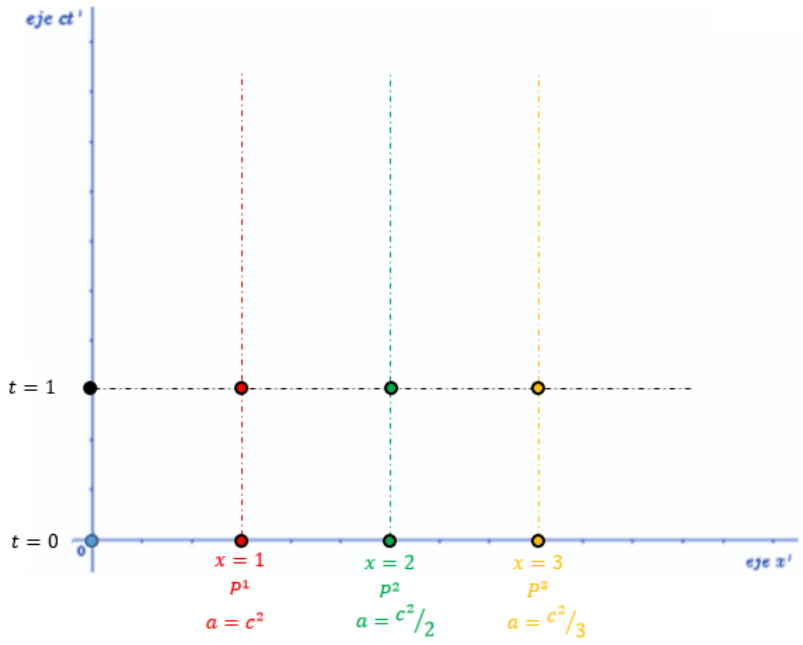
$$\tau_1 = \frac{\tau_2}{2}$$

En definitiva: hemos deformado, trastocando aceleraciones propias y tiempos propios, para que un espacio como éste:



[255] Claro…. Están a la misma altura, en la misma coordenada del eje ct.

Se vea como éste:



Y llegados a este punto cabría preguntarse: ¿qué métrica tiene este espaciotiempo con coordenadas *extrañas*? Si suponemos que una serie de transformaciones de coordenadas nos llevan de un espaciotiempo plano con líneas maestras rectas en que los fenómenos acelerados se ven como curvas (porque lo son para S^{ext}) a un espacio plano (***recordemos, aún es un espaciotiempo plano***) en que dichos fenómenos se vean sobre líneas "maestras rectas" como *rectos* (lo que era curvo para S^{ext} ahora, para S^1, desde dentro, es recto). ¿Qué ***transformación de coordenadas*** se produce para que algo curvo (acelerado) se vea como algo recto (sin acelerar)? ¿Cómo se calcula, con esas coordenadas, un elemento de línea? ¿Cómo se mide una distancia con esas coordenadas? … ¿***Cuál es la métrica según las nuevas coordenadas***?

Antes de proceder, recapitulemos acerca de lo que hemos hecho y parémonos a analizar un paso que hemos dado en pro de la claridad pero que requiere de mayor atención por nuestra parte ahora que entendemos de qué trata un espacio de Rindler.

Recordemos que las ecuaciones para calcular las coordenadas de la trayectoria de cualquier partícula en el Sistema Externo eran:

$$ct = \frac{c^2}{a} sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right)$$

$$x = x_0 - \frac{c^2}{a} + \frac{c^2}{a} cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right)$$

A continuación dijimos que, para eliminar el desplazamiento horizontal de la hipérbola, nos situábamos en la situación ideal en que:

$$x_0 = \frac{c^2}{a}$$

Ya que así:

$$x = \frac{c^2}{a} - \frac{c^2}{a} + \frac{c^2}{a} cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right)$$

$$x = \frac{c^2}{a} cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right)$$

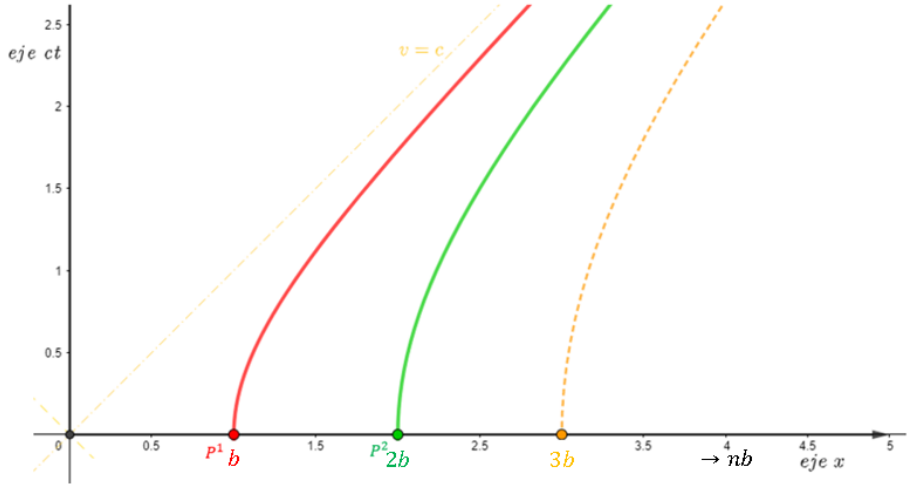
Y a continuación, para facilitar las cosas, 'calibramos el espacio' para que las unidades de medida fueran $\frac{c^2}{a}$. Con tal fin dijimos que para la primera partícula, que iba a ser la partícula de referencia primaria, forzábamos que (decir dónde):

$$\frac{c^2}{a} = 1$$

Pero en términos generales lo que estábamos haciendo es forzar a que:

$$\frac{c^2}{a} = b$$

De manera que:



Donde b tiene las siguientes unidades:

$$\frac{c^2}{a} \rightarrow \frac{m^2/_{s^2}}{m/_{s^2}} = b \rightarrow m$$

Recordemos que las ecuaciones para calcular las coordenadas de la trayectoria de cualquier partícula en el Sistema Externo eran:

$$ct = \frac{c^2}{a} sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right)$$

$$x = \frac{c^2}{a} cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right)$$

Y ahora, para la partícula 1, serán:

$$ct = x\ sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)$$

$$x = x\ cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)$$

Donde la x, marcada en azul, equivale a los valores que adopta la coordenada x a lo largo de su eje. Recordemos que hemos calibrado las unidades para que sean $b, 2b, 3b, \dots, nb$.

Por otro lado, recordemos que, para que estas dos partículas estuvieran en el mismo eje x debía suceder que:

$$\frac{c\tau_1}{b} = \frac{c\tau_2}{2b} = \frac{c\tau_n}{nb}$$

$$c\tau_1 = \frac{c\tau_n}{n}$$ [256]

Es decir, si analizásemos una partícula en la posición, por ejemplo, $x = 2$, tendríamos realmente:

$$ct = 2b\ sinh\left(\frac{c}{2b}\tau_2\right)$$

$$x = 2b\ cosh\left(\frac{c}{2b}\tau_2\right)$$

Y para una posición $x = n$:

$$ct = nb\ sinh\left(\frac{c}{nb}\tau_n\right) \rightarrow ct = x\ sinh\left(\frac{c\tau_1}{b}\right)$$

$$x = nb\ cosh\left(\frac{c}{nb}\tau_n\right) \rightarrow x = x\ cosh\left(\frac{c\tau_1}{b}\right)$$

Es decir, para el Sistema S^1 tenemos:

$$ct = valor\ de\ x_1\ calibrado\ con\ b \cdot sinh\left(\frac{c\tau_1}{b}\right) \rightarrow ct = x_1\ sinh\left(\frac{c\tau_1}{b}\right)$$

$$x = alor\ de\ x_1\ calibrado\ con\ b \cdot\ cosh\left(\frac{c\tau_1}{b}\right) \rightarrow x = x_1\ cosh\left(\frac{c\tau_1}{b}\right)$$

Y como estamos alternando entre dos Sistemas de Referencia con coordenadas:

- $S^{ext}: ct, x$
- $S^1: c\tau_1, x_1$

[256] Donde n es una cantidad totalmente adimensional, no está ni en metros, ni en segundos… No está vinculado a ninguna unidad dimensional. Es perfectamente obvio, pues el único modo de que en la igualdad anterior el lado izquierdo y el lado derecho tengan las mismas unidades pasa porque n no tenga ninguna como, de hecho, sucede.

Podemos empezar a calcular el elemento de línea. Recordemos que seguimos en un espaciotiempo plano, con unas coordenadas muy felices para que cuando lo depositemos sobre una superficie curva, se vea, digamos, recto. Para calcular esto recordemos que[257]:

$$ds^2 \equiv g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$$

$$ds^2 \equiv g_{0^1 0^1} dx^{0^1} dx^{0^1} + g_{0^1 1^1} dx^{0^1} dx^{1^1} + g_{1^1 0^1} dx^{1^1} dx^{0^1} + g_{1^1 1^1} dx^{1^1} dx^{1^1}$$

Importante, esto será así, es un invariante, sí y sólo sí, el cambio de Sistemas de Coordenadas, se realiza según un modo determinado que ya conocemos. Los vectores de la base de lo sistemas se deben relacionar así:

$$e_{0^1} = \frac{\partial x^0}{\partial x_{0^1}} e_0 + \frac{\partial x^1}{\partial x_{0^1}} e_1$$

$$e_{1^1} = \frac{\partial x^0}{\partial x_{1^1}} e_0 + \frac{\partial x^1}{\partial x_{1^1}} e_1$$

Podemos empezar a calcular los vectores de la base del Sistema S^1. Puesto que:

$$ct = x_1 \, sinh\left(\frac{c\tau_1}{b}\right)$$

$$x = x_1 \, cosh\left(\frac{c\tau_1}{b}\right)$$

Entonces:

$$e_{0^1} = \frac{\partial x^0}{\partial x_{0^1}} e_0 + \frac{\partial x^1}{\partial x_{0^1}} e_1$$

$$e_{0^1} = \frac{\partial ct}{\partial c\tau_1} e_0 + \frac{\partial x}{\partial c\tau_1} e_1$$

$$e_{0^1} = \frac{\partial \left(x_1 \, sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)\right)}{\partial c\tau_1} e_0 + \frac{\partial \left(x_1 \, cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)\right)}{\partial c\tau_1} e_1$$

$$e_{0^1} = x_1 \frac{1}{b} cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) e_0 + x_1 \frac{1}{b} sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) e_1 \quad [258]$$

Por otro lado:

$$e_{1^1} = \frac{\partial x^0}{\partial x_{1^1}} e_0 + \frac{\partial x^1}{\partial x_{1^1}} e_1$$

$$e_{1^1} = \frac{\partial ct}{\partial x_1} e_0 + \frac{\partial x}{\partial x_1} e_1$$

[257] Véase p. 288.

[258] En rojo la aplicación de la regla de la cadena.

$$e_{1^1} = \frac{\partial\left(x_1 \sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)\right)}{\partial x_1} e_0 + \frac{\partial\left(x_1 \cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)\right)}{\partial x_1} e_1$$

$$e_{1^1} = \sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) e_0 + \cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) e_1$$

Ahora recordemos la métrica del 'espacio original externo' que, como decimos, es plano y que es compartida por el espacio configurado con el sistema de coordenadas "hiperbólicas":

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ [259]

Y definamos la métrica nueva del espacio plano según las Coordenadas de Rindler:

- $g_{0^1 0^1} = e_{0^1} \cdot e_{0^1}$

$$e_{0^1} \cdot e_{0^1} = \left[\frac{x}{b}\cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) e_0 + \frac{x}{b}\sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) e_1\right] \cdot \left[\frac{x}{b}\cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) e_0 + \frac{x}{b}\sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) e_1\right]$$ [260]

Los productos cruzados no sobreviven. Sólo sobrevive:

$$= \left(\frac{x}{b}\right)^2 \cdot \left(\cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)\right)^2 \cdot e_0 e_0 + \left(\frac{x}{b}\right)^2 \cdot \left(\sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)\right)^2 \cdot e_1 e_1$$

$$= \left(\frac{x}{b}\right)^2 \cdot \left(\cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)\right)^2 \cdot (-1) + \left(\frac{x}{b}\right)^2 \cdot \left(\sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)\right)^2 \cdot (+1)$$

$$= \left(\frac{x}{b}\right)^2 \cdot \left(-\cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)\right)^2 + \left(\frac{x}{b}\right)^2 \cdot \left(\sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)\right)^2$$

$$= \left(\frac{x}{b}\right)^2 \cdot \left[-\cosh^2\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) + \sinh^2\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)\right]$$ [261]

$$= \left(\frac{x}{b}\right)^2 \cdot [-1]$$

$$g_{0^1 0^1} = -\left(\frac{x}{b}\right)^2 \rightarrow -x^2$$ [262]

---

[259] En un espacio plano, la base de un sistema alternativo se puede expresar como combinación lineal de una base 'anterior'. Por eso, la métrica es compartida, pues definiremos $e_{0^1} \cdot e_{0^1}$ como un cierto $e_0 \cdot e_0 + e_1 \cdot e_1$, que no son otra cosa que elementos de una métrica. En un espacio curvo, en cambio, esto no es posible. Los vectores de la base se definen intrínsecamente, son autoreferentes y que, además, cambia según nos desplacemos por la variedad curva. Ya lo veremos.

[260] Quitamos ya de x_1 el subíndice porque ya sabemos que nos referimos a la x propia del sistema.

[261] Puesto que $\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1$, entonces: $-\cosh^2(\alpha) + \sinh^2(\alpha) = -1$.

[262] Téngase en cuenta que b tiene unidades métricas. Recordemos que era una especie de compensador para que las unidades fueran justamente $\frac{c^2}{a}$. El resultado $\frac{x}{b}$ es igualmente una magnitud métrica, por lo que, ¿por qué no? Llamémoslo x, es una x 'calibrada felizmente', pero x al fin y al cabo.

- $g_{0^1 1^1} = e_{0^1} \cdot e_{1^1} = g_{1^1 0^1} = e_{1^1} \cdot e_{0^1}$

$$e_{0^1} \cdot e_{1^1} = \left[\frac{x}{b} cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) e_0 + \frac{x}{b} sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) e_1\right] \cdot \left[sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) e_0 + cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)\right]$$

Los productos cruzados no sobreviven. Sólo sobrevive:

$$= \left[\frac{x}{b} cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) e_0 + \frac{x}{b} sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) e_1\right] \cdot \left[sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) e_0 + cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)\right]$$

$$= \left[\frac{x}{b} cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) \cdot sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)\right] e_0 e_0 + \left[\frac{x}{b} sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)\right] e_1 e_1$$

$$= \left[\frac{x}{b} cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) \cdot sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)\right] (-1) + \left[\frac{x}{b} sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)\right] (+1)$$

$$= -\left[\frac{x}{b} cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) \cdot sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)\right] + \left[\frac{x}{b} sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)\right] = 0$$

$$g_{0^1 1^1} = 0 = g_{1^1 0^1}$$

- $g_{1^1 1^1} = e_{1^1} \cdot e_{1^1}$

$$e_{1^1} \cdot e_{1^1} = \left[sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) e_0 + cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) e_1\right] \cdot \left[sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) e_0 + cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) e_1\right]$$

Los productos cruzados no sobreviven. Sólo sobrevive:

$$= \left[sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) \cdot sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)\right] e_0 e_0 + \left[cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) \cdot cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)\right] e_1 e_1$$

$$= \left[sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) \cdot sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)\right] (-1) + \left[cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) \cdot cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)\right] (+1)$$

$$= -sinh^2\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) + cosh^2\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) = 1$$

$$g_{1^1 1^1} = 1$$

Luego la ***métrica del espacio plano según las Coordenadas de Rindler*** es:

$$g = \begin{pmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y, por lo tanto, el ***elemento de línea*** se define como:

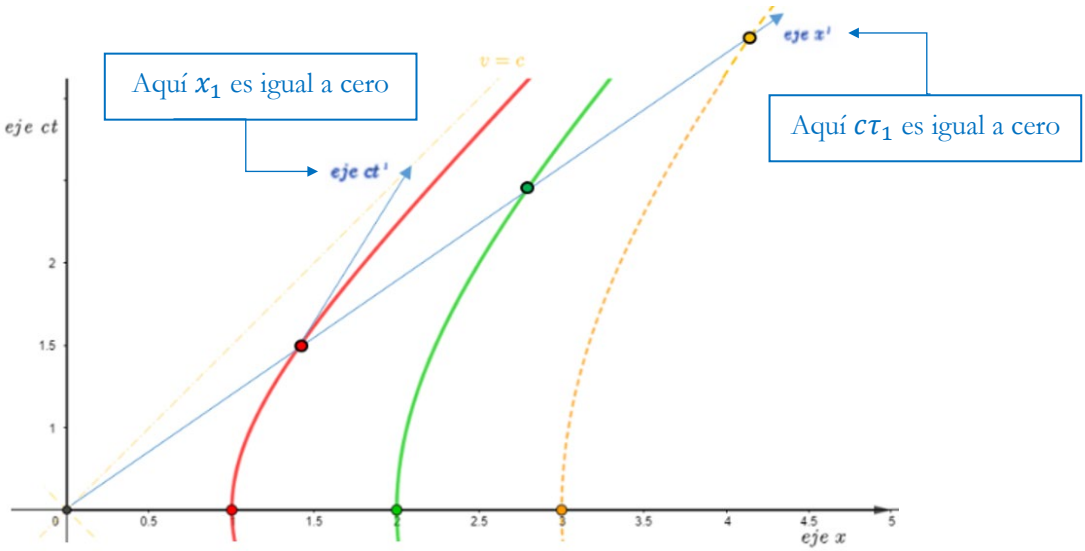
$$ds^2 \equiv g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

$$ds^2 \equiv -x^2 d(c\tau_1)^2 + dx^2$$

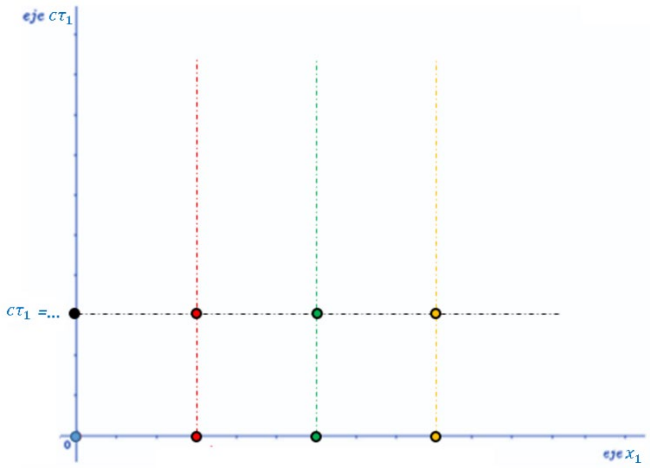
$$ds^2 \equiv -x^2 c^2 d{\tau_1}^2 + dx^2$$

Sumerjámonos ahora en un Sistema de Coordenadas de Rindler, es decir, somos habitantes de ese espacio y, por lo tanto, aunque desde fuera las trayectorias puedan verse curvas, nosotros, desde dentro, lo veremos todo perfectamente recto.

Pasamos de esta visión:



Pasamos a:



Y puesto que vamos a sumergirnos de pleno en el espacio de Rindler, es decir, vamos a vivir como un habitante del mismo que ve la realidad con sus propios ojos, no habría necesidad de seguir usando las índices, por lo que, finalmente, vamos a usar las referencias ct, x a pesar de que debemos saber que estamos haciendo referencia a algo que forma parte de un modelo más grande y cuyos ejes de referencia en realidad son (los del sistema "interno"): $c\tau_1, x_1$.

Además, definirán su elemento de línea como:

$$ds^2 \equiv -{x_1}^2 c^2 {d\tau_1}^2 + {dx_1}^2$$

Una vez definido esto vamos a proceder a la inversa de como hicimos antes y vamos a comprobar si los resultados son coherentes, es decir: vamos a analizar este elemento de línea que nos dan y vamos a tratar de retrotraernos para averiguar que tipo de espacio es.

Para ello, lo primero que se suele hacer es calcular los Símbolos de Christoffel, es decir, la conexión métrica[263]. Para ello, podríamos usar nuestra expresión ya demostrada para calcularlos[264]:

$$\Gamma^{\alpha}_{\gamma\delta} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\beta})[\partial_{\gamma} g_{\beta\delta} + \partial_{\delta} g_{\beta\gamma} - \partial_{\beta} g_{\gamma\delta}]$$

Sin embargo, vamos a usar mediante un procedimiento alternativo que puede llegar a ser más rápido y, además, nos muestra las posibilidades de acceder al mismo resultado desde caminos diferentes. Para ello, en primer lugar, recordemos que la Conexión Métrica no era otra cosa que el modo en que la base de un sistema iba cambiando según recorriéramos alguna de las coordenadas dimensionales. Dicho "modo de cambio", como sabemos, está incorporada en los Símbolos de Christoffel.

Por otro lado, fijémonos en la definición del elemento de línea que nos han pasado:

$$ds^2 \equiv -x^2 c^2 {d\tau_1}^2 + dx^2$$

Ahí ya tenemos toda la información que necesitamos para analizar el tipo de espacio en el que estamos. Así, entre otras cosas, podemos averiguar que estamos ante una base compuesta por dos vectores:

$$\{e_0, e_1\}$$

Por lo que podremos estar seguros de que el cambio que se produce en un vector e_α, según se recorre una coodenada x^β [265], debe poder expresarse como combinación lineal de estos vectores de la base:

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^0_{\alpha\beta} e_0 + \Gamma^1_{\alpha\beta} e_1$$

$$\partial_\alpha e_\beta = \Gamma^0_{\alpha\beta} e_0 + \Gamma^1_{\alpha\beta} e_1$$

Sabemos, por otro lado, que los Símbolos de Christoffel, en un espacio plano con coordenadas cartesianas son todos cero porque, claro, los vectores de la base no cambian según sea la coordenada. Sin embargo, en un espacio con coordenadas esféricas o, por decir otras, polares, los Símbolos de Christoffel no serán todos cero ya que al recorrer las coordenadas, como sabemos, sí que se producen cambios en la base. Pero es que, además, tenemos información para confirmar esto. ¿Son, en este caso, los Símbolos de Christoffel siempre igual a cero? Fijémonos en el elemento de línea:

---

[263] Recordemos que los símbolos de Christoffel nos daban información acerca de cómo cambiaba un vector de la base según recorríamos una coordenada determinada del sistema. Por ejemplo:

$$\frac{\partial e_r}{\partial r} = \Gamma^r_{rr} e_r + \Gamma^\theta_{rr} e_\theta + \Gamma^\varphi_{rr} e_\varphi$$

El vector e_r cambia según recorremos la coordenada r y el resultado es, como cabría esperar, otro vector que, por supuesto, puede ser expresado como una combinación lineal de los propios vectores de la base.

[264] Véanse pp. 157 y 226. Véase nota 151.

[265] Obviamente deben tener índices diferentes porque el vector e_α se debe transformar según se recorran todas las coordenadas x^β, dimensiones, del espacio.

$$ds^2 \equiv -x^2 c^2 d\tau_1{}^2 + 1 \cdot dx^2$$

De ahí podemos deducir que:

$$g_{00} = e_0 \cdot e_0 = -x^2$$

Es decir: depende de x … cambia según cambie x, eso es seguro.

Por otro lado:

$$g_{11} = e_1 \cdot e_1 = 1$$

Y como no hay términos cruzados, también podemos afirmar que:

$$g_{01} = e_0 \cdot e_1 = 0 = e_1 \cdot e_0 = g_{10}$$

Si nos fijamos en el elemento $g_{00} = e_0 \cdot e_0 = -x^2$, y nos olvidamos momentáneamente del signo negativo (sabemos que éste se debe a que se trata de una magnitud temporal), podremos estudiar el módulo del vector de la base e_0. Puesto que sabemos que el módulo de cualquier vector es: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ podríamos suponer que (como decimos, obviando el signo negativo, cuya naturaleza ya conocemos) que si:

$$g_{00} = e_0 \cdot e_0 = x^2$$

$$|e_0| = x$$

Es decir, que la longitud de e_0, como ya hemos adelantado, depende la coordenada x que estamos recorriendo. Es decir, la base, definitivamente, no sólo no es cero, sino que ni siquiera es constante por lo que es seguro que su derivada respecto a x es distinta de cero:

$$\partial_x e_0 \neq 0$$

Es decir, que, a diferencia de lo que sucedía en el espaciotiempo de Minkowski, en que la base era constante en todos sus puntos, ahora no es así. Pero no es así a pesar de que nos hemos metidos dentro del Sistema de Rindler y, por lo tanto, viéndolo todo recto, cartesiano, los Símbolos de Christoffel no son cero porque, ciertamente, los vectores de la base cambian según nos movamos por el sistema.

Expliquemos esto un poco mejor. Estamos en un espacio plano (no hay motivos para que los vectores sean cambiantes), con unas coordenadas rectas (no hay motivos para que los vectores cambian), pero, en cambio, la base cambia según nos desplacemos por x. Es decir, estamos ante un espacio con una métrica muy rara que nos puede hacer suponer que tras ese espacio tangente plano que estamos estudiando se esconde una variedad espaciotemporal mucho más extraña (curva) de lo esperado.

De hecho el módulo del vector e_0 ($|e_0| = x$), que va en dirección paralela al eje temporal, cambiará según nos desplacemos en la coordenada x. El módulo del vector e_1, en cambio, siempre será igual a 1 'lo pongamos donde lo pongamos'.

Sabiendo todo esto, podemos calcular fácilmente, los Símbolos de Christoffel.

Como, en:

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^0_{\alpha\beta} e_0 + \Gamma^1_{\alpha\beta} e_1$$

α y β van a adoptar valores 0 y 1 (tiempo y espacio lineal).

Por otro lado, recordemos que tenemos tres ecuaciones que nos dan información sobre el espacio:

$$g_{00} = e_0 \cdot e_0 = -x^2$$

$$g_{11} = e_1 \cdot e_1 = 1$$

$$g_{01} = e_0 \cdot e_1 = 0 = e_1 \cdot e_0 = g_{10}$$

… y, he aquí el camino alternativo que comentábamos. En vez de usar la fórmula ya demostrada, como sabemos que tras la derivada de los vectores de la base se esconden los Símbolos de Christoffel, podemos proceder a derivar cada término tanto por el tiempo como por el espacio para encontrar los Símbolos de Christoffel.

Empecemos por g_{00}, por ejemplo, por el tiempo:

$$\partial_0(e_0 \cdot e_0) = \partial_0(-x^2)$$

Como sabemos que x no tiene ninguna dependencia con el tiempo, podemos afirmar que:

$$\partial_0(e_0 \cdot e_0) = 0$$

Esto es la derivada de un producto:

$$\partial_0 e_0 \cdot e_0 + e_0 \cdot \partial_0 e_0 = 0$$

Como el producto escalar es conmutativo:

$$2(\partial_0 e_0) \cdot e_0 = 0$$

$$(\partial_0 e_0) \cdot e_0 = 0$$

Y como sabemos que la derivada de un vector es otro vector (y ya aparecerán los Símbolos de Christoffel), podemos proponer lo siguiente el factor que marcamos en verde:

$$(\partial_0 e_0) \cdot e_0 = 0$$

$$(\Gamma^0_{00} e_0 + \Gamma^1_{00} e_1) \cdot e_0 = 0$$

Desarrollemos el producto 'extraparéntesis':

$$\Gamma^0_{00} e_0 \cdot e_0 + \Gamma^1_{00} e_1 \cdot e_0 = 0$$

$$\Gamma^0_{00}\,(-x^2) + \Gamma^1_{00}(0) = 0$$

$$\Gamma^0_{00}\,(-x^2) = 0$$

Como sabemos que x no siempre va a ser cero, entonces, necesariamente, hay algo que siempre debe ser cero, es decir:

$$\Gamma^0_{00} = 0$$

Y ya tenemos el primer Símbolo de Christoffel.

Procedamos ahora con la misma expresión, pero derivada por el espacio (x):

$$\partial_1(e_0 \cdot e_0) = \partial_1(-x^2)$$

$$\partial_1 e_0 \cdot e_0 + e_0 \cdot \partial_1 e_0 = \partial_1(-x^2)$$

$$2(\partial_1 e_0) \cdot e_0 = -2x$$

$$(\partial_1 e_0) \cdot e_0 = -x$$

$$(\Gamma^0_{10} e_0 + \Gamma^1_{10} e_1) \cdot e_0 = -x$$

$$\Gamma^0_{10} e_0 \cdot e_0 + \Gamma^1_{10} e_1 \cdot e_0 = -x$$

$$\Gamma^0_{10}(-x^2) + \Gamma^1_{10}(0) = -x$$

$$\Gamma^0_{10}(-x^2) = -x$$

$$\Gamma^0_{10} = \frac{-x}{-x^2} = \frac{1}{x}$$

$$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{1}{x}$$

Procedamos ahora con la expresión que involucra a g_{11}. Veamos el cambio ante el recorrdio de la coordenada temporal, es decir, derivemos por el tiempo:

$$\partial_0(e_1 \cdot e_1) = \partial_0(1)$$

$$\partial_0(e_1 \cdot e_1) = 0$$

$$\partial_0 e_1 \cdot e_1 + e_1 \cdot \partial_0 e_1 = 0$$

$$2(\partial_0 e_1) \cdot e_1 = 0$$

$$(\partial_0 e_1) \cdot e_1 = 0$$

$$(\Gamma^0_{01} e_0 + \Gamma^1_{01} e_1) \cdot e_1 = 0$$

$$\Gamma^0_{01} e_0 e_1 + \Gamma^1_{01} e_1 e_1 = 0$$

$$\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = 0$$

Derivemos ahora respecto del espacio:

$$\partial_1(e_1 \cdot e_1) = \partial_1(1)$$

$$\partial_1(e_1 \cdot e_1) = 0$$

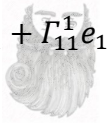
$$\partial_1 e_1 \cdot e_1 + e_1 \cdot \partial_1 e_1 = 0$$

$$2(\partial_1 e_1) \cdot e_1 = 0$$

$$(\partial_1 e_1) \cdot e_1 = 0$$

$$(\Gamma^0_{11} e_0 + \Gamma^1_{11} e_1) \cdot e_1 = 0$$

$$\Gamma^0_{11} e_0 e_1 + \Gamma^1_{11} e_1 e_1 = 0$$



$$\Gamma^1_{11} = 0$$

Procedamos ahora con el término g_{10}. Derivemos respecto al tiempo:

$$\partial_0(e_0 \cdot e_1) = \partial_0(0)$$

$$\partial_0(e_0 \cdot e_1) = 0$$

$$\partial_0 e_0 \cdot e_1 + e_0 \cdot \partial_0 e_1 = 0$$

$$(\Gamma^0_{00} e_0 + \Gamma^1_{00} e_1) \cdot e_1 + e_0 \cdot (\Gamma^0_{01} e_0 + \Gamma^1_{01} e_1) = 0$$

$$\Gamma^0_{00} e_0 e_1 + \Gamma^1_{00} e_1 e_1 + \Gamma^0_{01} e_0 e_0 + \Gamma^1_{01} e_1 e_0 = 0$$

Sólo sobrevive:

$$\Gamma^1_{00} e_1 e_1 + \Gamma^0_{01} e_0 e_0 = 0$$

$$\Gamma^1_{00}(1) + \Gamma^0_{01} e_0 e_0 = 0$$

$$\Gamma^1_{00} + \left(\frac{1}{x} \cdot (-x^2)\right) = 0$$

$$\Gamma^1_{00} - x = 0$$

$$\Gamma^1_{00} = x$$

Derivemos ahora respecto al espacio:

$$\partial_1(e_0 \cdot e_1) = \partial_1(0)$$

$$\partial_1(e_0 \cdot e_1) = 0$$

$$\partial_1 e_0 \cdot e_1 + e_0 \cdot \partial_1 e_1 = 0$$

$$(\Gamma^0_{10} e_0 + \Gamma^1_{10} e_1) \cdot e_1 + e_0 \cdot (\Gamma^0_{11} e_0 + \Gamma^1_{11} e_1) = 0$$

$$\Gamma^0_{10} e_0 e_1 + \Gamma^1_{10} e_1 e_1 + \Gamma^0_{11} e_0 e_0 + \Gamma^1_{11} e_1 e_0 = 0$$

Sólo sobrevive:

$$\Gamma^1_{10}(1) + \Gamma^0_{11}(-x^2) = 0$$

$$(0)(1) + \Gamma^0_{11}(-x^2) = 0$$

$$\Gamma^0_{11}(-x^2) = 0$$

Como sabemos que x no es siempre igual a cero, necesariamente:

$$\Gamma^0_{11} = 0$$

Y creo que ya tendríamos todos los datos de la Conexión Métrica:

$$\Gamma^0_{00} = 0 \;//\; \boldsymbol{\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{1}{x}} \;//\; \Gamma^0_{11} = 0 \;\; // \;\; \boldsymbol{\Gamma^1_{00} = x} \;// \Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = 0 \;//\; \Gamma^1_{11} = 0$$

Y ahora que tenemos todos los Símbolos de Christoffel, calculemos el tensor de Riemann para ver si se trata de un espacio curvo o no (en realidad ya sabemos que no lo es, pero

pedagógicamente es interesante comprobarlo). Recordemos que, para calcular el tensor de Riemann, decíamos que[266]:

$$A^{\mu}(\partial_{\alpha}\partial_{\beta} - \partial_{\beta}\partial_{\alpha})e_{\mu} = R^{\sigma}_{\gamma\alpha\beta}A^{\gamma}e_{\sigma}$$

Podríamos simplificar esta fórmula. Para ello imaginemos que A^{μ} es uno y pudiéramos eliminarlo, es decir, que estuviéramos ante un sistema de coordenadas calibrado para que $A^{\mu} = 1$. Entonces, podríamos decir que:

$$(\partial_{\alpha}\partial_{\beta} - \partial_{\beta}\partial_{\alpha})e_{\mu} = R^{\sigma}_{\gamma\alpha\beta}A^{\gamma}e_{\sigma}$$

Ahora, si 'alineamos' el constructo para que el índice, ahora libre, e_{μ} sea e_{γ}, entonces podríamos eliminar A^{γ} de manera que, finalmente:

$$(\partial_{\alpha}\partial_{\beta} - \partial_{\beta}\partial_{\alpha})e_{\gamma} = R^{\sigma}_{\gamma\alpha\beta}e_{\sigma}$$

Es decir, que mediante la aplicación de un 'simple' operador a una base obtenemos el Tensor de Riemann. Probemos si esto que decimos es cierto.

$$¿\,(\partial_{\alpha}\partial_{\beta} - \partial_{\beta}\partial_{\alpha})e_{\gamma} = R^{\sigma}_{\gamma\alpha\beta}e_{\sigma}?$$

Apliquemos el operador a la base (recordemos que lo 'metemos de dentro hacia fuera', derivamos en orden derecha-izquierda):

$$(\partial_{\alpha}\partial_{\beta} - \partial_{\beta}\partial_{\alpha})e_{\gamma} =$$

$$= \partial_{\alpha}(\partial_{\beta}e_{\gamma}) - \partial_{\beta}(\partial_{\alpha}e_{\gamma})$$

Sabemos que la derivada de un vector (en este caso base) es otro vector que debe venir expresado según una base(conocida o desconocida). Así:

$$= \partial_{\alpha}(\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}e_{\sigma}) - \partial_{\beta}(\Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma}e_{\tau})$$

Ahora estamos ante la derivada de un producto:

$$= (\partial_{\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma})e_{\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}(\partial_{\alpha}e_{\sigma}) - [(\partial_{\beta}\Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma})e_{\tau} + \Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma}(\partial_{\beta}e_{\tau})]$$

Desarrollemos las derivadas de los vectores como combinación lineal de otros vectores base:

$$= (\partial_{\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma})e_{\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}(\Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma}e_{\mu}) - [(\partial_{\beta}\Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma})e_{\tau} + \Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma}\partial_{\beta}(\partial_{\beta}e_{\tau})]$$

$$= (\partial_{\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma})e_{\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}(\Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma}e_{\mu}) - \left[(\partial_{\beta}\Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma})e_{\tau} + \Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma}\left(\Gamma^{\rho}_{\beta\tau}e_{\rho}\right)\right]$$

$$= (\partial_{\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma})e_{\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}\Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma}e_{\mu} - (\partial_{\beta}\Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma})e_{\tau} - \Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\rho}_{\beta\tau}e_{\rho}$$

Ahora, unifiquemos índices libres. Vamos a usar e_{σ} como referencia para, finalmente, extraerlo como factor común. Así:

$$\mu \leftrightarrow \sigma \quad // \quad \tau \leftrightarrow \sigma \quad // \quad \rho \leftrightarrow \sigma$$

$$= (\partial_{\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma})e_{\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu}e_{\sigma} - (\partial_{\beta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma})e_{\sigma} - \Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\tau}e_{\sigma}$$

[266] Decir dónde.

Sacamos factor común:;

$$= \left[\left(\partial_\alpha \Gamma^\sigma_{\beta\gamma} \right) - \left(\partial_\beta \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} \right) + \Gamma^\mu_{\beta\gamma} \Gamma^\sigma_{\alpha\mu} - \Gamma^\tau_{\alpha\gamma} \Gamma^\sigma_{\beta\tau} \right] e_\sigma$$

Que es, justamente, la definición del Tensor de Riemann. Es decir que:

$$\left(\partial_\alpha \partial_\beta - \partial_\beta \partial_\alpha \right) e_\gamma = R^\sigma_{\gamma\alpha\beta} e_\sigma$$

Q.E.D.

Por lo tanto, usemos esta fórmula abreviada para calcular el tensor de Riemann y ver si estamos ante un espacio plano $R^\sigma_{\gamma\alpha\beta} e_\sigma = 0$ o curvo $R^\sigma_{\gamma\alpha\beta} e_\sigma \neq 0$.

Procedamos (se supone que es impepinable que beta y alfa sean diferentes, espacio de dos dimensiones…, pero yo no lo tengo del todo claro que no haya que explorar la combinación alpha igual a beta en cero):

- $\alpha = 0 \ , \ \beta = 1 \ , \ \gamma = 0$

$$\left(\partial_\alpha \partial_\beta - \partial_\beta \partial_\alpha \right) e_\gamma$$

$$(\partial_0 \partial_1 - \partial_1 \partial_0) e_0 =$$

$$= \partial_0 (\partial_1 e_0) - \partial_1 (\partial_0 e_0)$$

$$= \partial_0 (\Gamma^0_{10} e_0 + \Gamma^1_{10} e_1) - \partial_1 (\Gamma^0_{00} e_0 + \Gamma^1_{00} e_1)$$

Como ya conocemos los valores de los Símbolos de Christoffel para este espacio, podemos empezar a sustituir:

$$= \partial_0 \left(\left(\frac{1}{x} \right) e_0 + (0) e_1 \right) - \partial_1 \left((0) e_0 + (x) e_1 \right)$$

$$= \partial_0 \left(\frac{1}{x} e_0 \right) - \partial_1 \left((x) e_1 \right)$$

Desarrollamos la derivada del producto:

$$= \left(\partial_0 \frac{1}{x} \right) e_0 + \frac{1}{x} (\partial_0 e_0) - [(\partial_1 x) e_1 + x (\partial_1 e_1)]$$

La derivada parcial de x respecto del tiempo es cero (pues x funciona como constante):

$$= (0) e_0 + \frac{1}{x} (\partial_0 e_0) - [(\partial_1 x) e_1 + x (\partial_1 e_1)]$$

Desarrollamos las derivaciones que nos quedan:

$$= (0) e_0 + \frac{1}{x} (\Gamma^0_{00} e_0 + \Gamma^1_{00} e_1) - [(\partial_1 x) e_1 + x (\Gamma^0_{11} e_0 + \Gamma^1_{11} e_1)]$$

Sustituimos los Símbolos de Christoffel:

$$= \frac{1}{x} \left((0) e_0 + (x) e_1 \right) - \left[(\partial_1 x) e_1 + x \left((0) e_0 + (0) e_1 \right) \right]$$

$$= \frac{1}{x} (x \, e_1) - (\partial_1 x) e_1$$

En el segundo término de nuestra ecuación: la derivada de x respecto del espacio (de x):

$$= \frac{1}{x}(x\ e_1) - (1)e_1$$
$$= \frac{x}{x}\ e_1 - (1)e_1$$
$$= (1)e_1 - (1)e_1 = 0$$

$$(\partial_0\partial_1 - \partial_1\partial_0)e_0 = R^{\sigma}_{001}e_{\sigma} \rightarrow \begin{cases} R^0_{001}e_0 \rightarrow R^0_{001} = 0 \\ R^1_{001}e_1 \rightarrow R^1_{001} = 0 \end{cases} \rightarrow R^{\sigma}_{001} = 0$$

De momento el espacio parece plano.

Revisemos la siguiente combinación:

- $\alpha = 0\ ,\ \beta = 1\ ,\ \gamma = 1$

$$(\partial_\alpha\partial_\beta - \partial_\beta\partial_\alpha)e_\gamma$$
$$(\partial_0\partial_1 - \partial_1\partial_0)e_1 =$$
$$= \partial_0(\partial_1 e_1) - \partial_1(\partial_0 e_1)$$
$$= \partial_0(\Gamma^0_{11}e_0 + \Gamma^1_{11}e_1) - \partial_1(\Gamma^0_{01}e_0 + \Gamma^1_{01}e_1)$$

Sustituyamos los Símbolos de Christoffel:

$$= \partial_0\big((0)e_0 + (0)e_1\big) - \partial_1\left(\left(\frac{1}{x}\right)e_0 + (0)e_1\right)$$
$$= -\partial_1\left(\frac{1}{x}e_0\right)$$

Es la derivada de un producto:

$$= -\left[\left(\partial_1\frac{1}{x}\right)e_0 + \frac{1}{x}(\partial_1 e_0)\right]$$

$$= -\left[\left(\partial_1\frac{1}{x}\right)e_0 + \frac{1}{x}(\Gamma^0_{10}e_0 + \Gamma^1_{10}e_1)\right]$$

Sustituimos Christoffel:

$$= -\left[\left(\partial_1\frac{1}{x}\right)e_0 + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}e_0 + (0)e_1\right)\right]$$

Hacemos la derivada que hay en el término izquierdo (derivada, respecto de x, de x^{-1}):

$$= -\left[\frac{1}{x^2}e_0 + \frac{1}{x^2}e_0\right]$$

$$= \frac{1}{x^2} e_0 - \frac{1}{x^2} e_0 = 0$$

$$(\partial_0 \partial_1 - \partial_1 \partial_0) e_1 = R^{\sigma}_{101} e_{\sigma} \rightarrow \begin{cases} R^0_{101} e_0 \rightarrow R^0_{101} = 0 \\ R^1_{101} e_1 \rightarrow R^1_{101} = 0 \end{cases} \rightarrow R^{\sigma}_{101} = 0$$

Luego podemos decir que el espacio es plano pues el Tensor de Riemann es igual a cero o, lo que es lo mismo, no está afectado por un campo gravitatorio. Recordemos que estamos ante un elemento de línea diferente al propio de un espacio de Minkowski. Un elemento de línea que pertenece a un plano que convierte movimientos acelerados en MRU, es decir, que muestra las curvas de aceleración como cuadri-trayectorias rectas y que, además, es un espacio plano. Es un espacio de Rindler, ciertamente, con aceleraciones incluidas pero, al ser plano, como decimos, no afectado por efectos gravitatorios.

Exploremos ahora, mediante el estudio de los Vectores de Killing, las simetrías del espacio. Ya sabemos que son y ahora vamos a ver, precisamente, que es eso de las simetrías a las que hacíamos referencia. En definitiva no es otra cosa que identificar las líneas del plano (ct, x) en los que la métrica es siempre la misma, invariante, totalmente fija. ***De hecho, no sólo marcarán las trayectorias en las que métrica es constante sino también magnitudes como la Energía o el Momento Angular.***

Un vector de Killing[267], al ser un vector, debe poder expresarse como una determinada combinación lineal de los vectores de una base. Así, en nuestro caso de un espacio bidimensional temporal y uniespacial (ct, x):

$$\underline{\xi} = \xi^0 e_0 + \xi^1 e_1$$

Sabemos que tenemos dos definiciones para los vectores de Killing:

- La derivada de Lie, con respecto a ese vector (ξ), de la métrica debe ser igual a cero:

$$\mathcal{L}_{\xi} g = 0$$

- La suma de las Derivadas Covariantes[268] de las componentes del vector debe ser cero:

$$\nabla_{\alpha} \xi_{\beta} + \nabla_{\beta} \xi_{\alpha} = 0$$

Sabemos que estamos en un espacio con una base e_0, e_1 por lo que los valores entre los que oscilarán α y β serán 0 y 1. Calculemos las ecuaciones de los Vectores de Killing. Empecemos a desarrollar combinaciones posibles de los valores α y β.

- $\alpha = \beta = 0$

$$\nabla_0 \xi_0 + \nabla_0 \xi_0 = 0$$

[267] Letra xi: ξ.

[268] Recordemos: la derivada de un vector en un sistema de coordenadas en el que la base es cambiante. Recordemos que en casos en que la componente es covariante (índice abajo) la Derivada Covariante se resolvía según esta forma:

$$\nabla_{\alpha} A_{\beta} = \partial_{\alpha} A_{\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} A_{\gamma}$$

$$2\nabla_0\xi_0 = 0$$

$$\nabla_0\xi_0 = 0$$

Es decir:

$$\partial_0\xi_0 - [\Gamma^0_{00}\xi_0 + \Gamma^1_{00}\xi_1] = 0$$

$$\partial_0\xi_0 - \Gamma^0_{00}\xi_0 - \Gamma^1_{00}\xi_1 = 0$$

Como ya conocemos los Símbolos de Christoffel, sustituimos:

$$\partial_0\xi_0 - (0)\xi_0 - (x)\xi_1 = 0$$

$$\partial_0\xi_0 - x\xi_1 = 0$$

Que es la primera ecuación de nuestro sistema de ecuaciones para los V. Killing.

- $\alpha = 0, \beta = 1$

$$\nabla_0\xi_1 + \nabla_1\xi_0 = 0$$

$$\partial_0\xi_1 - [\Gamma^0_{01}\xi_0 + \Gamma^1_{01}\xi_1] + \partial_1\xi_0 - [\Gamma^0_{10}\xi_0 + \Gamma^1_{10}\xi_1] = 0$$

$$\partial_0\xi_1 - \Gamma^0_{01}\xi_0 - \Gamma^1_{01}\xi_1 + \partial_1\xi_0 - \Gamma^0_{10}\xi_0 - \Gamma^1_{10}\xi_1 = 0$$

Sustituimos los Símbolos de Christoffel:

$$\partial_0\xi_1 - \left(\frac{1}{x}\right)\xi_0 - (0)\xi_1 + \partial_1\xi_0 - \left(\frac{1}{x}\right)\xi_0 - (0)\xi_1 = 0$$

$$\partial_0\xi_1 + \partial_1\xi_0 - \left(\frac{2}{x}\right)\xi_0 = 0$$

Que es la segunda ecuación de nuestro sistema de ecuaciones para los V. Killing.

A simple vista (hagámoslo mentalmente) se observa que sale exactamente la misma ecuación para el caso en que $\alpha = 1, \beta = 0$. Por ello, no es necesario desarrollarlo pues llegamos a lo mismo.

- $\alpha = 1, \beta = 1$

$$\nabla_1\xi_1 + \nabla_1\xi_1 = 0$$

$$2\nabla_1\xi_1 = 0$$

$$\nabla_1\xi_1 = 0$$

$$\partial_1\xi_1 - [\Gamma^0_{11}\xi_0 + \Gamma^1_{11}\xi_1] = 0$$

$$\partial_1\xi_1 - \Gamma^0_{11}\xi_0 - \Gamma^1_{11}\xi_1 = 0$$

Sustituimos los Símbolos de Christoffel:

$$\partial_1\xi_1 - (0)\xi_0 - (0)\xi_1 = 0$$

$$\partial_1\xi_1 = 0$$

Que es la tercera ecuación de nuestro sistema de ecuaciones para los V. Killing.

Estamos, entonces, ante un sistema de tres ecuaciones diferenciales con tres incógnitas:

$$\partial_0\xi_0 - x\xi_1 = 0$$

$$\partial_0\xi_1 + \partial_1\xi_0 - \frac{2}{x}\xi_0 = 0$$

$$\partial_1\xi_1 = 0$$

Los vectores de Killing suelen tener soluciones fáciles en prácticamente todos los escenarios (¡hasta en agujeros negros!). Las cosas deben ser muy, muy, muy raras para que la solución sea complicada. De hecho, por ejemplo, en nuestro caso, como sabemos que la métrica de nuestro espacio de Rindler es:

$$g = \begin{pmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

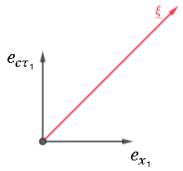
Es obvio que, en este caso, los Vectores de Killing sólo podrán tener un valor fijo para valores inmóviles de x, es decir, que discurran, en un diagrama relativista (ct, x), a lo largo de líneas perfectamente verticales, en las que el valor de x sea fijo.Y puesto que en dicho sistema de representación todo vector debe ser una combinación lineal de e_0, e_1[269] y, como estamos diciendo, al menos una de las soluciones debe ir en una vertical, podemos afirmar que existe un vector temporal de Killing con componente puramente temporal. De todas formas, no nos anticipemos y procedamos poco a poco.

El número máximo de Vectores de Killing para un espacio n-dimensional está definido por:

$$\text{V. K. Max} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(2+1)}{2} = 3$$

Recordemos: número máximo… ¿Cuántos hay en este espacio de Rindler? Veámoslo.

Para ello pensemos en un Vector de Killing expresado según la base del espacio de Rindler (para distinguirlo de el de Minkowski usaremos $e_{c\tau_1}, e_{x_1}$ para base de espacio de Rindler y e_{ct}, e_x para la base del espacio de Minkowski)[270]. Por ejemplo:



[269] Recordemos que el tiempo en Rindler, e_0, no es el tiempo "externo" sino $e_{c\tau_1}$. Es decir, las coordenadas no son las ct, x 'externas', sino las particulares de un sistema comóvil junto a la primera partícula: $e_{c\tau_1}, e_{x_1}$.

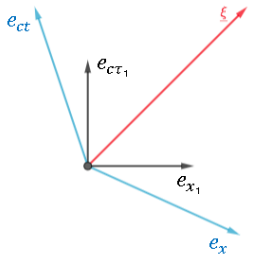
[270] Recordemos también la expresión para calcular los elementos de línea de cada tipo de espacio:

- Minkowski: $ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 \rightarrow e_{ct}, e_x$
- Rindler: $ds^2 = -x^2c^2dt^2 + dx^2 \rightarrow e_{c\tau_1}, e_{x_1}$

Podríamos expresarlo como:

$$\underline{\xi} = \xi^{c\tau_1}\, e_{c\tau_1} + \xi^{x_1}\, e_{x_1}$$

Pero también podríamos expresarlo en la base (también ortogonal) del espacio "externo" que podemos imaginar como un acetato a una *altura* diferente del espacio de Rindler:



El mismo vector (de carácter tensorial, invariante) podríamos expresarlo según la otra base de Minkowski:

$$\underline{\xi} = \xi^{ct}\, e_{ct} + \xi^{x}\, e_x$$

El modo más simple es resolverlo en este sistema de Referencia 'externo' y después hacer el cambio de base.

Así, como, ciertamente, el espacio de Minkowski es plano, con métrica: $g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la base vectorial no cambia según nos movamos a lo largo de las coordenadas del espacio y, como además sabemos que los Símbolos de Christoffel dependen de derivadas de la métrica, podemos afirmar que la conexión es cero. Y siendo esto así, puesto que todos los Símbolos de Christoffel son cero, necesariamente en este caso la Derivada Covariante y la Derivada Parcial 'normal y corriente' son exactamente lo mismo:

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0 \quad \leftrightarrow \quad \partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha = 0$$

Entonces, en este caso, podemos definir las ecuaciones de Killing como:

$$\partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha = 0$$

Que, desarrollando todas las combinaciones (0,1) posibles nos arroja las siguientes ecuaciones de Killing:

$$\partial_0 \xi_0 = 0$$

$$\partial_1 \xi_1 = 0$$

$$\partial_0 \xi_1 + \partial_1 \xi_0 = 0 \quad [271]$$

[271] La combinación $\partial_1 \xi_0 + \partial_0 \xi_1 = 0$ es la misma, ¿verdad?

Analicemos la primera: $\partial_0 \xi_0 = 0$. Esto es: la derivada respecto del tiempo de la función ξ_0[272], que puede estar en función del tiempo y del espacio, al ser igual a cero, nos está diciendo que, de manera efectiva, ξ_0 sólo puede estar en función de espacio en el mejor de los casos. Digamos que es algo así como $\xi_0(x)$.

Por otro lado, respecto al operador ∂_0, como en el caso de $\partial_0 \xi_0$, es la derivada respecto del tiempo y como el tiempo lo estamos definiendo como ct, necesariamente estaremos ante un operador del tipo (en azul):

$$\partial_0 \xi_0 \rightarrow \frac{\partial \xi_0}{\partial x^0} \rightarrow \frac{\partial \xi_0}{\partial ct} \rightarrow \frac{1}{c}\frac{\partial \xi_0}{\partial t}$$

Análogamente, del caso de $\partial_1 \xi_1 = 0$, podemos concluir que, en todo caso, estamos ante una función del tiempo $\xi_1(t)$.

Si ahora nos fijamos en la tercera ecuación y sustituimos los operadores (ojo especialmente al ∂_0) y las funciones con la información que hemos deducido:

$$\partial_0 \xi_1 + \partial_1 \xi_0 = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \xi_1(t)}{\partial t} + \partial_1 \xi_0(x) = 0$$

En esta expresión vemos que:

- En el término izquierdo hay una función del tiempo derivada por el tiempo. Es decir, que el resultado será o una constante (si el tiempo está 'elevado a un solo grado) o una función del tiempo.
- En el término derecho sucede lo mismo pero con el espacio.

Es decir, estamos ante una suma de dos variables (en realidad resta) que nos da como resultado cero. Por supuesto, estas variables pueden "moverse", tener valores cambiantes independientes una de otra y, claro, no siempre daría cero. Necesitamos, sin embargo que siempre de cero $\forall t, x$. En dicho sentido, para que se cumpla la igualdad, en todos los casos, $\forall t, x$, necesitamos que ambos términos sean constantes y con signo invertido, es decir:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \xi_1(t)}{\partial t} + \partial_1 \xi_0(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad K + (-K) = 0$$

Exploremos este escenario y tratemos de resolver las ecuaciones diferenciales (usaremos D_α para indicar las nuevas constantes de integración):

$$\partial_1 \xi_0(x) = -K \rightarrow \xi_0(x) = -Kx + D_2$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \xi_1(t)}{\partial t} = K \rightarrow \frac{\partial \xi_1(t)}{\partial t} = cK \rightarrow \xi_1(t) = cKt + D_1$$

Es decir que:

$$\xi_0 = -Kx + D_0$$

$$\xi_1 = cKt + D_1$$

[272] Ciertamente, esta componente puede ser una función.

Si nos fijamos vemos que hay tres constantes:

$$K, D_0, D_1$$

Es decir, que tendremos tres Killings (=el número de constantes arbitrarias que tengamos). Esto es obvio si nos fijamos en que, necesariamente, se debe cumplir que siendo un cuadrivector de Killing una combinación lineal determinada:

$$\underline{\xi} = \xi_0 e^0 + \xi_1 e^1$$

Según nuestro caso:

$$\underline{\xi} = (-Kx + D_0)e^0 + (cKt + D_1)e^1$$

Convirtamos esta base a su base natural (con índice abajo). Recordemos que ahora estamos en un espacio de Minkowski con métrica:

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow g^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1} \end{pmatrix}$$

Y recordemos también que la conversión de bases la definíamos como[273]:

$$e^0 = g^{00} e_0 \rightarrow -\frac{1}{1} e_0$$

$$e^1 = g^{11} e_1 \rightarrow \frac{1}{1} e_1$$

Es decir que podemos reescribir:

$$\underline{\xi} = (-Kx + D_0)e^0 + (cKt + D_1)e^1$$

Como:

$$\underline{\xi} = (Kx - D_0)e_0 + (cKt + D_1)e_1$$

$$\underline{\xi} = Kxe_0 - D_0 e_0 + cKte_1 + D_1 e_1$$

$$\underline{\xi} = Kxe_0 + cKte_1 - D_0 e_0 + D_1 e_1$$

$$\underline{\xi} = K(xe_0 + cte_1) - D_0 e_0 + D_1 e_1$$

Si, para facilitar un poco las cosas, renombramos las constantes como:

$$K = A$$

$$D_1 = B$$

$$-D_0 = C$$

[273] Decir dónde.

Vemos que podemos expresar el vector e Killing como una combinación lineal de tres *vectores base Killing*:

$$\underline{\xi} = C(xe_0 + cte_1) + Be_1 + Ae_0$$

Donde los vectores de la base serían:

$$\underline{\xi}^{base_c} = e_0$$

$$\underline{\xi}^{base_b} = e_1$$

$$\underline{\xi}^{base_a} = xe_0 + cte_1$$

Que son los Killings de un espacio de Minkowski 1+1 (una temporal y una espacial). Es la base que definen las 'líneas' de simetría, de conservación,… la trayectorias en los que la métrica es invariante.

¿Cómo serían en un espacio más raro como el de Rindler? Sencillamente haciendo un cambio de base. Recordemos de momento el elemento de línea de Rindler:

$$ds^2 \equiv -{x_1}^2 c^2 {d\tau_1}^2 + {dx_1}^2$$

Y que la base de dicho espacio se definía como[274]:

$$e_{\tau_1} = x_1(\cosh c\tau_1\, e_0 + \sinh c\tau_1\, e_1)$$

$$e_{x_1} = \cosh c\tau_1\, e_1 + \sinh c\tau_1\, e_0$$

Despejemos de aquí tanto e_0 como e_1 (sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas)[275]:

$$e_\tau = x(c\, e_0 + s\, e_1)$$

$$e_x = c\, e_1 + s\, e_0$$

$$e_x = c\, e_1 + s\, e_0 \rightarrow e_0 = \frac{e_x - c\, e_1}{s}$$

$$e_\tau = x(c\, e_0 + s\, e_1) \rightarrow e_\tau = x\left(c\left(\frac{e_x - c\, e_1}{s}\right) + s\, e_1\right)$$

$$e_\tau = x\left(\frac{c\, e_x - c^2\, e_1}{s} + s\, e_1\right) \rightarrow x\left(\frac{c\, e_x - c^2\, e_1 + s^2\, e_1}{s}\right)$$

[274] Decir dónde.

[275] Para ahorrar espacio y hacerlo más inteligible, vamos a seguir la siguiente nomenclatura:

$$e_{\tau_1} = x_1(\cosh c\tau_1\, e_0 + \sinh c\tau_1\, e_1) \leftrightarrow e_\tau = x(c\, e_0 + s\, e_1)$$

$$e_{x_1} = \cosh c\tau_1\, e_1 + \sinh c\tau_1\, e_0 \leftrightarrow e_x = c\, e_1 + s\, e_0$$

$$\frac{se_\tau}{x} = c\,e_x - c^2\,e_1 + s^2\,e_1$$

$$\frac{1}{x}se_\tau - c\,e_x = -c^2\,e_1 + s^2\,e_1$$

$$\frac{1}{x}se_\tau - c\,e_x = (-c^2\ + s^2)e_1 \quad [276]$$

$$\frac{1}{x}s\,e_\tau - c\,e_x = -\,e_1$$

$$e_1 = -\frac{1}{x_1}sinh\,c\tau_1\ e_{\tau_1} + cosh\,c\tau_1\ e_{x_1}$$

Y ya tenemos la definición de la primera base. Ahora procedamos con la segunda. Recordemos que teníamos:

$$e_0 = \frac{e_x - c\,e_1}{s}$$

$$e_0 = \frac{e_x - c\left(-\frac{1}{x}s\,e_\tau + c\,e_x\right)}{s}$$

$$e_0 = \left[e_x + \frac{cse_\tau}{x} - c^2\,e_x\right]\frac{1}{s}$$

$$e_0 = \frac{e_x}{s} + \frac{ce_\tau}{x} - \frac{c^2e_x}{s}$$

$$e_0 = \frac{e_x}{s} - \frac{c^2e_x}{s} + \frac{ce_\tau}{x}$$

$$e_0 = \frac{(1-c^2)}{s}e_x + \frac{c}{x}e_\tau \quad [277]$$

$$e_0 = \frac{-s^2}{s}e_x + \frac{c}{x}e_\tau$$

$$e_0 = -s\,e_x + \frac{c}{x}e_\tau$$

$$e_0 = \frac{1}{x_1}cosh\,c\tau_1 e_{\tau_1} - sinh\,c\tau_1\ e_{x_1}$$

Que sería la otra base. Es decir que la base 'natural' de nuestro espacio de Rindler sería:

---

[276] Recordemos que:

$$cosh^2\,x - sinh^2 x = 1$$

Luego:

$$-cosh^2\,x + sinh^2 x = -1$$

[277] Si:

$$cosh^2\,x - sinh^2 x = 1$$

Entonces:

$$-sinh^2 x = 1 - cosh^2\,x$$

$$e_0 = \frac{1}{x_1} cosh\, c\tau_1 e_{\tau_1} - sinh\, c\tau_1\ e_{x_1}$$

$$e_1 = -\frac{1}{x_1} sinh\, c\tau_1\ e_{\tau_1} + cosh\, c\tau_1\ e_{x_1}$$

Y ahora podremos despejar los tres vectores de Killing que habíamos encontrado para la base del espacio de Rindler:

$$\underline{\xi}^c = \frac{1}{x_1} cosh\, c\tau_1 e_{\tau_1} - sinh\, c\tau_1\ e_{x_1}$$

$$\underline{\xi}^b = \frac{-1}{x_1} sinh\, c\tau_1\ e_{\tau_1} + cosh\, c\tau_1\ e_{x_1}$$

$$\underline{\xi}^a = x\left(\frac{1}{x_1} cosh\, c\tau_1 e_{\tau_1} - sinh\, c\tau_1\ e_{x_1}\right) + ct\left(\frac{-1}{x_1} sinh\, c\tau_1\ e_{\tau_1} + cosh\, c\tau_1\ e_{x_1}\right)$$

$$\underline{\xi}^a = \frac{x}{x_1} cosh\, c\tau_1 e_{\tau_1} - x\, sinh\, c\tau_1\ e_{x_1} - \frac{ct}{x_1} sinh\, c\tau_1\ e_{\tau_1} + ct\, cosh\, c\tau_1\ e_{x_1}$$

Agrupamos por factores comunes (las bases):

$$\underline{\xi}^a = \left(\frac{x}{x_1} coshc\tau_1 - \frac{ct}{x_1} sinh\, c\tau_1\right) e_{\tau_1} + (ct\, cosh\, c\tau_1 - x\, sinh\, c\tau_1)\ e_{x_1}$$

Y ahora recordemos que decíamos que[278]:

$$ct = x_1\, sinh\, c\tau_1$$

$$x = x_1\, cosh\, c\tau_1$$

Si sustituimos:

$$\underline{\xi}^a = \left(\frac{x_1\, cosh\, c\tau_1}{x_1} coshc\tau_1 - \frac{x_1\, sinh\, c\tau_1}{x_1} sinh\, c\tau_1\right) e_{\tau_1} + ((x_1\, sinh\, c\tau_1)\, cosh\, c\tau_1 - (x_1\, cosh\, c\tau_1)\, sinh\, c\tau_1)\ e_{x_1}$$

$$\underline{\xi}^a = (cosh^2 c\tau_1 - sinh^2\, c\tau_1) e_{\tau_1} + (0)\ e_{x_1}$$

$$\underline{\xi}^a = (1) e_{\tau_1} + (0)\ e_{x_1}$$

$$\underline{\xi}^a = e_{\tau_1}$$

Y ya tendríamos nuestros tres vectores de Killing para el espacio de Rindler expresados como combinación lineal de la base (e_{τ_1}, e_{x_1}):

$$\underline{\xi}^c = \frac{1}{x_1} cosh\, c\tau_1 e_{\tau_1} - sinh\, c\tau_1\ e_{x_1}$$

$$\underline{\xi}^b = \frac{-1}{x_1} sinh\, c\tau_1\ e_{\tau_1} + cosh\, c\tau_1\ e_{x_1}$$

[278] Decir dónde. Recordemos que era el cambio de coordenadas entre Sistemas de Referencia Minkowski-Rindler.

$$\underline{\xi}^a = e_{\tau_1}$$

Aunque podemos estar seguros de que el cálculo es correcto, verifiquemos que las componentes de nuestros vectores cumplen, en todos los casos, el Sistema de Ecuaciones Diferenciales que teníamos:

$$\partial_0 \xi_0 - x_1 \xi_1 = 0$$

$$\partial_0 \xi_1 + \partial_1 \xi_0 - \frac{2}{x_1} \xi_0 = 0$$

$$\partial_1 \xi_1 = 0$$

Para poder hacer esta comprobación tendríamos que tener los índices de las componentes de los vectores de Killing que hemos obtenido como subíndices (abajo), pues hasta el momento los tenemos arriba:

$$\underline{\xi}^c = \frac{1}{x_1} cosh\, c\tau_1 e_{\tau_1} - sinh\, c\tau_1 \;\; e_{x_1} \rightarrow \xi^{\tau_1} e_{\tau_1} + \xi^{x_1} e_{x_1} \rightarrow \xi^0 e_0 + \xi^1 e_1$$

$$\underline{\xi}^b = \frac{-1}{x_1} sinh\, c\tau_1 \;\; e_{\tau_1} + cosh\, c\tau_1 \;\; e_{x_1} \rightarrow \xi^0 e_0 + \xi^1 e_1$$

$$\underline{\xi}^a = e_{\tau_1} \rightarrow \xi^0 e_0 + \xi^1 e_1$$

Es decir, tenemos tres vectores, con componentes diferentes (pues son tres vectores diferentes), que deben cumplir (cada uno por su lado) con las condiciones que hemos establecido en nuestro Sistema de Ecuaciones Diferenciales para que realmente sean verdaderos Vectores de Killing.

Entonces, como decíamos, para realizar las comprobaciones en nuestro S.E.D. tendremos que bajar índices mediante un método ya conocido y muy simple[279]:

$$\xi^\alpha = g^{\alpha\alpha} \xi_\alpha \rightarrow \xi_\alpha = \frac{\xi^\alpha}{g^{\alpha\alpha}}$$

Y como conocemos tanto la métrica como su inversa:

$$g = \begin{pmatrix} -{x_1}^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad // \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-{x_1}^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos calcular siempre las componentes de nuestros vectores con índice bajado.

Comencemos con el ***primer vector de Killing*** y veamos que cumple nuestro S.E.D.

$$\underline{\xi}^c = \frac{1}{x_1} cosh\, c\tau_1 e_{\tau_1} - sinh\, c\tau_1 \;\; e_{x_1} \rightarrow \xi^0 e_0 + \xi^1 e_1$$

$$\xi^0 = \frac{1}{x_1} cosh\, c\tau_1 \quad // \quad \xi^1 = -\, sinh\, c\tau_1$$

[279] Decir dónde.

$$\xi_0 = \frac{\xi^0}{g^{00}} \rightarrow \frac{\frac{1}{x_1}\cosh c\tau_1}{1/_{-x_1{}^2}} \rightarrow (-x_1{}^2)\frac{1}{x_1}\cosh c\tau_1 \quad // \quad \xi_1 = \frac{\xi^1}{g^{11}} \rightarrow \frac{-\sinh c\tau_1}{1} = -\sinh c\tau_1$$

Luego nuestro vector expresado de manera covariante sería:

$$\underline{\xi^c} = -x_1 \cosh c\tau_1 \, e^{\tau_1} - \sinh c\tau_1 \; e^{x_1} \rightarrow \xi_0 e^0 + \xi_1 e^1$$

$$\xi_0 = -x_1 \cosh c\tau_1$$

$$\xi_1 = -\sinh c\tau_1$$

Veamos ahora si las componentes de nuestro primer Killing cumplen el S.E.D.

- Primera Ecuación Diferencial:

$$\partial_0\xi_0 - x_1\xi_1 = 0$$

$$\partial_0\xi_0 = x_1\xi_1$$

$$\partial_0(-x_1 \cosh c\tau_1) = x_1(-\sinh c\tau_1)$$

$$\left[\left(\partial_0(-x_1)\right)\cdot \cosh c\tau_1 + (-x_1)\partial_0 \cosh c\tau_1\right] \,^{280} = -x_1 \sinh c\tau_1$$

$$[(0)\cdot \cosh c\tau_1 + (-x_1)\sinh c\tau_1] = -x_1 \sinh c\tau_1$$

$$-x_1 \sinh c\tau_1 = -x_1 \sinh c\tau_1$$

Es decir, que nuestro vector $\underline{\xi^c}$ la cumple.

- Segunda Ecuación diferencial:

$$\partial_0\xi_1 + \partial_1\xi_0 - \frac{2}{x_1}\xi_0 = 0$$

$$\partial_0(-\sinh c\tau_1) + \partial_1(-x_1 \cosh c\tau_1) - \frac{2(-x_1 \cosh c\tau_1)}{x_1} = 0$$

$$-\cosh c\tau_1 + \left(\partial_1(-x_1)\right)\cosh c\tau_1 + (-x_1)(\partial_1 \cosh c\tau_1) - \frac{2(-x_1 \cosh c\tau_1)}{x_1} = 0$$

$$-\cosh c\tau_1 + (-1)\cosh c\tau_1 + (-x_1)(0) \,^{281} - 2(-\cosh c\tau_1) = 0$$

$$-2\cosh c\tau_1 + 2\cosh c\tau_1 = 0$$

También se cumple.

- Tercera Ecuación Diferencial:

$$\partial_1\xi_1 = 0$$

$$\partial_1(-\sinh c\tau_1) \,^{282} = 0$$

También la cumple.

---

[280] Es la derivada de un producto. Derivamos respecto del tiempo → ∂_0

[281] La derivada, respecto del espacio, de algo que está exclusivamente en función del tiempo es, naturalmente, cero.

[282] Derivamos respecto al espacio una función del tiempo, es decir, algo que hace de constante para el espacio, luego la derivada es cero.

Comprobemos nuestro ***segundo vector de Killing***:

$$\underline{\xi}^b = \frac{-1}{x_1} sinh\, c\tau_1 \;\; e_{\tau_1} + cosh\, c\tau_1 \;\; e_{x_1} \rightarrow \xi^0 e_0 + \xi^1 e_1$$

$$\xi^0 = \frac{-1}{x_1} sinh\, c\tau_1 \quad // \quad \xi^1 = cosh\, c\tau_1$$

Bajemos índices de las componentes:

$$\xi_0 = \frac{\xi^0}{g^{00}} \rightarrow \frac{\frac{-1}{x_1} sinh\, c\tau_1}{1/_{-x_1{}^2}} \rightarrow (-x_1{}^2)\frac{-1}{x_1} sinh\, c\tau_1 \quad // \quad \xi_1 = \frac{\xi^1}{g^{11}} \rightarrow \frac{cosh\, c\tau_1}{1} = cosh\, c\tau_1$$

Verifiquemos ahora en nuestro S.E.D.

- Primera Ecuación Diferencial:

$$\partial_0 \xi_0 - x_1 \xi_1 = 0$$

$$\partial_0 \xi_0 = x_1 \xi_1$$

$$\partial_0 (x_1\, sinh\, c\tau_1) = x_1 (cosh\, c\tau_1)$$

$$\left[\left(\partial_0 (x_1)\right) \cdot sinh\, c\tau_1 + (x_1)\partial_0\, sinh\, c\tau_1 \right] = x_1\, cosh\, c\tau_1$$

$$\left[(0) \cdot sinh\, c\tau_1 + (x_1)\, cosh\, c\tau_1 \right] = x_1\, cosh\, c\tau_1$$

$$x_1\, cosh\, c\tau_1 = x_1\, cosh\, c\tau_1$$

Es decir, que nuestro vector $\underline{\xi}^b$ la cumple.

- Segunda Ecuación diferencial:

$$\partial_0 \xi_1 + \partial_1 \xi_0 - \frac{2}{x_1} \xi_0 = 0$$

$$\partial_0 (cosh\, c\tau_1) + \partial_1 (x_1\, sinh\, c\tau_1) - \frac{2(x_1\, sinh\, c\tau_1)}{x_1} = 0$$

$$sinh\, c\tau_1 + \left(\partial_1 (x_1)\right) sinh\, c\tau_1 + (x_1)(\partial_1\, cosh\, c\tau_1) - \frac{2(x_1\, sinh\, c\tau_1)}{x_1} = 0$$

$$sinh\, c\tau_1 + (1)\, sinh\, c\tau_1 + (x_1)(0) - 2\, sinh\, c\tau_1 = 0$$

$$2\, sinh\, c\tau_1 - 2\, sinh\, c\tau_1 = 0$$

$$0 = 0$$

También la cumple.

- Tercera Ecuación Diferencial:

$$\partial_1 \xi_1 = 0$$

$$\partial_1 (cosh\, c\tau_1) = 0$$

También la cumple.

Comprobemos nuestro ***tercer vector de Killing***:

$$\underline{\xi}^a = e_{\tau_1}$$

$$\xi^0 = 1 \quad // \quad \xi^1 = 0$$

Bajemos índices de las componentes:

$$\xi_0 = \frac{\xi^0}{g^{00}} \rightarrow \frac{1}{1/_{-x_1{}^2}} \rightarrow (-x_1{}^2) \cdot 1 \quad // \quad \xi_1 = \frac{\xi^1}{g^{11}} \rightarrow \frac{0}{1} = 0$$

Verifiquemos ahora en nuestro S.E.D.

- Primera Ecuación Diferencial:

$$\partial_0 \xi_0 - x_1 \xi_1 = 0$$

$$\partial_0 \xi_0 = x_1 \xi_1$$

$$\partial_0 (-x_1{}^2) = x_1 (0)$$

$$0 = x_1 \cdot (0)$$

$$0 = 0$$

Es decir, que nuestro vector $\underline{\xi}^c$ la cumple.

- Segunda Ecuación diferencial:

$$\partial_0 \xi_1 + \partial_1 \xi_0 - \frac{2}{x_1} \xi_0 = 0$$

$$\partial_0 (0) + \partial_1 (-x_1{}^2) - \frac{2(-x_1{}^2)}{x_1} = 0$$

$$(0) - 2x_1 - (-2(x_1)) = 0$$

$$(0) - 2x_1 + 2x_1 = 0$$

$$0 = 0$$

También la cumple.

- Tercera Ecuación Diferencial:

$$\partial_1 \xi_1 = 0$$

$$\partial_1 (0) = 0$$

$$0 = 0$$

También la cumple.

Es decir, que los vectores de Killing que habíamos calculado, efectivamente, son vectores de Killings. Recordemos que estábamos calculando los vectores de Killing de un espacio de Rindler de dos dimensiones. ¿Cuáles son los vectores de Killing máximos que puede haber en un espacio de n dimensiones?

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Es decir, que en nuestro caso:

$$\frac{n(n+1)}{2} \rightarrow \frac{2(2+1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Y como efectivamente, existen tres vectores de Killing, es decir, los máximos posibles para ese espacio, podremos decir que es ***Máximamente Simétrico*** (en breve veremos exactamente qué implicaciones tiene esto de la simetría).

Ciertamente, podríamos haber calculado los vectores de Killing, sencillamente, resolviendo el Sistema de Ecuaciones Diferenciales que teníamos al inicio pero haciéndolo como lo hemos hecho hemos aprovechado para afianzar conceptos y, por qué no, divertirnos con los procesos de cálculo.

Calculemos ahora los vectores de Killing de otros espacios comunes:

- $\mathbb{R}^2$
- $\mathbb{R}^3$
- Minkowski (1+3 dimensiones)
- Rindler (1+3 dimensiones)

-2.7-

Más vectores de Killing

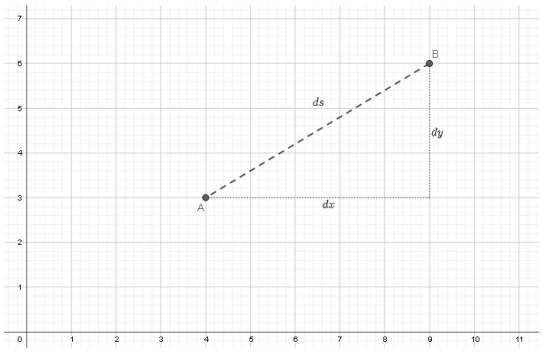
$\mathcal{S}$

Para garantizar que comprendemos bien el sentido físico, y su relación con la conservación de magnitudes, de los vectores de Killing vamos a calcularlos para varios espacios de común uso: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, Minkoswi (1+3), Rindler (1+3).

Comencemos por el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$. Para ello recordemos cómo se define, en el mismo, el elemento de línea:

$$ds^2 \equiv (dx)^2 + (dy)^2 \quad ^{283}$$

Esto, implica que las distancias se calculan mediante la aplicación del Teorema de Pitágoras:



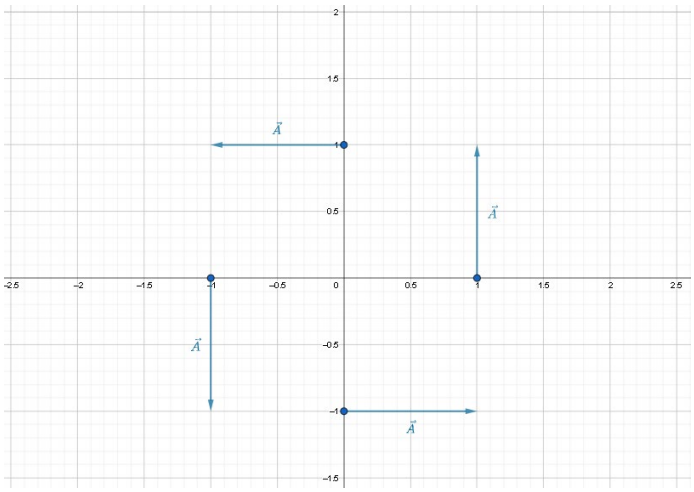
Imaginemos ahora, en ese espacio, un campo vectorial. Por ejemplo:

$$\vec{A} = -y\, e_x + x\, e_y$$

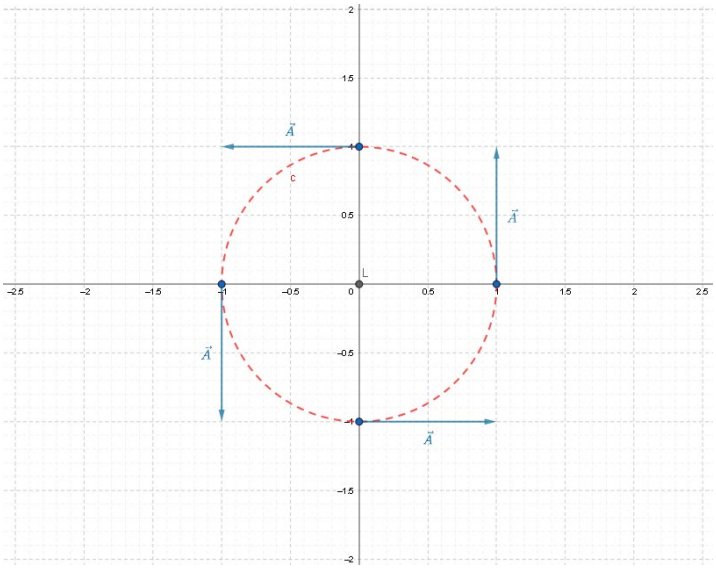
A continuación, pensemos en qué representación tendrán los vectores de este campo en los puntos (1,0) , (0,1) , (-1,0) , (0,-1). Es obvio que el vector $\vec{A}$ (vectores) que genera este campo tiene una representación gráfica como la siguiente:

[283] Que implica una métrica de tipo unidad:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



A nada que nos fijemos parece que encontramos un patrón de flujo (Flow) que conecta a los vectores generados por el campo[284].



Verifiquemos que, efectivamente, en el caso del campo propuesto, el flow se trata de una circunferencia. Posteriormente estudiaremos el comportamiento de los puntos ante un desplazamiento diferencial sobre la trayectoria de dicha circunferencia (si es que lo es). Afiancemos nuestra hipótesis de flow circular.

Como parece que los vectores generados por el campo son tangentes a la trayectoria dibujada, podríamos pensar que éstos son una especie de "velocidad". Siendo así, podríamos parametrizar la curva mediante un parámetro λ y expresar el campo vectorial del siguiente modo:

$$\vec{A} = -y\, e_x + x\, e_y \rightarrow \frac{dx}{d\lambda}\, e_x + \frac{dy}{d\lambda}\, e_y \quad ^{285}$$

[284] Si cogiéramos otros puntos diferentes, obtendríamos una circunferencia menor, o desplazada, … En este caso, si cogemos cualquier punto del plano por el que pasa el flow, obtendríamos un vector tangente a la trayectoria.

[285] Efectivamente, no nos confundamos. A la base e_x le acompaña la componente x (aunque ésta esté en función de y) y viceversa.

Donde, en nuestro caso:

$$\frac{dx}{d\lambda} = -y$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = x$$

Con una mera observación preliminar observamos que en $\frac{dx}{d\lambda} = -y$ parece que cuando derivamos x saltamos a 'una dimensión diferente' y con el signo cambiado. Esto nos recuerda mucho a las funciones trigonométricas. Lancemos, por esta pista que tenemos, la hipótesis según la cual x sea:

$$x = a\cos\lambda + b\sin\lambda$$ [286]

En tal caso estaríamos diciendo que:

$$\frac{dx}{d\lambda} = -y \rightarrow \frac{d(a\cos\lambda + b\sin\lambda)}{d\lambda} = -y$$

Esto es:

$$-a\sin\lambda + b\cos\lambda = -y \rightarrow y = a\sin\lambda - b\cos\lambda$$

Si esto es correcto, justamente, por la propia definición de nuestro campo, al hacer la derivada, respecto de lambda, de y, deberíamos volver a x:

$$\frac{dy}{d\lambda} = x \rightarrow \frac{d(a\sin\lambda - b\cos\lambda)}{d\lambda} = x$$

Y, efectivamente, así es:

$$\frac{d(a\sin\lambda - b\cos\lambda)}{d\lambda} = a\cos\lambda + b\sin\lambda = x$$

Luego, estas funciones satisfacen la condiciones de nuestro campo vectorial:

$$x_{(\lambda)} = a\cos\lambda + b\sin\lambda$$

$$y_{(\lambda)} = a\sin\lambda - b\cos\lambda$$

¿Dibujan estas funciones una circunferencia? Miremos a ver. Elevémoslas al cuadrado y sumémoslas:

$$(x_{(\lambda)})^2 = a^2\cos^2\lambda + b^2\sin^2\lambda + 2\,a\,b\cos\lambda\sin\lambda$$
$$(y_{(\lambda)})^2 = a^2\sin^2\lambda + b^2\cos^2\lambda - 2\,a\,b\sin\lambda\cos\lambda$$
$$+_____$$
$$(x_{(\lambda)})^2 + (y_{(\lambda)})^2 = a^2\cos^2\lambda + a^2\sin^2\lambda + b^2\sin^2\lambda + b^2\cos^2\lambda$$

Esto es:

---

[286] a y b son constantes independientes de lambda pues desconocemos el radio de la circunferencia hipotética. Estamos hablando en términos absolutamente genéricos.

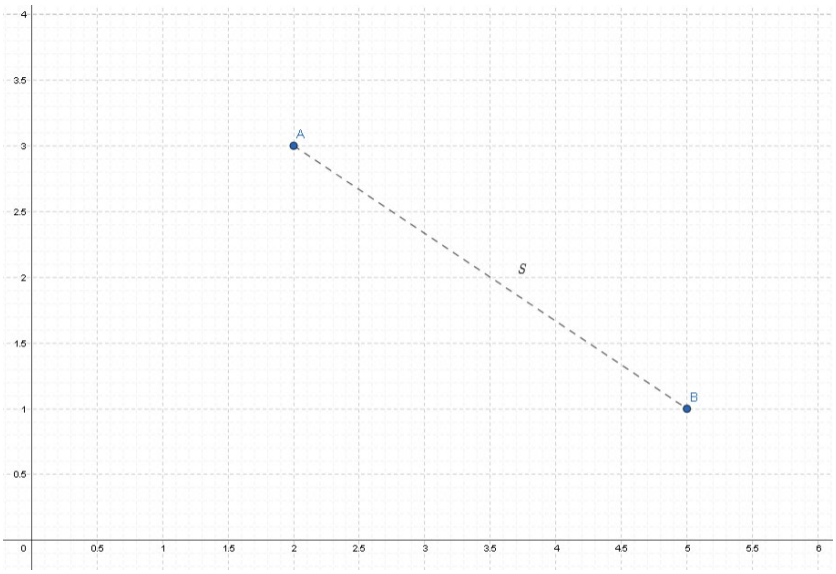
$$(x_{(\lambda)})^2 + (y_{(\lambda)})^2 = a^2(cos^2\,\lambda + sin^2\,\lambda) + b^2(sin^2\,\lambda + cos^2\,\lambda)$$

$$\left(x_{(\lambda)}\right)^2 + \left(y_{(\lambda)}\right)^2 = a^2 + b^2$$

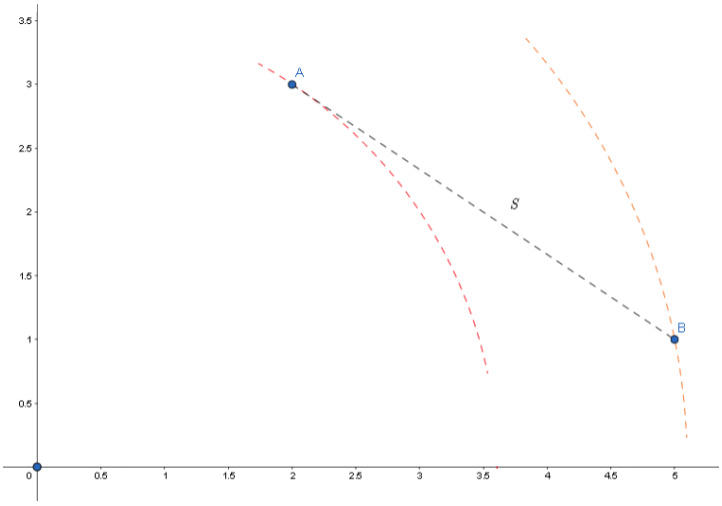
Es decir, una circunferencia de radio R:

$$a^2 + b^2 = R^2 \rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ahora, una vez afianzado nuestro flow circular, procedamos a estudiar los movimientos diferenciales a lo largo del mismo. Para ello imaginemos dos puntos A, B cualesquiera separados por una distancia S, también, cualquiera, por ejemplo:



Cada uno de estos puntos estará en su propio Flow definido por el campo vectorial para cada uno de ellos. Es decir, algo así:



Y la pregunta interesante es ¿se conservará la distancia S entre ambos puntos (partículas) cuando se desplacen una misma cantidad diferencial ε a lo largo de su Flow?

Es decir, si la distancia S es:

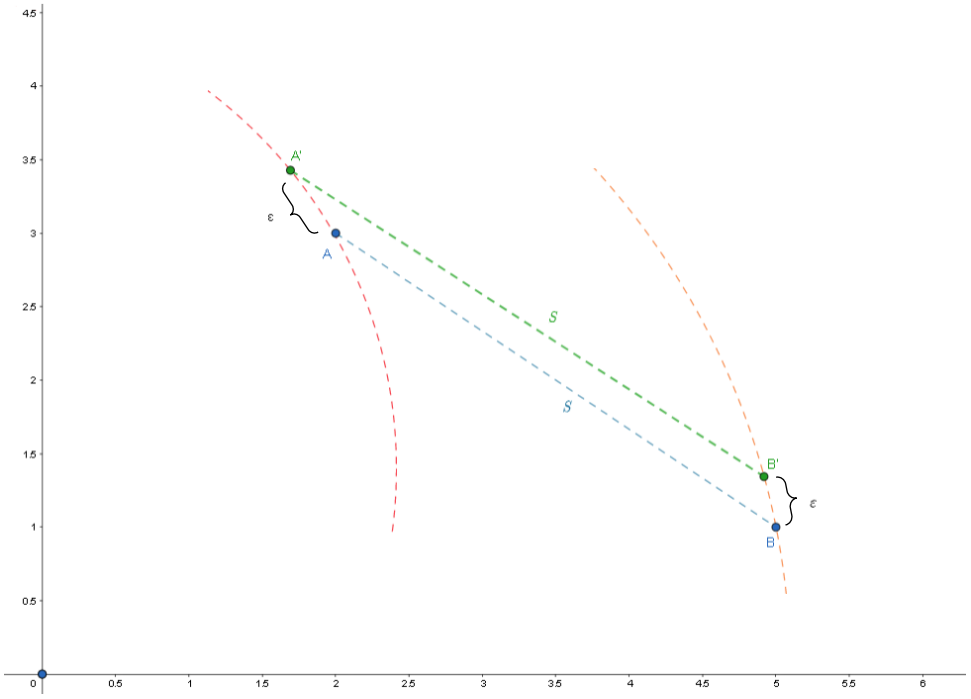
$$x = x_B - x_A = 5 - 2 = 3$$

$$y = y_B - y_A = 1 - 3 = -2$$

Y por Pitágoras sabemos que:

$$s^2 = 3^2 + (-2)^2 \rightarrow s = \sqrt{13}$$

Cuando nos desplacemos una cierta cantidad ε, ¿seguirá siendo la distancia en los puntos desplazados = $\sqrt{13}$?



Estudiemos la conservación de la distancia.

Para ello, como tenemos las funciones genéricas del Flow, busquemos el flow concreto por el que se desplaza cada punto.

Empecemos por el ***Punto A***.

Flow genérico:

$$x = a\,cos\,\lambda + b\,sin\,\lambda$$

$$y = a\,sin\,\lambda - b\,cos\,\lambda$$

Hallemos el flow concreto por el que discurre el punto A. Supongamos que λ empieza a contar, justamente en el $Punto\ A\ (2,3) \rightarrow \lambda = 0$.

$$2 = a\,cos\,0 + b\,sin\,0 \rightarrow 2 = a$$

$$3 = a\,sin\,0 - b\,cos\,0 \rightarrow -3 = b$$

Luego, como ya tenemos las constes arbitrarias, las expresiones del Flow concreto por el que discurre el Punto A es:

$$x = 2\,cos\,\lambda - 3\,sin\,\lambda$$

$$y = 2\,sin\,\lambda + 3\,cos\,\lambda$$

Análogamente, el Flow por el que discurre el $Punto\ B\ (5,1) \rightarrow \lambda = 0$ [287]:

$$5 = a\,cos\,0 + b\,sin\,0 \rightarrow 5 = a$$

$$1 = a\,sin\,0 - b\,cos\,0 \rightarrow -1 = b$$

Luego las expresiones para el Flow por el que discurre el Punto B son:

$$x = 5\,cos\,\lambda - 1\,sin\,\lambda$$

$$y = 5\,sin\,\lambda + 1\,cos\,\lambda$$

Teniendo ya los dos Flows concretos, calculemos la distancia genérica entre los puntos de ambos flows:

$$[x^A - x^B]^2 + [y^A - y^B]^2 = s^2$$

$$[(2\,cos\,\lambda - 3\,sin\,\lambda) - (5\,cos\,\lambda - 1\,sin\,\lambda)]^2 + [(2\,sin\,\lambda + 3\,cos\,\lambda) - (5\,sin\,\lambda + 1\,cos\,\lambda)]^2 = s^2$$

$$[-3\,cos\,\lambda - 2\,sin\,\lambda]^2 + [-3\,sin\,\lambda + 2\,cos\,\lambda]^2 = s^2$$

$$[9\,cos^2\lambda + 4\,sin^2\lambda + 6\,cos\,\lambda\,sin\,\lambda] + [9\,sin^2\lambda + 4\,cos^2\lambda - 6\,sin\,\lambda\,cos\,\lambda] = s^2$$

$$9\,cos^2\lambda + 4\,sin^2\lambda + 9\,sin^2\lambda + 4\,cos^2\lambda = s^2$$

$$13\,cos^2\lambda + 13\,sin^2\lambda = s^2$$

$$13(\,cos^2\lambda + \,sin^2\lambda) = s^2$$

$$13(\,1) = s^2$$

$$s = \sqrt{13}$$

Es decir, que $\forall\lambda$, la distancia s entre los puntos, es una magnitud que se conserva.

Ahora, para estudiar un pequeño desplazamiento diferencial[288], tomemos prestado, de lo que hemos hecho, una expresión genérica de nuestros flows:

$$x = 2\,cos\,\lambda - 3\,sin\,\lambda \quad // \quad x = 5\,cos\,\lambda - 1\,sin\,\lambda$$

$$y = 2\,sin\,\lambda + 3\,cos\,\lambda \quad // \quad y = 5\,sin\,\lambda + 1\,cos\,\lambda$$

Es decir, esto es pura convención, consideremos las constantes de antes como puntos iniciales. Algo así como:

$$x = x_0\,cos\,\lambda - y_0\,sin\,\lambda \rightarrow x_{(\lambda)} = x\,cos\,\lambda - y\,sin\,\lambda$$

$$y = x_0\,sin\,\lambda + y_0\,cos\,\lambda \rightarrow y_{(\lambda)} = x\,sin\,\lambda + y\,cos\,\lambda$$

[287] En este Flow, lambda es cero en el Punto B inicial.

[288] Puesto que en este caso, la distancia finita macroscópica es la mera suma de distancias diferenciales en un entorno homogéneo, podremos hacer una extensión de lo local, diferencial, a la distancia macroscópica.

Dicho esto, empecemos a acumular movimientos diferenciales ε. Si a λ inicial, igual a cero, le añadimos un desplazamiento infinitesimal ε, tendríamos que:

$$\lambda = 0 + \varepsilon \rightarrow \lambda = \varepsilon$$

Y puesto que estamos en magnitudes diferenciales donde: $\varepsilon^2 \cong 0$, podemos afirmar, a simple vista, que[289]:

$$cos\ \varepsilon \cong 1$$

$$sin\ \varepsilon \cong \varepsilon$$

De manera que nuestra expresión podría quedar aún más genérica (tanto para el microcosmos como el macrocosmos)[290] como:

$$x_{(\lambda)} = x\ cos\ \lambda - y\ sin\ \lambda \rightarrow x_{(\varepsilon)} = x - y\ \varepsilon$$

$$y_{(\lambda)} = x\ sin\ \lambda + y\ cos\ \lambda \rightarrow y_{(\varepsilon)} = x\ \varepsilon + y$$

Y si recordamos cuál era la definición de nuestro campo vectorial:

$$\vec{A} = -y\ e_x + x\ e_y \rightarrow \vec{A} = A^x\ e_x + A^y\ e_y$$

Donde:

$$A^x = -y$$

$$A^y = x$$

De manera que, ciertamente, podremos establecer nuestra expresión con un carácter, esta vez definitivamente, genérico como[291]:

$$x_{(\varepsilon)} = x + \varepsilon\ A^x$$

$$y_{(\varepsilon)} = y + \varepsilon\ A^y$$

O lo que es lo mismo:

$$x^{\alpha}_{(\varepsilon)} = x^{\alpha} + \varepsilon\ A^{\alpha}$$

---

[289] Demostrar por Taylor.

[290] Véase nota 288.

[291] Efectivamente, nos serviría para cualquier campo. Por ejemplo, para estudiar un desplazamiento infinitesimal en un campo definido como:

$$\vec{B} = (2x^3 + y^2)\ e_x + (3xy^2)\ e_y$$

Tan sólo tendríamos que hacer:

$$x_{(\varepsilon)} = x + \varepsilon\ B^x \rightarrow x + \varepsilon\ (2x^3 + y^2)$$

$$y_{(\varepsilon)} = y + \varepsilon\ B^y \rightarrow y + \varepsilon\ (3xy^2)$$

Así, una vez alcanzada esta expresión tan simplificada, estudiemos el desplazamiento de los puntos a través de su Flow.

Olvidemos ahora los dos puntos separados por una distancia finita e imaginemos ahora que estamos ante dos puntos que están separados por una distancia infinitesimalmente pequeña. Cada uno, claro está, define su Flow. ¿Cómo mediríamos la distancia entre los dos puntos A y B? Obviamente:

$$ds^2 \equiv (dx)^2 + (dy)^2$$

Donde:

- dx viene marcado por la diferencia entre las coordenadas x de ambos puntos: $x - x$
- dy viene marcado por la diferencia entre las coordenadas x de ambos puntos: $y - y$

Ahora calculemos la nueva ubicación de los puntos desplazándonos un diferencial ε en el Flow de cada uno de ellos.

Para el Punto A será:

$$x_{(\varepsilon)} = x + \varepsilon\, A^x$$

$$y_{(\varepsilon)} = y + \varepsilon\, A^y$$

Para el Punto B será:

$$x_{(\varepsilon)} = x + \varepsilon\, A^x$$

$$y_{(\varepsilon)} = y + \varepsilon\, A^y$$

Así, la distancia S entre los dos puntos, una vez recorrida, por ambos puntos, una distancia ε (***la misma***), en sus respectivos flows, será:

$$ds^2 = [(x + \varepsilon\, A^x) - (x + \varepsilon\, A^x)]^2 + [(y + \varepsilon\, A^y) - (y + \varepsilon\, A^y)]^2$$

$$ds^2 = [x + \varepsilon\, A^x - x - \varepsilon\, A^x]^2 + [y + \varepsilon\, A^y - y - \varepsilon\, A^y]^2$$

$$ds^2 = [x - x + \varepsilon\,(A^x - A^x)]^2 + [y - y + \varepsilon(A^y - A^y)]^2$$

Podemos seguir reduciendo nuestra expresión:

- ¿Qué es $(x - x)$ e $(y - y)$? Ciertamente: (dx) y (dy).
- Igualmente, podremos definir las separaciones $(A^x - A^x)$ y $(A^y - A^y)$ como: (dA^x) y (dA^y)

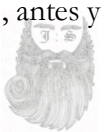
Así, reescribimos nuestra expresión como:

$$ds^2 = [dx + \varepsilon\, dA^x]^2 + [dy + \varepsilon\, dA^y]^2$$

$$ds^2 = \left[dx^2 + \varepsilon^2 dA^{x^2} + 2dx\varepsilon\, dA^x\right] + \left[dy^2 + \varepsilon^2 dA^{y^2} + 2dy\varepsilon\, dA^y\right]$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \varepsilon^2\left(dA^{x^2} + dA^{y^2}\right) + 2\varepsilon(dx\, dA^x + dy\, dA^y)$$

Puesto que las distancias deben ser iguales, antes y después del desplazamiento, en este caso, esta distancia debe ser justamente igual a:



$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Por lo que, para que eso sea así, necesariamente debe darse que:

$$\varepsilon^2\left(dA^{x\,2} + dA^{y\,2}\right) + 2\varepsilon(dx\,dA^x + dy\,dA^y) = 0$$

El primer término es obviamente cero pues, recordemos que estamos ante una distancia infinitesimal tal que podemos afirmar que:

$$\varepsilon^2 \cong 0$$

De manera que:

$$\varepsilon^2\left(dA^{x\,2} + dA^{y\,2}\right) \cong 0$$

Entonces, necesariamente el segundo término debe ser también cero, es decir:

$$2\varepsilon(dx\,dA^x + dy\,dA^y) = 0$$

Y para ello, puesto que ni 2, ni ε, ni dx, ni dy son cero, obligatoriamente debe cumplirse que dA^x y dA^y sean cero y para que esto se cumpla necesitamos, justamente, que el vector $\vec{A}$ en cuestión sea igual a cero, es decir, que sea un vector de Killing[292]:

$$\vec{A} = \vec{\xi}$$

Estudiemos detenidamente un hipotético campo $\vec{A}$[293] y veamos claramente por qué esto es así.

Sabemos que, en un espacio de dos dimensiones espaciales, el campo vectorial debe tener la forma:

$$\vec{A} = A^1 e_1 + A^2 e_2 \quad [294]$$

Donde tanto A^1 como A^2 son (o pueden ser) funciones de x e y. Siendo así, ¿cómo se estudia el cambio de una función multivariable[295]?

$$df_{(x,y)} = \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial x}dx + \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y}dy$$

Luego, en nuestro caso tendríamos que hacer:

$$dA^1 = \frac{\partial A^1}{\partial x}dx + \frac{\partial A^1}{\partial y}dy$$

$$dA^2 = \frac{\partial A^2}{\partial x}dx + \frac{\partial A^2}{\partial y}dy$$

---

[292] Recordar las condiciones de un vector de Killing. Que la derivada bla, bla, bla

[293] Ya no tiene por qué ser el mismo campo con el que empezamos nuestro estudio. Ya estamos ante un caso totalmente genérico.

[294] Retomemos la nomenclatura $A^x = A^1$ y $A^y = A^2$.

[295] Decir dónde hemos hablado de esto.

Así, sabiendo esto, podemos reescribir nuestra expresión:

$$dx\ dA^x + dy\ dA^y = 0$$

Como:

$$dx\left(\frac{\partial A^1}{\partial x}dx + \frac{\partial A^1}{\partial y}dy\right) + dy\left(\frac{\partial A^2}{\partial x}dx + \frac{\partial A^2}{\partial y}dy\right) = 0$$

$$dx\left(\partial_1 A^1 dx + \partial_2 A^1 dy\right) + dy\left(\partial_1 A^2 dx + \partial_2 A^2 dy\right) = 0$$

$$\partial_1 A^1 dx^2 + \partial_2 A^1 dy dx + \partial_1 A^2 dx dy + \partial_2 A^2 dy^2 = 0$$

$$\partial_1 A^1 dx^2 + [\partial_2 A^1 + \partial_1 A^2] dx dy + \partial_2 A^2 dy^2 = 0$$

Y, puesto que sabemos que:

$$dx^2 \neq 0$$
$$dy^2 \neq 0$$
$$dxdy \neq$$

Para que la igualdad se cumpla, necesariamente debe darse que:

$$\partial_1 A^1 = 0$$

$$\partial_2 A^1 + \partial_1 A^2 = 0$$

$$\partial_2 A^2 = 0$$

Y, atención a esta preciosidad: puesto que estamos en un espacio euclídeo de dos dimensiones, con métrica: $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde no tiene sentido la distinción covariante y contravariante (índices arriba o índices abajo) y donde la base no cambia según nos desplacemos en una coordenada de manera que, justamente resulta que nuestra segunda expresión:

$$\partial_2 A^1 + \partial_1 A^2 = 0$$

Puede expresarse como (en este escenario derivada covariante y derivada parcial son lo mismo):

$$\nabla_\alpha A^\beta + \nabla_\beta A^\alpha = 0$$

¡Es decir, estaríamos hablando de un vector que cumple que su ***Derivada de Lie***[296] es igual a cero!

Partiendo, entonces de estas ecuaciones:

---

[296] Recordemos la definición de la Derivada de Lie. Estamos diciendo que la derivada de la métrica, respecto a un vector es cero (que será Killing si el resultado es cero).Es decir, que si "recorremos" un campo vectorial, vemos cómo cambia un vector generado por ese campo, y observamos el cambio que se produce en la métrica al "recorrer" dicho campo vectorial, y observamos que la métrica se mantiene constante , es decir, que no se produce cambio y, por lo tanto, su derivada es cero: $\mathcal{L}_{\vec{A}} g = 0$, entonces podemos afirmar que el vector $\vec{A}$ generado por el campo es un vector de Killing: $\vec{A} = \vec{\xi}$.
En definitiva: si recorremos ese campo vectorial y la métrica no cambia, ese campo es un campo "generador" de vectores de Killing.

$$\partial_1 A^1 = 0$$

$$\partial_2 A^1 + \partial_1 A^2 = 0$$

$$\partial_2 A^2 = 0$$

Partiendo de esto, busquemos los vectores de Killing de un espacio $\mathbb{R}^2$ [297].

$$\partial_1 \xi^1 = 0$$

$$\partial_2 \xi^1 + \partial_1 \xi^2 = 0$$

$$\partial_2 \xi^2 = 0$$

Para empezar, puesto que estamos diciendo que:

$$\partial_1 \xi^1 = 0$$

Necesariamente, en el 'mejor de los casos', ξ^1 sólo puede estar en función de y (o es una constante, claro… pero partimos del hecho de que las componentes pueden ser funciones multivariantes). La viceversa sucedería con $\partial_2 \xi^2 = 0$, de manera que podemos afirmar que, en el mejor de los casos, estaremos ante:

$$\xi^1 \to {\xi^1}_{(y)}$$

$$\xi^2 \to {\xi^2}_{(x)}$$

Si ahora usamos esta información para trabajar sobre la ecuación que nos queda, obtenemos que:

$$\partial_2 \xi^1 + \partial_1 \xi^2 = 0$$

$$\partial_y {\xi^1}_{(y)} + \partial_x {\xi^2}_{(x)} = 0$$

Y para que esto se cumpla ***siempre*** debe darse que:

$$\partial_y {\xi^1}_{(y)} = -\partial_x {\xi^2}_{(x)}$$

Es decir, que para que se cumplan siempre, deben tener valores constantes (siempre) y opuestos, es decir:

$$\partial_y {\xi^1}_{(y)} = K$$

$$\partial_x {\xi^2}_{(x)} = -K$$

Si resolvemos estas simple ecuaciones diferenciales, obtenemos que:

$$\frac{\partial {\xi^1}_{(y)}}{\partial y} = K \to {\xi^1}_{(y)} = K\, y + C_1$$

[297] Como mucho serán $\frac{n(n+1)}{2} \to \frac{2(2+1)}{2} = 3$

$$\frac{\partial \xi^2{}_{(x)}}{\partial x} = -K \rightarrow \xi^2{}_{(x)} = -K\,x + C_2$$

Que si sustituimos nos deja un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (K, C_1, C_2) que nos va a arrojar tres vectores de Killing. Así, teniendo nuestro vector de Killing la siguiente forma:

$$\vec{\xi} = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2$$

- Para $K = 1$ y el resto de constantes igual a cero tenemos un vector de Killing:

$$\vec{\xi} = (K\,y + C_1)\,e_1 + (-K\,x + C_2)\,e_2$$
$$\vec{\xi} = (1\,y + 0)\,e_1 + (-1\,x + 0)\,e_2$$
$$\vec{\xi} = y\ e_1 - x\,e_2$$

- Para $C_1 = 1$ y el resto de constantes igual a cero tenemos un vector de Killing:

$$\vec{\xi} = (K\,y + C_1)\,e_1 + (-K\,x + C_2)\,e_2$$
$$\vec{\xi} = (0\,y + 1)\,e_1 + (-0\,x + 0)\,e_2$$
$$\vec{\xi} = e_1$$

- Para $C_2 = 1$ y el resto de constantes igual a cero tenemos un vector de Killing:

$$\vec{\xi} = (K\,y + C_1)\,e_1 + (-K\,x + C_2)\,e_2$$
$$\vec{\xi} = (0\,y + 0)\,e_1 + (-0\,x + 1)\,e_2$$
$$\vec{\xi} = e_2$$

Es decir, que para $\mathbb{R}^2$, tenemos tres vectores de Killing por lo que es un espacio ***máximamente simétrico***. Pero, además, observemos la naturaleza de los vectores:

$$\vec{\xi} = y\ e_1 - x\,e_2 \rightarrow ROTACIONES$$

$$\vec{\xi} = e_1 \rightarrow TRANSLACIONES\ EN\ x$$

$$\vec{\xi} = e_2 \rightarrow TRANSLACIONES\ EN\ y$$

Es decir, siempre que sometamos un vector, en un espacio $\mathbb{R}^2$, a este tipo de transformaciones, ¡las magnitudes permanecerán invariantes! ***¡Justo para esto sirven los vectores de Killing!***

Veamos rápidamente el espacio $\mathbb{R}^3$. De entrada sabemos que el máximo de vectores que podrá tener es:

$$\frac{n(n+1)}{2} \rightarrow \frac{3(3+1)}{2} = 6$$

Además, sabemos que en este caso los vectores 'se acumulan', es decir, a los tres que teníamos de $\mathbb{R}^2$, hemos de añadirles otros tres producto, sin duda, de la incorporación de una nueva dirección (los incorporamos en rojo). Así, ya tenemos:

$$\vec{\xi} = e_x \rightarrow TRANSLACIONES\ EN\ x$$

$$\vec{\xi} = e_y \rightarrow TRANSLACIONES\ EN\ y$$

$$\vec{\xi} = e_z \rightarrow TRANSLACIONES\ EN\ z$$

$$\vec{\xi} = y\ e_x - x\ e_y \rightarrow ROTACIONES\ en\ torno\ al\ eje\ z\ (en\ el\ plano\ x, y)$$
$$\vec{\xi} = z\ e_y - y\ e_z \rightarrow ROTACIONES\ en\ torno\ al\ eje\ x\ (en\ el\ plano\ y, z)$$
$$\vec{\xi} = z\ e_x - x\ e_z \rightarrow ROTACIONES\ en\ torno\ al\ eje\ y\ (en\ el\ plano\ x, z)$$

Luego, $\mathbb{R}^3$ también es un espacio máximamente simétrico.

Veamos también un espacio de Minkowski (1+3).

Recordemos la métrica contenida en su elemento de línea:

$$ds^2 = -cdt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Hemos marcado en rojo la 'parte espacial' porque, naturalmente, incorpora los vectores de Killing que ya hemos calculado para, efectivamente, $\mathbb{R}^3$. Habrá que añadir una serie de vectores de Killing nuevos a causa de la nueva dimensión temporal que hemos incorporado.

¿Cuántos nos faltan aparte de los 6 Killings de la parte espacial?

$$\frac{n(n+1)}{2} \rightarrow \frac{4(4+1)}{2} = 10 - 6\ (espaciales) = 4$$

Es decir, que nos faltan 4 vectores más.

En los 6 Killings que ya tenemos se abordan transformaciones que nos dejan invariantes magnitudes:

- Rotaciones y Translaciones.

Ahora, con los 4 vectores nuevos, incorporaremos también las transformaciones de Lorentz. Efectivamente, en este caso del espacio de Minkowski, estaremos hablando del Grupo de Pointcaré.

De los cuatro vectores que nos faltan, uno, naturalmente, será la traslación pura y dura en la nueva dimensión añadida (puesto que hay involucrados tiempo y espacio, volvemos a usar la notación vectorial convenida):

$$\underline{\xi} = e_0$$

Y, por pura combinatoria:

$$\underline{\xi} = ¿?\ e_0 - ¿?\ e_1$$

$$\underline{\xi} = x\ e_0 - (-ct)\ e_1 \rightarrow x\ e_0 + ct\ e_1$$

$$\underline{\xi} = y\ e_0 + ct\ e_2$$

$$\underline{\xi} = z\ e_0 + ct\ e_3$$

Y tendríamos los 4 vectores de Killing adicionales que nos llevan a tener los 10 máximos, por lo que el espacio de Minkowski es también un espacio máximamente simétrico[298].

Simetría… Conservación… ¿Sólo de distancias? No.

Veamos ahora, en el siguiente capítulo, qué es eso de la simetría y que implicaciones tiene en las propiedades físicas de un sistema. Vamos a ver que la simetría no sólo implica constancia de la métrica sino, también, constancia de determinadas magnitudes de manera que podremos adentrarnos en la exploración de las leyes de conservación de las distancias, el momento y… la Energía.

[298] Podemos encontrar en los manuales lo mismo pero con el signo cambiado. Ello es debido a que las líneas maestras definidas por los Killings pueden ser recorridas en un sentido u otro.

-2.8-

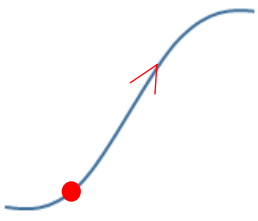
Los vectores de Killing y las magnitudes conservadas

Dirijamos nuestra atención ahora a la realidad física de todo lo que hemos definido hasta el momento en torno a los vectores de Killing.

Para ello, en primer lugar, recopilemos los vectores de Killing de un espacio de Minkowski.

$\vec{\xi} = e_x$	Translación en el eje x
$\vec{\xi} = e_y$	Translación en el eje y
$\vec{\xi} = e_z$	Translación en el eje z
$\underline{\xi} = e_0$	Translación en el eje del tiempo
$\vec{\xi} = y\ e_x - x\ e_y$	Rotación en torno al eje z
$\vec{\xi} = z\ e_y - y\ e_z$	Rotación en torno al eje x
$\vec{\xi} = z\ e_x - x\ e_z$	Rotación en torno al eje y
$\underline{\xi} = x\ e_0 + ct\ e_1$	Boost en eje x
$\underline{\xi} = y\ e_0 + ct\ e_2$	Boost en eje y
$\underline{\xi} = z\ e_0 + ct\ e_3$	Boost en eje z

Supongamos una partícula ubicada en un espacio-tiempo plano que sigue una trayectoria de tipo geodésica. En el espacio plano, naturalmente, sería una recta pero, por motivos pedagógicos, vamos a dibujar una trayectoria aleatoria curva que simula ser una geodésica:



Que está definida por una función $x^{\alpha}_{(\tau)}$. Conocemos la ecuación que define a una geodésica[299]:

[299] Decir dónde.

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0$$

Supongamos que esta partícula tiene una magnitud asociada, supongamos que es la energía (ya la definiremos de manera correcta), con un valor escalar determinado. Si dicha magnitud se mantiene constante a lo largo del recorrido de la geodésica, por parte de la partícula, entonces podremos decir de la energía (o cualquiera que fuera la variable) que es una cantidad conservada. Conocer qué cantidades cumplen esta propiedad nos da muchísima información acerca del comportamiento de las partículas y los propios espacios-tiempos.

Para abordar este estudio y facilitarlo un poco, vamos a tratar de llegar a una definición de las geodésicas por un camino alternativo al que hicimos en su momento.

Recordemos que definíamos el elemento de línea como:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

Efectivamente, ello implica que en un espacio euclídeo de dos dimensiones será:

$$ds^2 = (1)dxdx + (0)dxdy + (0)dydx + (1)dydy$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Por otro lado, en un espacio de Minkowski (1+3) sería:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

En un espacio de este tipo, podríamos definir la cuadrivelocidad como:

$$\underline{u} = \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)e_0 + \left(\frac{dx^1}{d\tau}\right)e_1 + \left(\frac{dx^2}{d\tau}\right)e_2 + \left(\frac{dx^3}{d\tau}\right)e_3$$

Que, de manera genérica, expresamos como:

$$\underline{u} = \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right)e_\alpha = u^\alpha e_\alpha$$

¿Y una aceleración?

$$\underline{a} = \frac{d}{d\tau}\underline{u}$$

Podemos hacer esto porque estamos derivando un cuadrivector en base a un parámetro que es invariante, un escalar, ante cambio de coordenadas: el tiempo propio τ. Es decir, que hacemos esto:

$$\underline{a} = \frac{d}{d\tau}(u^\alpha e_\alpha)$$

Observemos que ahora estamos ante la derivada de un producto: la componente de un cuadrivector y la base a través de la que se desarrolla. Antes, cuando calculamos la cuadrivelocidad, derivamos la trayectoria y 'añadimos' la dirección añadiendo la base. La trayectoria puntual, el espacio, no tenía dirección. Se la incorporamos a la velocidad. Ahora,

al derivar la velocidad, estamos derivando algo ya con dirección por lo que derivamos el producto: la componente y la base.

Como en Minkowski, la base es constante sea donde sea que miremos y, por lo tanto, su derivada es cero, por lo que a menudo no es necesario siquiera mencionarla[300]. Sin embargo, como estamos trabajando para acercarnos a un espacio-tiempo curvo, nosotros vamos a manejarla porque, cuando lleguemos a un espacio con afectación gravitatoria, sí que tendremos que considerarla. Procedamos, pues a buscar la expresión que defina la cuadriaceleración:

$$\frac{d}{d\tau}(u^\alpha e_\alpha) = \left(\frac{d}{d\tau}u^\alpha\right)e_\alpha + u^\alpha\left(\frac{d}{d\tau}e_\alpha\right)$$

Estudiemos más a fondo el elemento que hemos marcado en rojo. Como estamos derivando en base a un parámetro (como lambda, en este caso tau) que puede ser la función de una cierta coordenada x^β, tendremos que aplicar la regla de la cadena, esto es[301] (recuérdese que el orden de derivación es de dentro hacia fuera… derecha-izquierda):

$$\frac{d}{d\tau}e_\alpha = \frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta}$$

Si pensamos sobre esto vemos, además, que tiene todo el sentido del mundo. Téngase en cuenta que estamos estudiando cómo cambia, en este caso, una base $e_\alpha$según se recorre una determinada trayectoria… claro… ¿y cómo se estudia el comportamiento, precisamente, de esa trayectoria? Estudiando los vectores tangentes a cada uno de los puntos que componen dicha trayectoria, es decir, mediante la misma cuadrivelocidad, o lo que es lo mismo, mediante la derivada de una coordenada respecto de tau, es decir:

$$\frac{dx^\beta}{d\tau}$$

Así, nuestro elemento que marcamos en rojo queda como:

$$\left(\frac{d}{d\tau}e_\alpha\right) = \frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta} = u^\beta\frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta}$$

Donde, justamente, lo marcado en verde es la definición de conexión[302]:

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}e_\gamma$$

Si lo unimos todo, qué tenemos:

$$\underline{a} = \frac{d}{d\tau}(u^\alpha e_\alpha) = \left(\frac{d}{d\tau}u^\alpha\right)e_\alpha + u^\alpha\left(\frac{d}{d\tau}e_\alpha\right)$$

---

[300] Obviamente:

$$\frac{d}{d\tau}(u^\alpha e_\alpha) = \left(\frac{d}{d\tau}u^\alpha\right)e_\alpha + u^\alpha\left(\frac{d}{d\tau}e_\alpha\right) = \left(\frac{d}{d\tau}u^\alpha\right)e_\alpha + u^\alpha(0) = \left(\frac{d}{d\tau}u^\alpha\right)e_\alpha$$

[301] Decir dónde lo hemos visto.

[302] Cómo cambia una base según se recorre una coordenada. Decir dónde.

$$\underline{a} = \frac{d}{d\tau}(u^\alpha e_\alpha) = \left(\frac{d}{d\tau}u^\alpha\right)e_\alpha + u^\alpha u^\beta \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma$$

Reordenemos un poco los índices para tratar de sacar e_α como factor común ($\alpha \leftrightarrow \gamma$):

$$\underline{a} = \frac{d}{d\tau}u^\alpha e_\alpha + u^\gamma u^\beta \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} e_\alpha$$

$$\underline{a} = \left(\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} u^\beta u^\gamma\right)e_\alpha$$

Comparemos ahora nuestra expresión de la geodésica con esto que hemos obtenido:

- Geodésica → $\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0$
- Cuadriaceleración → $\left(\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} u^\beta u^\gamma\right)e_\alpha = 0$

Efectivamente, ¡son exactamente lo mismo!

Pero es que, además, en términos energéticos tiene todo el sentido del mundo. Una geodésica es la trayectoria más corta entre dos puntos del espacio-tiempo. Si imponemos que un cuerpo no reciba aceleración ninguna, conservará su estado energético. Usará una "geodésica energética". ***Usará el camino energético más corto: quedarse como estaba***. Si, además, cuando estemos estudiando un espacio sometido a interacción gravitatoria, consideramos que la gravedad no es realmente una fuerza externa sino, sencillamente, una propiedad del espacio (que hace que sea más o menos curvo), podremos estudiar los fenómenos bajo la Relatividad General de una manera muy eficiente. Así, puesto que la formulación de las geodésicas de un espacio es equivalente a la cuadriaceleración igualada a cero $\left(\underline{a} = \frac{d}{d\tau}(\underline{u}) = 0\right)$, podemos decir que cuando imponemos que $a = 0$, estamos minimizando ds^2.

Ahora, lo que postulamos es lo siguiente: el producto escalar de la cuadriaceleración por cualquier vector de Killing, arroja como resultado una cantidad conservada:

$$\underline{u} \cdot \underline{\xi} = CANTIDAD\ CONSERVADA$$

Esto implica que si una partícula recorre una geodésica de un punto a otro, el producto escalar de su cuadriaceleración por un Killing de dicho espacio se mantendrá constante. Es decir, según recorre la trayectoria y, por lo tanto, transcurre el tiempo (el tiempo propio tau) de la partícula, el producto no cambia. Es decir, que si derivamos a expresión postulada por el tiempo propio, debe darnos cero. Veámoslo.

$$\frac{d}{d\tau}\left(\underline{u} \cdot \underline{\xi}\right) = \left(\frac{d}{d\tau}\underline{u}\right) \cdot \underline{\xi} + \underline{u} \cdot \left(\frac{d}{d\tau}\underline{\xi}\right)$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\underline{u} \cdot \underline{\xi}\right) = (\underline{a}) \cdot \underline{\xi} + \underline{u} \cdot \left(\frac{d}{d\tau}\underline{\xi}\right)$$

Como decimos que la partícula se está desplazando a lo largo de una geodésica, es decir, no está siendo afectada por ninguna fuerza externa ya que recorre su "camino natural" "energéticamente y espacialmente más corto", podemos decir que: su cuadriaceleración es igual cero:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\underline{u}\cdot\underline{\xi}\right)=\left(\underline{0}\right)\cdot\underline{\xi}+\underline{u}\cdot\left(\frac{d}{d\tau}\underline{\xi}\right)$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\underline{u}\cdot\underline{\xi}\right)=\underline{u}\cdot\left(\frac{d}{d\tau}\underline{\xi}\right)$$

Ahora, como hemos dicho en la página previa a la anterior, sustituimos la derivada respecto de tau mediante la aplicación de la regla de la cadena:

$$\frac{d}{d\tau}\underline{\xi}=\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{\partial\underline{\xi}}{\partial x^{\alpha}}$$

De manera que nuestra expresión queda como:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\underline{u}\cdot\underline{\xi}\right)=\underline{u}\cdot\left(\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{\partial\underline{\xi}}{\partial x^{\alpha}}\right)$$

Donde resulta que, obviamente:

$$\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}=u^{\alpha}$$

Luego:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\underline{u}\cdot\underline{\xi}\right)=\underline{u}\cdot u^{\alpha}\cdot\frac{\partial\underline{\xi}}{\partial x^{\alpha}}$$

Y si, como también resulta evidente, exponemos que el vector de Killing debe ser una combinación lineal de los vectores de la base (usamos otro índice para la base, naturalmente):

$$\frac{d}{d\tau}\left(\underline{u}\cdot\underline{\xi}\right)=\underline{u}\cdot u^{\alpha}\cdot\partial_{\alpha}\xi^{\beta}e_{\beta}$$

Estamos en un espacio curvo (o al menos que puede serlo) por lo que la derivada debe ser covariante, es decir:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\underline{u}\cdot\underline{\xi}\right)=\underline{u}\cdot u^{\alpha}\cdot\left(\nabla_{\alpha}\xi^{\beta}\right)e_{\beta}$$

Expresemos ahora $\underline{u}$ como una combinación lineal de vecores de una base:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\underline{u}\cdot\underline{\xi}\right)=\left(u^{\gamma}e_{\gamma}\right)\cdot u^{\alpha}\cdot\left(\nabla_{\alpha}\xi^{\beta}\right)e_{\beta}$$

Separemos lo que son componentes de lo que son bases:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\underline{u}\cdot\underline{\xi}\right)=\left[u^{\gamma}\cdot u^{\alpha}\cdot\left(\nabla_{\alpha}\xi^{\beta}\right)\right]\cdot\left(e_{\gamma}\cdot e_{\beta}\right)$$

Donde el cruce de las dos bases no es otra cosa que la métrica, es decir:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\underline{u}\cdot\underline{\xi}\right)=\left[u^{\gamma}\cdot u^{\alpha}\cdot\left(\nabla_{\alpha}\xi^{\beta}\right)\right]\cdot g_{\gamma\beta}$$

Ahora recordemos que la conexión de la que estamos hablando implica que la derivada covariante de la métrica era cero[303]. Ello implica que la métrica puede "salir y entrar" de la derivada covariante a placer[304], luego:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\underline{u}\cdot\underline{\xi}\right)=\left[u^{\gamma}\cdot u^{\alpha}\cdot\left(\nabla_{\alpha}g_{\gamma\beta}\xi^{\beta}\right)\right]$$

Y el término marcado en color rojo, por las propiedades de subida y bajada de índices[305], podemos ponerlo como:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\underline{u}\cdot\underline{\xi}\right)=u^{\gamma}\cdot u^{\alpha}\cdot\left(\nabla_{\alpha}\xi_{\gamma}\right)$$

Necesariamente, tal y como postulamos, debe cumplirse que:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\underline{u}\cdot\underline{\xi}\right)=u^{\gamma}\cdot u^{\alpha}\cdot\left(\nabla_{\alpha}\xi_{\gamma}\right)=0$$

¿Cómo podemos verificar que esto es efectivamente igual a cero? Si nos fijamos, podemos agrupar los términos de nuestra expresión en dos bloques[306]:

---

[303] Decir dónde y por qué…

[304] Si $\nabla g=0$:

$$(\nabla A)g=(\nabla Ag)$$

Obvio, pues:

$$(\nabla Ag)=(\nabla A)g+A(\nabla g)$$
$$(\nabla Ag)=(\nabla A)g+A(0)$$
$$(\nabla Ag)=(\nabla A)g$$

[305] Decir dónde hablamos de esto: $g_{\gamma\beta}\xi^{\beta}=\xi_{\beta}$

[306] Recordemos que un Tensor es simétrico cuando: $T_{\alpha\beta}=T_{\beta\alpha}\ //\ T^{\alpha\beta}=T^{\beta\alpha}$

Recordemos que un Tensor es antisimétrico cuando: $T_{\alpha\beta}=-T_{\beta\alpha}\ //\ T^{\alpha\beta}=-T^{\beta\alpha}$

Las partes simétrica y antisimétrica de un Tensor se pueden comprender de la siguiente forma. Supongamos un tensor cualquiera (ni simétrico ni antisimétrico) como el siguiente:

$$T_{\alpha\beta}$$

Puede expresarse, y es trivialmente obvio a simple vista, como:

$$T_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(T_{\alpha\beta}+T_{\beta\alpha}\right)+\frac{1}{2}\left(T_{\alpha\beta}-T_{\beta\alpha}\right)$$

En esta expresión vamos a distinguir dos partes:

- Parte simétrica (va con el signo + ($T^{\alpha\beta}=T^{\beta\alpha}$): $\left(T_{\alpha\beta}+T_{\beta\alpha}\right)$
- Parte antisimétrica (va con el signo - ($T^{\alpha\beta}=-T^{\beta\alpha}$): $\left(T_{\alpha\beta}-T_{\beta\alpha}\right)$

Supongamos ahora un tensor ***simétrico*** (da igual que sean supraíndices o subíndices, las propiedades son idénticas):

$$S^{\alpha\beta}=S^{\beta\alpha}$$

Si multiplicamos (contraemos) ambos vectores:

$$S^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(S^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}+S^{\alpha\beta}T_{\beta\alpha}\right)+\frac{1}{2}\left(S^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}-S^{\alpha\beta}T_{\beta\alpha}\right)$$

- $u^\gamma \cdot u^\alpha$. Esto son dos componentes, 'dos números' (por decirlo de una manera informal), cuya operación, un producto escalar, es totalmente simétrico. Es decir, lo podemos expresar como un tensor simétrico: $S^{\gamma\alpha}$.

- $(\nabla_\alpha \xi_\gamma)$. Esto es la derivada covariante de un tensor 'random', es decir, otro tensor que, a priori no es ni simétrico ni antisimétrico: $T_{\alpha\gamma}$.

Siendo esto así podremos reescribir nuestra expresión como:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\underline{u}\cdot\underline{\xi}\right) = u^\gamma \cdot u^\alpha \cdot (\nabla_\alpha \xi_\gamma) = S^{\gamma\alpha}T_{\alpha\gamma} = 0$$

Que a tenor de la nota 306 podemos expresar como:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\underline{u}\cdot\underline{\xi}\right) = u^\gamma \cdot u^\alpha \cdot (\nabla_\alpha \xi_\gamma) = S^{\gamma\alpha}T_{\alpha\gamma} \rightarrow$$

$$= \frac{1}{2} S^{\gamma\alpha}(T_{\alpha\gamma} + T_{\gamma\alpha}) = 0$$

Como partimos de la premisa de que $S^{\alpha\beta} = S^{\beta\alpha}$ es un tensor simétrico, podemos escribir como (marcamos en rojo para que se vea):

$$S^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(S^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} + S^{\beta\alpha}T_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2}(S^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} - S^{\beta\alpha}T_{\beta\alpha})$$

Vamos a renombrar índices. Recordemos que cada sumando "cuenta los índices desde el principio, internamente". La clave está en observar como en el término que hemos marcado en rojo, primer índice de S es el mismo primer índice que el de T. Así, en el primer sumando, $S^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$, vamos a sustituir $\alpha \leftrightarrow \mu$ y $\beta \leftrightarrow \rho$, mientras que en el segundo sumando, $S^{\beta\alpha}T_{\beta\alpha}$, vamos a sustituir el primer índice $\beta \leftrightarrow \mu$ y el segundo índice $\alpha \leftrightarrow \rho$:

$$= \frac{1}{2}(S^{\mu\rho}T_{\mu\rho} + S^{\mu\rho}T_{\mu\rho}) + \frac{1}{2}(S^{\mu\rho}T_{\mu\rho} - S^{\mu\rho}T_{\mu\rho})$$

Aquí es obvio que la segunda parte de nuestra expresión se anula:

$$= \frac{1}{2}(S^{\mu\rho}T_{\mu\rho} + S^{\mu\rho}T_{\mu\rho}) + \frac{1}{2}0$$

De manera que lo único que sobrevive es la parte que hemos definido como simétrica:

$$= \frac{1}{2}(S^{\mu\rho}T_{\mu\rho} + S^{\mu\rho}T_{\mu\rho}) = \frac{1}{2}(2\,S^{\mu\rho}T_{\mu\rho}) = S^{\mu\rho}T_{\mu\rho}$$

De esto podemos extraer una ley general. Cuando hacemos una contracción (producto) de dos tensores de los cuales uno es totalmente normal, anodino, y el otro es simétrico, sólo sobrevive la parte simétrica (sucede justo lo inverso cuando multiplicamos por un tensor antisimétrico). Es decir:

- Tensor S simétrico y T un tensor cualquiera ni simétrico ni antisimétrico:

$$S^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}S^{\alpha\beta}(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha})$$

- Tensor A antisimétrico y T un tensor cualquiera ni simétrico ni antisimétrico:

$$A^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}A^{\alpha\beta}(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha})$$

$$= \frac{1}{2} u^{\gamma} \cdot u^{\alpha} \left(\nabla_{\alpha} \xi_{\gamma} + \nabla_{\gamma} \xi_{\alpha} \right) = 0$$

Y, ciertamente, ya salta a nuestro ojos de qué manera conseguimos que esta igualdad se cumpla. Puesto que estamos hablando de vectores de Killing y éstos cumplen que la derivada de Lie de la métrica respecto a ellos es igual a cero, podemos afirmar que:

$$\nabla_{\alpha} \xi_{\gamma} + \nabla_{\gamma} \xi_{\alpha} = 0$$

Luego:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\underline{u} \cdot \underline{\xi} \right) = \frac{1}{2} u^{\gamma} \cdot u^{\alpha} \left(\nabla_{\alpha} \xi_{\gamma} + \nabla_{\gamma} \xi_{\alpha} \right) = 0$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\underline{u} \cdot \underline{\xi} \right) = \frac{1}{2} u^{\gamma} \cdot u^{\alpha} (0) = 0$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\underline{u} \cdot \underline{\xi} \right) = 0$$

Q.E.D.

Es decir, la aceleración a lo largo de un "campo vectorial" de Killing (recorriendo una geodésica) es cero y, por lo tanto, las cantidades energéticas asociadas a la partícula con cuadrivelocidad $\underline{u}$ son cantidades conservadas.

Descendamos a la práctica. Para ello, recordemos los vectores de Killing que hemos calculado para el espacio de Minkowski:

$\vec{\xi} = e_x$	Translación en el eje x
$\vec{\xi} = e_y$	Translación en el eje y
$\vec{\xi} = e_z$	Translación en el eje z
$\underline{\xi} = e_0$	Translación en el eje del tiempo
$\vec{\xi} = y\ e_x - x\ e_y$	Rotación en torno al eje z
$\vec{\xi} = z\ e_y - y\ e_z$	Rotación en torno al eje x
$\vec{\xi} = z\ e_x - x\ e_z$	Rotación en torno al eje y
$\underline{\xi} = x\ e_0 + ct\ e_1$	Boost en eje x
$\underline{\xi} = y\ e_0 + ct\ e_2$	Boost en eje y
$\underline{\xi} = z\ e_0 + ct\ e_3$	Boost en eje z

Y recordemos cómo definíamos, para dicho espacio, el elemento de línea:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Ahora, estudiemos nuestra expresión:

$$\underline{u} \cdot \underline{\xi} = CANTIDADES\ CONSERVADAS$$

Pero aplicada, de manera concreta a cada vector de Killing del espacio de Minkowski y observemos las cantidades conservadas que obtenemos.

Empecemos por el vector de desplazamiento temporal:

- $\underline{\xi} = e_0$

$$\underline{u} \cdot \underline{\xi} = \underline{u} \cdot e_0$$

Estaremos de acuerdo en que la cuadrivelocidad la podremos expresar como un cuadrivector que es una combinación lineal de una serie de vectores base:

$$\underline{u} \cdot e_0 = u^\alpha e_\alpha \cdot e_0$$

El producto entre las dos bases será un elemento de la métrica, así podremos expresarla como:

$$u^\alpha g_{\alpha 0} = constante$$

Y como conocemos la métrica de Minkowski, sabemos que nuestra expresión sólo tendrá un valor diferente de cero cuando $\alpha = 0$ ($g_{00} = -1$, el resto de esa columna es todo cero). Es decir que, del sumatorio según convenio de Einstein, sólo sobrevive :

$$-u^0 = constante$$

Y puesto que es obvio que:

$$\underline{u} = c\frac{dt}{d\tau}e_0 + \frac{dx}{d\tau}e_1 + \frac{dy}{d\tau}e_2 + \frac{dz}{d\tau}e_3$$

Entonces, sustituyendo, tenemos que:

$$-c\frac{dt}{d\tau} = constante$$

¿Qué relación había entre el tiempo propio (τ) y el tiempo del observador desapasionado (t)?

Para recodarlo retomemos que decíamos que podíamos usar el truco de usar la siguiente expresión que nos servía como definición de tiempo propio de una partícula[307]:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2$$

Siendo esto así, y sustituyendo, el elemento de línea nos quedaría:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$-c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Que es una expresión en que ya tenemos relacionadas el tiempo propio y el tiempo "externo". Vamos a trabajar sobre esta expresión con el fin de llegar a algo que nos interese. Para ello, dividamos en ambos lados por $-c^2 d\tau^2$:

$$\frac{-c^2 d\tau^2}{-c^2 d\tau^2} = \frac{-cdt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2}{-c^2 d\tau^2}$$

[307] Decir dónde.

$$1 = \frac{-c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2}{-c^2d\tau^2}$$

$$1 = \frac{dt^2}{d\tau^2} + \frac{dx^2}{-c^2d\tau^2} + \frac{dy^2}{-c^2d\tau^2} + \frac{dz^2}{-c^2d\tau^2}$$

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2\right) = 1$$

Tratemos de pasarlo todo a nuestro tiempo t de observadores externos omniscientes. Para ello saquemos factor común, de todos los términos, $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$. Así tendríamos:

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\left(\frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\right)^2\right)\right] = 1$$

Que podemos simplificar como (lo rojo se va con lo rojo):

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)\right] = 1$$

Y considerando que la derivada respecto del tiempo de una distancia es una velocidad, tendríamos que:

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\left[1 - \frac{1}{c^2}({v_x}^2 + {v_z}^2 + {v_z}^2)\right] = 1$$

Es decir:

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\left[1 - \frac{1}{c^2}(v^2)\right] = 1$$

Por lo que:

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \pm\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad [308]$$

Así, nuestra expresión que debe tener un valor constante:

$$-u^0 = constante$$

$$-c\frac{dt}{d\tau} = constante$$

Nos queda como:

[308] Nos quedamos con el único signo que tiene sentido físico.

$$\frac{-c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = constante$$

Una constante que está expresada en unidad de velocidad.

Para verificar que vamos por el buen camino, hagámonos una pregunta: ¿es este resultado que tenemos, a velocidades bajas, consistente con el modelo, infalible en el mundo clásico, de Newton?

Supongamos que $v \ll c$. Entonces se cumple, ciertamente, el carácter constante de nuestra expresión:

$$\frac{-c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cong \frac{-c}{\sqrt{1-0}} \cong -c$$

Hagamos, de todas formas, un desarrollo en series de Taylor de nuestra expresión para verificar esto de una manera más consistente.

Tenemos la función:

$$f_{\left(\frac{v}{c}\right)} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = c \cdot \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Sus derivadas son:

$$f'_{\left(\frac{v}{c}\right)} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(c \cdot \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right) \cdot \left(-2\frac{v}{c}\right)$$

$$f'_{\left(\frac{v}{c}\right)} = c \cdot \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{v}{c}$$

$$f''_{\left(\frac{v}{c}\right)} = c\left[\left(\frac{d\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}}{d\left(\frac{v}{c}\right)}\right) \cdot \frac{v}{c} + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{d}{d\left(\frac{v}{c}\right)}\frac{v}{c}\right)\right]$$

$$f''_{\left(\frac{v}{c}\right)} = c\left[-\frac{3}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{5}{2}} \cdot \frac{-2v}{c} \cdot \frac{v}{c} + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot (1)\right]$$

Y ahora apliquemos Taylor:

$$f_{\left(\frac{v}{c}\right)} \cong f_{(0)} + f'_{(0)} \cdot \frac{v}{c} + \frac{1}{2!} f''_{(0)} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \cdots$$

Sustituyamos:

$$f_{\left(\frac{v}{c}\right)} \cong c \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left[c \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{v}{c}\right] \cdot \frac{v}{c} + c\left[-\frac{3}{2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{5}{2}} \cdot \frac{-2v}{c} \cdot \frac{v}{c} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot (1)\right] \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

Sustituyamos los valores de la variable del polinomio por cero[309]:

$$f_{\left(\frac{v}{c}\right)} \cong c \cdot (1 - 0)^{-\frac{1}{2}} + \left[c \cdot (1 - 0)^{-\frac{3}{2}} \cdot 0\right] \cdot \frac{v}{c} + \frac{1}{2!}\left(c\left[-\frac{3}{2}(1 - 0)^{-\frac{5}{2}} \cdot 0 \cdot 0 + (1 - 0)^{-\frac{3}{2}} \cdot (1)\right]\right) \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

Entonces nos queda:

$$f_{\left(\frac{v}{c}\right)} \cong c + \frac{1}{2!}c\left[(1)^{-\frac{3}{2}} \cdot (1)\right] \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$f_{\left(\frac{v}{c}\right)} \cong c + \frac{1}{2}c\frac{v^2}{c^2}$$

$$f_{\left(\frac{v}{c}\right)} \cong c + \frac{1}{2}\frac{1}{c}v^2$$

Obviamente, ese 'un medio' y esa 'velocidad al cuadrado' nos suena un poco a la Energía cinética del mundo clásico. Recordémosla:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Así, puesto que nosotros defendemos que nuestra expresión es una constante:

$$f_{\left(\frac{v}{c}\right)} \cong c + \frac{1}{2}\frac{1}{c}v^2 = K$$

Multipliquemos a ambos lados por la constate m (masa de la partícula cuyo movimiento está bajo estudio) y empecemos a juguetear con las expresiones para ver a dónde llegamos:

$$mc + \frac{1}{c}\frac{1}{2}mv^2 = mK$$

Y si ahora multiplico en ambos lados por c para quitarnos el molesto $\frac{1}{c}$:

$$mcK = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Vemos que la definición de la constante mcK se parece mucho a lo que debería ser la definición de la energía como suma de la Energía cinética y una nueva y exótica forma de energía potencial que todos conocemos: mc^2.

Es decir, que a todas luces parece que nuestra constante K es algo así como:

$$\frac{Energía}{mc}$$

[309] Obviamente lo v/c de fuera de los polinomios derivados no son sustituidos por cero. Sólo las variables de las derivadas pues estamos evaluando esa función en el punto $v/c = 0$.

Con todo esto podemos afirmar que cuando estudiamos el producto escalar y desarrollamos el comportamiento de una partícula con cuadrivelocidad $\underline{u}$ a lo largo de una geodésica y estudiada respecto al Killing de desplazamiento temporal e_0:

$$\underline{u} \cdot \underline{\xi} = \underline{u} \cdot e_0$$

Obtenemos una ***cantidad conservada*** del tipo:

$$\frac{Energía}{mc}$$

Es decir:

$$\underline{u} \cdot \underline{\xi} \rightarrow \underline{u} \cdot e_0 \quad \rightarrow \quad -u^0 = -\frac{E}{mc}$$

Expresión que nos permite extraer alguna conclusión adicional más que interesante. Si multiplicamos por m en ambos lados:

$$m \cdot \underline{u} \cdot \underline{\xi} = -\frac{E}{mc} \cdot m$$

$$m \cdot \underline{u} \cdot \underline{\xi} = -\frac{E}{c}$$

Donde:

$$m \cdot \underline{u}$$

Es el producto de una masa por una cuadrivelocidad y que podremos definir como Cuadrimomento lineal:

$$\underline{P} = m \cdot \underline{u}$$

De manera que:

$$\underline{P} \cdot \underline{\xi}^0 = -\frac{E}{c}$$

Que es un resultado importantísimo pues hemos hallado un modo de definir la energía de una partícula en Relatividad tanto Especial como General. Al menos en un ***Espaciotiempo Estático***, que es aquél espacio tiempo que, como mínimo, tenga un Killing temporal, como es en el caso que nos ocupa.

Así, ya tenemos la conexión algebraica para defender que:

$$\underline{u} \cdot \underline{\xi} = -\frac{E}{mc} = \frac{-c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Si multiplicamos por m:

$$m \cdot \underline{u} \cdot \underline{\xi} = -\frac{E}{c} = \frac{-mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\underline{P} \cdot \underline{\xi} = -\frac{E}{c} = \frac{-mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$-\frac{E}{c} = \frac{-mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Que a velocidades bajas, ***y en el espacio plano de Minkowski***, ciertamente, es lo mismo que decir:

$$E = mc^2$$

Pero, lo importante de todo esto es la ley general, válida para cualquier tipo de espaciotiempo estático (con al menos un Killing temporal) es que:

$$\underline{P} \cdot \underline{\xi}^0 = -\frac{E}{c}$$

$$\boldsymbol{E = -c \cdot \underline{P} \cdot \underline{\xi}^0 = constante}$$

Que es un resultado potentísimo extraído del estudio del Killing temporal.

(OBSERVACIÓN. Para el resto de Killings de Traslación Espacial obtendríamos la constancia del Momento Lineal en la dimensión por la que discurra el Killing.

$$\vec{\xi} = e_x$$

$$m \cdot \underline{u} \cdot \vec{\xi} = constante$$

$$m \cdot u^\alpha e_\alpha e_x \rightarrow m \cdot u^\alpha e_\alpha e_1 - m \cdot u^\alpha g_{\alpha 1}$$

En Minkowski sólo sobrevive:

$$m \cdot u^1 g_{11} \rightarrow m \cdot u^1 = p^1 \qquad)$$

Abordemos ahora los Killings de rotación espacial en torno a un eje[310] (comencemos por el giro en torno al eje z).

- $\vec{\xi} = y\ e_x - x\ e_y$

Recordemos que partimos de nuestro axioma, más desarrollado en el caso del Killing anterior, de la constancia del resultado del siguiente producto[311]:

$$m \cdot \underline{u} \cdot \vec{\xi} = constante$$

Para el caso del nuevo Killing podemos escribir como[312]:

$$m \cdot u^{\alpha} e_{\alpha} \cdot (x\ e_2 - y\ e_1) = constante$$

Desarrollemos el producto de la cuadrivelocidad con el Killing[313]:

$$m \cdot \left(u^{\alpha} e_{\alpha} \cdot x\ e_2 - u^{\beta} e_{\beta} \cdot y\ e_1\right)$$

$$m \cdot \left(u^{\alpha} \cdot x \cdot e_{\alpha} e_2 - u^{\beta} \cdot y \cdot e_{\beta}\ e_1\right)$$

El producto de las bases es un elemento de la métrica:

$$m \cdot \left(u^{\alpha} \cdot x \cdot g_{\alpha 2} - u^{\beta} \cdot y \cdot g_{\beta 1}\right)$$

Puesto que estamos en Minkowski, los valores de esta expresión sólo sobreviven cuando los valores de la métrica son diferentes de cero, es decir, en la diagonal. Por ello:

$$m \cdot (u^{2} \cdot x \cdot g_{22} - u^{1} \cdot y \cdot g_{11})$$

Por lo que llegamos a:

$$m \cdot \left(u^{2} \cdot x \cdot (1) - u^{1} \cdot y \cdot (1)\right)$$

$$m \cdot (u^{2} x - u^{1} y)$$

Si desarrollamos el producto de la masa:

$$p^{2} x - p^{1} y$$

Y por lo tanto resulta que:

$$m \cdot \underline{u} \cdot \vec{\xi}^{(rot.z)} = x p^{2} - y p^{1}$$

Que es la definición exacta de el Momento Angular de un giro en torno al eje z[314]:

---

[310] Abordamos una rotación porque queremos dirigir nuestros pasos al encuentro del momento angular.

[311] Es $\vec{\xi}$ porque no hay parte temporal.

[312] Usamos la expresión con el signo cambiado, pues es la más habitual en los manuales.

[313] ¿Por qué tiene índices diferentes? Porque se 'cruzan'. Es decir, cuando la cuadrivelocidad entra a multiplicar, entra en toda su multidimensionalidad cruzada y no de una manera, digamos, 'paralela'.

[314] A todas luces será necesario refrescar que el *momento angular* en el mundo clásico está definido como el producto vectorial entre el *vector posición* y el vector *momento lineal*:

$$L_z = xp^2 \ - yp^1$$

(OBSERVACIÓN. Si bien la velocidad ordinaria en el mundo clásico es $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$*, en Relatividad, la cuadrivelocidad viene dada por* $\vec{u} = \left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right)$*. Ciertamente para velocidades mucho más bajas que la velocidad de la luz podemos afirmar que* $\frac{dx}{d\tau} \approx \frac{dx}{dt}$*. En Relatividad, definimos el cuadrimomento lineal como* $\vec{p} = m\vec{u} = m\left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right)$*. Además, si nos fijamos en la nota 314, observamos que en el producto vectorial* $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$*, ya están recogidos todos los Killings relacionados con las rotaciones)*

Por lo que ya tenemos las cantidades conservadas (el ***cuadrimomento angular***), a lo largo de una geodésica, asociadas a los Killings de rotaciones espaciales en un espacio de Minkowski:

$$m \cdot \underline{u} \cdot \vec{\xi}^{(rot.x)} = x^2p^3 \ - x^3p^2 = L_x$$

$$m \cdot \underline{u} \cdot \vec{\xi}^{(rot.y)} = x^3p^1 \ - x^1p^3 = L_y$$

$$m \cdot \underline{u} \cdot \vec{\xi}^{(rot.z)} = x^1p^2 \ - x^2p^1 = L_z$$

Abordemos ahora los Killings asociados a los Boosts. Comencemos por el Boost x.

- $\underline{\xi} = x \ e_0 + ct \ e_1$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Recordemos cómo se realizaba el producto vectorial:

$$\begin{matrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ p_x & p_y & p_z \end{matrix}$$

$$(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}) = (r_y p_z - r_z p_y \ , \ r_x p_z - r_z p_x \ , \ r_x p_y - r_y p_x)$$

Es decir, que el producto vectorial en la dimensión z ($\hat{k}$) es:

$$r_x p_y - r_y p_x = xp_2 - yp_1$$

Donde $\vec{p} = m\vec{v}$

Decimos que:

$$m \cdot \underline{u} \cdot \underline{\xi}^{(Boost\ x)} = m \cdot \underline{u} \cdot (x\ \ e_0 + ct\ e_1) \rightarrow constante$$

Como hicimos antes:

$$m\left(u^{\alpha} \cdot x \cdot e_{\alpha} e_0 + u^{\beta} \cdot ct \cdot e_{\beta} e_1\right)$$

$$m\left(u^{\alpha} \cdot x \cdot g_{\alpha 0} + u^{\beta} \cdot ct \cdot g_{\beta 1}\right)$$

Como estamos en Minkowski, sólo sobrevive:

$$m\left(u^{\alpha} \cdot x \cdot g_{00} + u^{\beta} \cdot ct \cdot g_{11}\right)$$

$$m\left(u^{\alpha} \cdot x \cdot (-1) + u^{\beta} \cdot ct \cdot (+1)\right)$$

$$m(-u^0 x + u^1 ct)$$

$$-p^0 x + p^1 ct \rightarrow p^1 ct - p^0 x$$

Finalmente, por pura combinatoria nos ahorramos hacerlo de nuevo y podemos exponer el resultado que obtendríamos con todos los Killings de Boosts:

$$m \cdot \underline{u} \cdot \underline{\xi}^{(Boost\ x)} = x^0 p^1 - x^1 p^0$$

$$m \cdot \underline{u} \cdot \underline{\xi}^{(Boost\ y)} = x^0 p^2 - x^2 p^0$$

$$m \cdot \underline{u} \cdot \underline{\xi}^{(Boost\ z)} = x^0 p^3 - x^3 p^0$$

Y a esto se le llama ***Momento Angular Relativista***. Se le suele designar con la letra M y es un Tensor de orden 2:

$$\boldsymbol{M^{\alpha\beta} = x^{\alpha} p^{\beta} - x^{\beta} p^{\alpha}}$$

$$m \cdot \underline{u} \cdot \underline{\xi}^{(Boost\ x)} = x^0 p^1 - x^1 p^0 = M^{01}$$

$$m \cdot \underline{u} \cdot \underline{\xi}^{(Boost\ y)} = x^0 p^2 - x^2 p^0 = M^{02}$$

$$m \cdot \underline{u} \cdot \underline{\xi}^{(Boost\ z)} = x^0 p^3 - x^3 p^0 = M^{03}$$

Puesto que la estructura del Momento Angular Relativista es muy similar (por no decir idéntica) a la del Momento Angular Clásico, resulta que con la notación del Tensor para el M.A.R. podemos designar también el M.A.C. ya que:

$$M^{31} = x^3 p^1 - x^1 p^3 = L_y$$

$$M^{13} = x^1 p^3 - x^3 p^1 = -L_y$$

$$M^{02} = x^0 p^2 - x^2 p^0 = M^{02}$$

$$M^{20} = x^2 p^0 - x^0 p^2 = -M^{02}$$

…

Es decir que, además, observamos que el Tensor M.A.R. $M^{\alpha\beta}$ es un Tensor antisimétrico.

-2.9-

De camino a un Agujero negro.

Últimos pasos teóricos.

Ya sabemos que el espacio de Minkowski es un espacio máximamente simétrico pues cuenta con todos los Killings posibles. Sin embargo, el tipo de espacio con el que representar la realidad no cuenta con tan felices condiciones pues no es habitual, en los espacios curvados por efectos gravitatorios, encontrar tan extensas simetrías. Para ir preparándonos podemos anticipar que las únicas simetrías que se suelen encontrar en un espacio cercano a un agujero negro estático (que no rota) son aquellas que se dan en las rotaciones y en la translación a lo largo del eje temporal.

Por otro lado, y sin profundizar en los detalles históricos acerca de la sorpresa que supusieron las soluciones aportadas, en 1916, por Karl Schwarzschild, a las ecuaciones de campo de Einstein y a través de la cuales se anticipó la idea de lo que hoy conocemos como un agujero negro. Baste, por el momento, para seguir con nuestro estudio, comentar que la métrica de Schwarzschild está definida en coordenadas esféricas y, puesto que pretendemos dar un salto desde Minkowski a Schwarzschild (pasando por Rindler), no haremos mal en expresar los vectores de Killing vinculados a las rotacionales y al desplazamiento temporal (pues hemos dicho que son los únicos que suelen 'sobrevivir' en torno a un agujero negro estático) en coordenadas esféricas.

Para ello recordemos, en primer lugar, cómo definíamos en coordenadas esféricas los agentes implicados en la construcción de un espacio tridimensional euclídeo.

- Coordenadas:

$$x = r\,sin\,\theta\,cos\,\varphi$$

$$y = r\,sin\,\theta\,sin\,\varphi$$

$$z = r\,cos\,\theta$$

- Bases:

$$e_r = sin\,\theta\,cos\,\varphi\,e_x + sin\,\theta\,sin\,\varphi\,e_y + cos\,\theta\,e_z$$

$$e_\theta = r\,cos\,\theta\,cos\,\varphi\,e_x + r\,cos\,\theta\,sin\,\varphi\,e_y - r\,sin\,\theta\,e_z$$

$$e_\varphi = -r\,sin\,\theta\,sin\,\varphi\,e_x + r\,sin\,\theta\,cos\,\varphi\,e_y$$

Si expresamos estas ecuaciones en forma matricial y buscamos la matriz inversa, podemos despejar la base alternativa, pues nos va a hacer falta:

$$e_x = cos\,\varphi\,sin\,\theta\,e_r + \frac{1}{r}cos\,\theta\,cos\,\varphi\,e_\theta - \frac{1}{r}\frac{sin\,\varphi}{sin\,\theta}e_\varphi$$

$$e_y = sin\,\varphi\,sin\,\theta\,e_r + \frac{1}{r}cos\,\theta\,sin\,\varphi\,e_\theta + \frac{1}{r}\frac{cos\,\varphi}{sin\,\theta}e_\varphi$$

$$e_z = cos\,\theta\,e_r - \frac{1}{r}sin\,\theta\,e_\theta$$

- Métrica (y su inversa):

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sin^2\theta \end{pmatrix} \quad // \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sin^2\theta \end{pmatrix}$$

- Elemento de línea:

$$ds^2 = (1)dr^2 + (r^2)d\theta^2 + (r^2 sin^2\theta)d\varphi^2$$

Con esto datos, podemos expresar los 'Killings rotacionales' en coordenadas esféricas con sólo sustituir.

- Rotación en torno al eje z.

$$\vec{\xi}^{(rot.z)} = y\ e_x - x\ e_y$$

$$\vec{\xi}^{(rot.z)} = (r\,sin\,\theta\,sin\,\varphi)\left(cos\,\varphi\,sin\,\theta\,e_r + \frac{1}{r}cos\,\theta\,cos\,\varphi\,e_\theta - \frac{1}{r}\frac{sin\,\varphi}{sin\,\theta}e_\varphi\right) - (r\,sin\,\theta\,cos\,\varphi)\left(sin\,\varphi\,sin\,\theta\,e_r + \frac{1}{r}cos\,\theta\,sin\,\varphi\,e_\theta + \frac{1}{r}\frac{cos\,\varphi}{sin\,\theta}e_\varphi\right)$$

$$\vec{\xi}^{(rot.z)} = \left(r\,sin\,\theta\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi\,sin\,\theta\,e_r + r\,sin\,\theta\,sin\,\varphi\frac{1}{r}cos\,\theta\,cos\,\varphi\,e_\theta - r\,sin\,\theta\,sin\,\varphi\frac{1}{r}\frac{sin\,\varphi}{sin\,\theta}e_\varphi\right) - \left(r\,sin\,\theta\,cos\,\varphi\,sin\,\varphi\,sin\,\theta\,e_r + r\,sin\,\theta\,cos\,\varphi\frac{1}{r}cos\,\theta\,sin\,\varphi\,e_\theta + r\,sin\,\theta\,cos\,\varphi\frac{1}{r}\frac{cos\,\varphi}{sin\,\theta}e_\varphi\right)$$

$$\vec{\xi}^{(rot.z)} = r\,sin\,\theta\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi\,sin\,\theta\,e_r + r\,sin\,\theta\,sin\,\varphi\frac{1}{r}cos\,\theta\,cos\,\varphi\,e_\theta - r\,sin\,\theta\,sin\,\varphi\frac{1}{r}\frac{sin\,\varphi}{sin\,\theta}e_\varphi - r\,sin\,\theta\,cos\,\varphi\,sin\,\varphi\,sin\,\theta\,e_r - r\,sin\,\theta\,cos\,\varphi\frac{1}{r}cos\,\theta\,sin\,\varphi\,e_\theta - r\,sin\,\theta\,cos\,\varphi\frac{1}{r}\frac{cos\,\varphi}{sin\,\theta}e_\varphi$$

$$\vec{\xi}^{(rot.z)} = -r\,sin\,\theta\,sin\,\varphi\frac{1}{r}\frac{sin\,\varphi}{sin\,\theta}e_\varphi - r\,sin\,\theta\,cos\,\varphi\frac{1}{r}\frac{cos\,\varphi}{sin\,\theta}e_\varphi$$

$$\vec{\xi}^{(rot.z)} = -\frac{r\,sin\,\theta\,sin^2\,\varphi}{r\quad sin\,\theta}e_\varphi - \frac{r\,sin\,\theta\,cos^2\,\varphi}{r\quad sin\,\theta}e_\varphi$$

$$\vec{\xi}^{(rot.z)} = -\,sin^2\,\varphi\,e_\varphi - cos^2\,\varphi\,e_\varphi$$

$$\vec{\xi}^{(rot.z)} = -(sin^2\,\varphi - cos^2\,\varphi)e_\varphi$$

$$\vec{\xi}^{(rot.z)} = -(-1)e_\varphi$$

$$\vec{\xi}^{(rot.z)} = e_\varphi$$

- Rotación en torno al eje x.

$$\vec{\xi}^{(rot.x)} = z\ \ e_y - y\,e_z$$

$$\vec{\xi}^{(rot.x)} = (r\,cos\,\theta)\ \left(sin\,\varphi\,sin\,\theta\,e_r + \frac{1}{r}cos\,\theta\,sin\,\varphi\,e_\theta + \frac{1}{r}\frac{cos\,\varphi}{sin\,\theta}e_\varphi\right) - (r\,sin\,\theta\,sin\,\varphi)\left(cos\,\theta\,e_r - \frac{1}{r}sin\,\theta\,e_\theta\right)$$

$$\vec{\xi}^{(rot.x)} = \left(r\,cos\,\theta\,sin\,\varphi\,sin\,\theta\,e_r + r\,cos\,\theta\,\frac{1}{r}cos\,\theta\,sin\,\varphi\,e_\theta + r\,cos\,\theta\,\frac{1}{r}\frac{cos\,\varphi}{sin\,\theta}e_\varphi\right) - \left(r\,sin\,\theta\,sin\,\varphi\,cos\,\theta\,e_r - r\,sin\,\theta\,sin\,\varphi\,\frac{1}{r}sin\,\theta\,e_\theta\right)$$

$$\vec{\xi}^{(rot.x)} = r\,cos\,\theta\,sin\,\varphi\,sin\,\theta\,e_r + \frac{r}{r}cos^2\,\theta\,sin\,\varphi\,e_\theta + \frac{r}{r}\frac{cos\,\theta\,cos\,\varphi}{sin\,\theta}e_\varphi - r\,sin\,\theta\,sin\,\varphi\,cos\,\theta\,e_r + \frac{r}{r}sin\,\varphi\,sin^2\,\theta\,e_\theta$$

$$\vec{\xi}^{(rot.x)} = (cos^2\,\theta + sin^2\,\theta)\,sin\,\varphi\,e_\theta + \frac{cos\,\theta\,cos\,\varphi}{sin\,\theta}e_\varphi$$

$$\vec{\xi}^{(rot.x)} = sin\,\varphi\,e_\theta + \frac{cos\,\theta\,cos\,\varphi}{sin\,\theta}e_\varphi$$

- Rotación en torno al eje y.

$$\vec{\xi}^{(rot.y)} = z\ \ e_x - x\,e_z$$

$$\vec{\xi}^{(rot.y)} = (r\,cos\,\theta)\ \left(cos\,\varphi\,sin\,\theta\,e_r + \frac{1}{r}cos\,\theta\,cos\,\varphi\,e_\theta - \frac{1}{r}\frac{sin\,\varphi}{sin\,\theta}e_\varphi\right) - (r\,sin\,\theta\,cos\,\varphi)\left(cos\,\theta\,e_r - \frac{1}{r}sin\,\theta\,e_\theta\right)$$

$$\vec{\xi}^{(rot.y)} = \left(r\,cos\,\theta\,cos\,\varphi\,sin\,\theta\,e_r + r\,cos\,\theta\,\frac{1}{r}cos\,\theta\,cos\,\varphi\,e_\theta - r\,cos\,\theta\,\frac{1}{r}\frac{sin\,\varphi}{sin\,\theta}e_\varphi\right) - \left(r\,sin\,\theta\,cos\,\varphi\,cos\,\theta\,e_r - r\,sin\,\theta\,cos\,\varphi\,\frac{1}{r}sin\,\theta\,e_\theta\right)$$

$$\vec{\xi}^{(rot.y)} = r\cos\theta\cos\varphi\sin\theta\, e_r + r\cos\theta\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\, e_\theta - r\cos\theta\frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}e_\varphi$$
$$- r\sin\theta\cos\varphi\cos\theta\, e_r + r\sin\theta\cos\varphi\frac{1}{r}\sin\theta\, e_\theta$$

$$\vec{\xi}^{(rot.y)} = r\cos\theta\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\, e_\theta - r\cos\theta\frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}e_\varphi + r\sin\theta\cos\varphi\frac{1}{r}\sin\theta\, e_\theta$$

$$\vec{\xi}^{(rot.y)} = \frac{r}{r}\cos^2\theta\cos\varphi\, e_\theta - \frac{r}{r}\frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\theta}e_\varphi + \frac{r}{r}\cos\varphi\sin^2\theta\, e_\theta$$

$$\vec{\xi}^{(rot.y)} = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\cos\varphi\, e_\theta - \frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\theta}e_\varphi$$

$$\vec{\xi}^{(rot.y)} = \cos\varphi\, e_\theta - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi\, e_\varphi$$

Y ya tendríamos, en coordenadas esféricas, los 'Killings rotacionales' del espacio plano de Minkowski.

Por supuesto, podríamos haber llegado al mismo resultado por el camino, digamos, más ortodoxo. Nosotros lo que hemos hecho es calcularlos en coordenadas cartesianas y, después, hacer un cambio de coordenadas. Sin embargo, podríamos haberlo hecho partiendo del elemento de línea de la parte espacial del espacio de Minkowski directamente en coordenadas esféricas:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \rightarrow ds^2 \rightarrow dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\varphi^2$$

Si sacamos r^2 como factor común en el segundo y tercer término:

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$

Donde, si nos fijamos, la parte marcada en color rojo es una especie de 'submétrica' que depende sólo de θ y de φ. Es decir, que es la parte de la métrica que 'gestiona' las rotaciones y, por lo tanto, los Killings relacionados con éstas pueden extraerse empleando la conexión métrica (Símbolos de Christoffel) de esta 'submétrica' y obligando a que la derivada de Lie de la misma, respecto a los vectores de Killing que buscamos, sea igual a cero. Es decir, partiendo de:

$$ds^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Y su conexión métrica ya calculada en Liber II, sección 2.4, página 166 (por supuesto, usamos sólo los Símbolos de Christoffel en los que sólo conmutan θ y φ):

$$\Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0 \quad // \quad \Gamma^\varphi_{\theta\theta} = 0 \quad // \quad \Gamma^\theta_{\theta\varphi} = 0 \quad // \quad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \cot\theta$$

$$\Gamma^\theta_{\varphi\theta} = 0 \quad // \quad \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \cot\theta \quad // \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\cos\theta\sin\theta \quad // \quad \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = 0$$

Forzaríamos a que, para $\vec{\xi}$, se cumpla que:

$$\mathcal{L}_{\vec{\xi}} g_{\alpha\beta} = 0$$

Donde α y β son θ y φ.

Es decir, tendría que cumplirse que:

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0$$

(OBSERVACIÓN. Es muy importante que prestemos atención a los subíndices de las componentes de los vectores de Killing que estamos buscando. La expresión de la derivada de Lie es así, derivadas covariantes de componentes con índice abajo… Sin embargo, si nos fijamos, los vectores de Killing que ya hemos encontrado en nuestro hilo principal tienen componentes con supraíndices… ahora arreglaremos eso, pues clave para que los resultados sean coherentes)

Por otro lado, en un espacio de dos dimensiones (θ y φ), ya hemos encontrado una serie de vectores de Killing 'rotacionales' con una forma del tipo (obsérvense los índices arriba):

$$\vec{\xi} = \xi^\theta e_\theta + \xi^\varphi e_\varphi$$

Tal y como hemos dicho, para extraer de la expresión ($\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0$) las ecuaciones diferenciales en las que buscaremos los vectores de Killing ($\vec{\xi}$ de rotación) de un espacio de Minkowski en coordenadas esféricas recurriremos a la conexión métrica de la 'submétrica' propuesta. De hecho, vamos a necesitar usar la misma 'submétrica' para bajar índices pues hemos de tener en cuenta que tenemos que realizar una serie de operaciones de derivadas covariantes con todos los índices abajo mientras que, por el contrario, las componentes de los vectores que ya tenemos tienen índices arriba).

Para buscar las ecuaciones diferenciales debemos usar la forma $\nabla_\alpha \xi_\beta = \frac{\partial(\xi_\beta)}{\partial \alpha} - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} \xi_\gamma$) :

- Caso: $\alpha = \theta$ y $\beta = \theta$

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0$$

$$\nabla_\theta \xi_\theta + \nabla_\theta \xi_\theta = 0$$

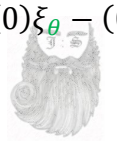
$$2[\nabla_\theta \xi_\theta] = 0$$

$$\nabla_\theta \xi_\theta = 0$$

$$\frac{\partial(\xi_\beta)}{\partial \alpha} - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} \xi_\gamma = 0$$

$$\frac{\partial(\xi_\theta)}{\partial \theta} - \Gamma^\theta_{\theta\theta} \xi_\theta - \Gamma^\varphi_{\theta\theta} \xi_\varphi = 0$$

$$\frac{\partial(\xi_\theta)}{\partial \theta} - (0)\xi_\theta - (0)\xi_\varphi = 0$$



$$\frac{\partial(\xi_\theta)}{\partial\theta} = 0$$

Que es nuestra primera ecuación diferencial y que ya nos está diciendo algo: puesto que la derivada parcial de ξ_θ respecto de θ es igual a cero, necesariamente, ξ_θ o es una constante o está en función de φ: $\xi_{\theta(\varphi)}$.

- Caso: $\alpha = \theta$ y $\beta = \varphi$

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0$$

$$\nabla_\theta \xi_\varphi + \nabla_\varphi \xi_\theta = 0$$

$$\left[\frac{\partial(\xi_\varphi)}{\partial\theta} - \Gamma^\gamma_{\varphi\theta}\xi^\gamma\right] + \left[\frac{\partial(\xi_\theta)}{\partial\varphi} - \Gamma^\gamma_{\theta\varphi}\xi^\gamma\right] = 0$$

$$\left[\frac{\partial(\xi_\varphi)}{\partial\theta} - \Gamma^\theta_{\varphi\theta}\xi_\theta - \Gamma^\varphi_{\varphi\theta}\xi_\varphi\right] + \left[\frac{\partial(\xi_\theta)}{\partial\varphi} - \Gamma^\theta_{\theta\varphi}\xi_\theta - \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}\xi_\varphi\right] = 0$$

$$\left[\frac{\partial(\xi_\varphi)}{\partial\theta} - (0)\xi_\theta - (cot\,\theta)\xi_\varphi\right] + \left[\frac{\partial(\xi_\theta)}{\partial\varphi} - (0)\xi_\theta - (cot\,\theta)\xi_\varphi\right] = 0$$

$$\frac{\partial(\xi_\varphi)}{\partial\theta} - (cot\,\theta)\xi_\varphi + \frac{\partial(\xi_\theta)}{\partial\varphi} - (cot\,\theta)\xi_\varphi = 0$$

$$\frac{\partial(\xi_\varphi)}{\partial\theta} + \frac{\partial(\xi_\theta)}{\partial\varphi} - 2\,cot\,\theta\,\xi_\varphi = 0$$

Que es nuestra segunda ecuación diferencial.

- Caso: $\alpha = \varphi$ y $\beta = \theta$. Es exactamente igual al anterior y de él resulta justamente la misma ecuación diferencial.

- Caso: $\alpha = \varphi$ y $\beta = \varphi$.

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0$$

$$\nabla_\varphi \xi_\varphi + \nabla_\varphi \xi_\varphi = 0$$

$$2\left[\nabla_\varphi \xi_\varphi\right] = 0$$

$$\nabla_\varphi \xi_\varphi = 0$$

$$\frac{\partial(\xi_\varphi)}{\partial\varphi} - \Gamma^\gamma_{\varphi\varphi}\xi_\gamma = 0$$

$$\frac{\partial(\xi_\varphi)}{\partial\varphi} - \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}\xi_\theta - \Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi}\xi_\varphi = 0$$

$$\frac{\partial(\xi_\varphi)}{\partial\varphi} - (-\cos\theta\,\sin\theta)\xi_\theta - (0)\xi_\varphi = 0$$

$$\frac{\partial(\xi_\varphi)}{\partial\varphi} + \cos\theta\,\sin\theta\,\xi_\theta = 0$$

Que es nuestra tercera ecuación diferencial. Tenemos, entonces, tres ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial(\xi_\theta)}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial(\xi_\varphi)}{\partial\theta} + \frac{\partial(\xi_\theta)}{\partial\varphi} - 2\cot\theta\,\xi_\varphi = 0$$

$$\frac{\partial(\xi_\varphi)}{\partial\varphi} + \cos\theta\,\sin\theta\,\xi_\theta = 0$$

Ahora 'tan sólo' habría que resolverlas. Debo reconocer que estoy en Fuentes de León, de fin de año, vengo de un paseo por el campo con Frodo, por las Cuevas… espectaculares colores en la puesta de sol y un maravilloso frío húmedo y 'oscuro', me cruzo con Eloy y su nieto y hablamos de Raymond… y ahora mismo, de retorno, junto a la chimenea, no tengo cuerpo para ponerme a resolver estas ecuaciones diferenciales pero, puesto que ya tenemos el resultado por otro lado, podríamos hacer una prueba intermedia comprobando si los vectores de Killing que tenemos satisfacen restas ecuaciones diferenciales. De momento nos vamos a conformar con esta prueba 'intermedia'. Veamos:

- ***Primer Killing:*** $\vec{\xi}^{(rot.z)} = \boldsymbol{e_\varphi}$. Y, si un Killing general de dos dimensiones tiene esta forma:

$$\vec{\xi} = \xi^\theta e_\theta + \xi^\varphi e_\varphi$$

En este primer caso estaríamos ante $\xi^\theta = 0$ y $\xi^\varphi = 1$. Pero, ojo, tal y como adelantábamos antes, tenemos que bajar el índice para poder usar la componente en nuestra Ecuación Diferencial. Para ello, recordemos que bastaría con multiplicar la componente con índice arriba por el elemento de la métrica que lo baja. En este caso, sólo podemos usar (pues nuestra métrica es ortogonal):

$$\xi_\theta = g_{\theta\theta}\xi^\theta$$
$$\xi_\varphi = g_{\varphi\varphi}\xi^\varphi$$

Es decir, que para este primer vector, las componentes con índices abajo serían:

$$\xi_\theta = (1)(0) \rightarrow 0$$

$$\xi_\varphi = (sin^2\theta)(1) \rightarrow sin^2\theta$$

¿Satisface este primer Killing nuestro sistema de ecuaciones? Veamos:

$$\frac{\partial(\xi_\theta)}{\partial\theta} = \mathbf{0} \rightarrow \textit{la cumple de manera trivial.}$$

$$\frac{\partial(\xi_\varphi)}{\partial\theta} + \frac{\partial(\xi_\theta)}{\partial\varphi} - \mathbf{2\,cot\,\theta\,\xi_\varphi} = \mathbf{0} \rightarrow \textit{la cumple, pues...}$$

$$\frac{\partial(sin^2\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(0)}{\partial\varphi} - 2\,cot\,\theta\,(sin^2\theta) = 0$$

Aplicamos la ley de la cadena:

$$2\,sin\,\theta\,cos\,\theta - 2\frac{cos\,\theta}{sin\,\theta}(sin^2\theta) = 0$$

$$2\,sin\,\theta\,cos\,\theta - 2\,cos\,\theta\,sin\,\theta = 0$$

Como decíamos: la cumple

$$\frac{\partial(\xi_\varphi)}{\partial\varphi} + \mathbf{cos\,\theta\,sin\,\theta\,\xi_\theta} = \mathbf{0} \rightarrow \textit{la cumple, pues...}$$

$$\frac{\partial(sin^2\theta)}{\partial\varphi} + cos\,\theta\,sin\,\theta\,(0) = 0$$

- ***Segundo Killing:*** $\vec{\xi}^{(rot.x)} = \mathbf{sin\,\varphi\,e_\theta} + \frac{\mathbf{cos\,\theta\,cos\,\varphi}}{\mathbf{sin\,\theta}}\mathbf{e_\varphi}$. De nuevo, si el Killing general tiene esta forma:

$$\vec{\xi} = \xi^\theta e_\theta + \xi^\varphi e_\varphi$$

En este segundo caso estaríamos ante $\xi^\theta = sin\,\varphi$ y $\xi^\varphi = \frac{cos\,\theta\,cos\,\varphi}{sin\,\theta}$. De nuevo, bajamos el índice:

$$\xi_\theta = g_{\theta\theta}\xi^\theta \rightarrow (1)(sin\,\varphi) \rightarrow sin\,\varphi$$

$$\xi_\varphi = g_{\varphi\varphi}\xi^\varphi \rightarrow (sin^2\theta)\left(\frac{cos\,\theta\,cos\,\varphi}{sin\,\theta}\right) \rightarrow sin\,\theta\,cos\,\theta\,cos\,\varphi$$

¿Satisface este segundo Killing nuestro sistema de ecuaciones? Veamos:

$$\frac{\partial(\xi_\theta)}{\partial\theta} = \mathbf{0} \rightarrow \frac{\partial(sin\,\varphi)}{\partial\theta} = \mathbf{0} \rightarrow \textit{la cumple de manera trivial.}$$

$$\frac{\partial(\xi_\varphi)}{\partial\theta}+\frac{\partial(\xi_\theta)}{\partial\varphi}-\mathbf{2}\,\boldsymbol{\cot\theta}\,\boldsymbol{\xi_\varphi}=\mathbf{0}\rightarrow \textit{la cumple, pues...}$$

$$\frac{\partial(\sin\theta\cos\theta\cos\varphi)}{\partial\theta}+\frac{\partial(\sin\varphi)}{\partial\varphi}-2\cot\theta\,(\sin\theta\cos\theta\cos\varphi)=0$$

En color rojo, la derivada trivial de un producto de tres factores:

$$(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\cos\varphi+\cos\varphi-2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(\sin\theta\cos\theta\cos\varphi)=0$$

En color rojo seguimos marcando una identidad trigonométrica:

$$(2\cos^2\theta-1)\cos\varphi+\cos\varphi-2\cos^2\theta\cos\varphi=0$$

Sacamos factor común $\cos\varphi$:

$$[(2\cos^2\theta-1)+1-2\cos^2\theta]\cos\varphi=0$$

$$[2\cos^2\theta-1+1-2\cos^2\theta]\cos\varphi=0$$

$$[0]\cos\varphi=0$$

Es decir, tal y como decíamos: se cumple.

$\frac{\partial(\xi_\varphi)}{\partial\varphi}+\boldsymbol{\cos\theta\sin\theta\,\xi_\theta}=\mathbf{0}\rightarrow$ la cumple, pues…

$$\frac{\partial(\sin\theta\cos\theta\cos\varphi)}{\partial\varphi}+\cos\theta\sin\theta\sin\varphi=0$$

$$-\cos\theta\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta\sin\theta\sin\varphi=0$$

- *Tercer Killing:* $\vec{\xi}^{(rot.y)}=\boldsymbol{\cos\varphi\,e_\theta-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi\,e_\varphi}$. De nuevo, si el Killing general tiene esta forma:

$$\vec{\xi}=\xi^\theta e_\theta+\xi^\varphi e_\varphi$$

En este tercer caso estaríamos ante $\xi^\theta=\cos\varphi$ y $\xi^\varphi=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi$. De nuevo, bajamos el índice:

$$\xi_\theta=g_{\theta\theta}\xi^\theta\rightarrow(1)(\cos\varphi)\rightarrow\cos\varphi$$

$$\xi_\varphi=g_{\varphi\varphi}\xi^\varphi\rightarrow(\sin^2\theta)\left(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi\right)\rightarrow-\sin\theta\cos\theta\sin\varphi$$

¿Satisface este tercer Killing nuestro sistema de ecuaciones? Veamos:

$$\frac{\partial(\xi_\theta)}{\partial\theta} = \mathbf{0} \rightarrow \frac{\partial(\cos\varphi)}{\partial\theta} = \mathbf{0} \rightarrow \textit{la cumple de manera trivial.}$$

$$\frac{\partial(\xi_\varphi)}{\partial\theta} + \frac{\partial(\xi_\theta)}{\partial\varphi} - \mathbf{2}\,\boldsymbol{\cot\theta}\,\boldsymbol{\xi_\varphi} = \mathbf{0} \rightarrow \textit{la cumple, pues...}$$

$$\frac{\partial(-\sin\theta\cos\theta\sin\varphi)}{\partial\theta} + \frac{\partial(\cos\varphi)}{\partial\varphi} - 2\cot\theta\,(-\sin\theta\cos\theta\sin\varphi) = 0$$

$$\frac{\partial(-\sin\theta\cos\theta\sin\varphi)}{\partial\theta} - \sin\varphi - 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(-\sin\theta\cos\theta\sin\varphi) = 0$$

$$(sin^2\theta - cos^2\theta)\sin\varphi - \sin\varphi + 2cos^2\theta\sin\varphi) = 0$$

Por identidad trigonométrica (marcada en color rojo):

$$(1 - 2cos^2\theta)\sin\varphi - \sin\varphi + 2cos^2\theta\sin\varphi) = 0$$

Sacamos factor común $sin\,\varphi$:

$$[(1 - 2cos^2\theta) - 1 + 2cos^2\theta]\sin\varphi = 0$$

$$[1 - 2cos^2\theta - 1 + 2cos^2\theta]\sin\varphi = 0$$

$$[0]\sin\varphi = 0$$

Es decir que, como decíamos, el tercer vector de Killing también cumple la segunda Ecuación diferencial.

$$\frac{\partial(\xi_\varphi)}{\partial\varphi} + \boldsymbol{\cos\theta\sin\theta\,\xi_\theta} = \mathbf{0} \rightarrow \textbf{la cumple, pues...}$$

$$\frac{\partial(-\sin\theta\cos\theta\sin\varphi)}{\partial\varphi} + \cos\theta\sin\theta\,(\cos\varphi) = 0$$

$$-\sin\theta\cos\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\theta\cos\varphi = 0$$

Es decir que, definitivamente, podemos estar seguros de que los vectores de Killing que calculamos en nuestro hilo principal para espacios planos bajo coordenadas esféricas son perfectamente válidos pues cumplen las Ecuaciones Diferenciales generadas bajo la condición de que la derivada de Lie, en base a dichos vectores, del Tensor métrico es igual a cero.

Estudiemos ahora el Killing relacionado con el desplazamiento temporal en Minkowski (pues hemos dicho que tanto los rotacionales como el de desplazamiento temporal se conservan en un espacio de Schwarzschild). Para ello recordemos cómo es la métrica del espaciotiempo

(ahora sí es espaciotiempo: en color negro la parte temporal y en color rojo la parte espacial) de Minkowski expresada en coordenadas esféricas a través del elemento de línea:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$

Hemos visto que el cambio de coordenadas sólo afecta a la expresión de la métrica relacionada con la parte espacial. Sin embargo, al trabajar con coordenadas esféricas, las magnitudes estudiadas, como la cuadrivelocidad, también tendrá que ser redefinida según las nuevas coordenadas. Veamos de qué va esto. Recordemos que dijimos que:

$$\underline{\xi} = e_\varphi$$

Y también dijimos que:

$$m \cdot \underline{u} \cdot \underline{\xi} = constante$$

Sea cual sea el Killing (en Minkowski, claro).

Analicemos la expresión para el Killing del desplazamiento temporal (pues hasta el momento sólo lo tenemos en la base euclídea).

$$m \cdot \underline{u} \cdot \underline{\xi} \rightarrow m \cdot \underline{u} \cdot e_\varphi = constante$$

Puesto que estamos en coordenadas esféricas, la cuadrivelocidad estará definida como:

$$\underline{u} = \frac{d(ct)}{d\tau}e_0 + \frac{dr}{d\tau}e_r + \frac{d\theta}{d\tau}e_\theta + \frac{d\varphi}{d\tau}e_\varphi$$

Obviamente, en nuestra expresión sólo sobrevivirá la última componente:

$$m \cdot \underline{u} \cdot e_\varphi = constante$$

$$m \cdot \frac{d\varphi}{d\tau}e_\varphi \cdot e_\varphi = constante$$

Esto es:

$$m \cdot \frac{d\varphi}{d\tau} \cdot g_{\varphi\varphi} = constante$$

Es decir:

$$m \cdot \frac{d\varphi}{d\tau} \cdot r^2 sin^2\theta = constante$$

De manera que podemos postular que:

$$mr^2 sin^2\theta \frac{d\varphi}{d\tau} = L^\varphi$$

Donde L^φ es el momento angular (naturalmente, con índice arriba).

Y con esto ya habríamos definido las cantidades conservadas de los Killings materiales que seguramente nos hagan falta en un espacio de Schwarzschild.

2.9.1. Killings recorridos por partículas de masa nula.

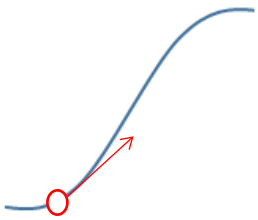
¿Qué es eso de Killings materiales? Pues sencillamente eso: Killings que están relacionados con cantidades conservadas por ***partículas con masa*** que siguen una geodésica. Partículas masivas que siguen una línea recta-curvada por la gravedad. Partículas que, por ejemplo, se mueven según el patrón de una caída libre donde la gravedad no es realmente una fuerza, sino una deformación del espacio tiempo.

¿Existen, entonces, partículas sin masa? Sí, por ejemplo, un fotón.

Claro, la cuestión para una partícula sin masa es: ¿qué clase de momento tiene una partícula sin masa? Si no metemos la masa en nuestra expresión de momento lineal o angular… ¿qué clase de momento es ése? Pues será, efectivamente, un momento especial. Un momento asociado a Killings nulos. Killings que hablan de la simetría en geodésicas nulas. Es importante comprender que se tratan de los mismo Killings, es decir, no hay unos Killings especiales para la luz. Los Killings hablan del espacio, del lecho espaciotemporal, y no del ente que lo recorre. Los Killings serán los mismos, pero las cantidades conservadas que se les asocien serán diferentes según estemos hablando de partículas materiales o partículas de masa nula. Como decimos, cuando estemos haciendo referencia al movimiento de partículas de masa nula estaremos estudiando los Killings que hablan de la simetría en geodésicas nulas. Pero, ¿qué es una geodésica nula?

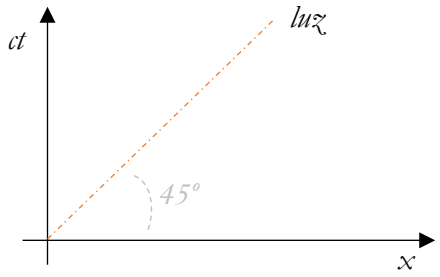
Para entender esto mejor pensemos en lo siguiente: cuando la luz se mueve, cuando un fotón se mueve, ¿qué se conserva? Veamos a continuación un ejemplo de cómo mediante el mero cálculo instrumental; mediante una suerte de 'dejarnos llevar' calculando podemos llegar a 'crear' entidades que, después, podemos interpretar de manera más o menos realista.

En primer lugar, imaginemos un fotón (una partícula sin masa) que se mueve a lo largo de una geodésica:



Bien, pues para partículas de masa nula diremos que el módulo del vector tangente de la partícula (su velocidad) será nulo.

¿Cómo es esto posible? Veámoslo geométrica y algebraicamente. Recordemos la representación del 'cuadrimovimiento' en un Espaciotiempo de Minkowski mediante un esquema espacio temporal:



En este escenario (recordemos que el eje temporal está multiplicado por la velocidad de la luz) la ecuación de la trayectoria espaciotemporal que sigue la luz es:

$$ct = x$$

Pues, como observamos, la luz hace un ángulo de 45º con ambos ejes.

Podríamos derivar a ambos lados de la expresión:

$$d\,ct = d\,x$$

Puesto que c es una constante:

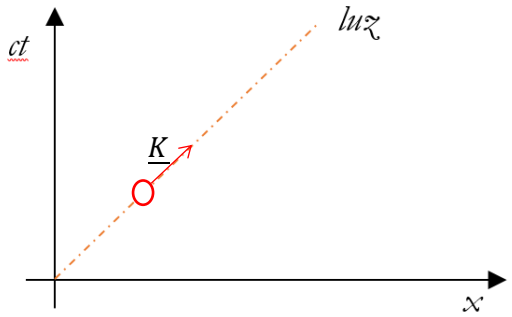
$$c\,dt = dx$$

Es decir que:

$$c = \frac{dx}{dt}$$

Cosa que es perfectamente cierta.

Supongamos, ahora, en un punto cualquiera, un vector tangente $\underline{K}$ a la trayectoria:



Llamemos a este vector tangente $\underline{K}$ cuadrimomento de la luz. Es decir, si el momento lineal normal (material) resulta del producto escalar de la velocidad por una constante (la masa), en este caso consideremos que $\underline{K}$ es la velocidad (en realidad el momento) de la partícula de masa nula (por el momento desconocemos muy bien cuál es su naturaleza).

Para darle forma, parametricemos la trayectoria mediante un mismo parámetro para ambas dimensiones. Puesto que son idénticas en su desarrollo podremos parametrizar así:

$$ct = \lambda$$

$$x = \lambda$$

El vector $\underline{K}$, obviamente, será una combinación lineal de la base y tendrá la forma:

$$\underline{K} = \frac{dct}{d\lambda} e_0 + \frac{dx}{d\lambda} e_1$$

Esto es, según nuestra parametrización:

$$\underline{K} = \frac{d\lambda}{d\lambda} e_0 + \frac{d\lambda}{d\lambda} e_1$$

Es decir:

$$\underline{K} = (1)e_0 + (1)\, e_1$$

$$\underline{K} = e_0 + \ e_1$$

Si queremos calcular su módulo lo multiplicamos escalarmente por sí mismo:

$$\underline{K} \cdot \underline{K} = (e_0 + \ e_1) \cdot (e_0 + \ e_1)$$

Esto es:

$$\underline{K} \cdot \underline{K} = e_0 e_0 + e_0 e_1 + e_1 e_0 + e_1 e_1$$

Es decir, según la métrica:

$$\underline{K} \cdot \underline{K} = g_{00} + g_{01} + g_{10} + g_{11}$$

Y si sustituimos por los valores de la métrica de Minkowski:

$$\underline{K} \cdot \underline{K} = (-1) + (0) + (0) + (+1) = 0$$

Es decir, que tiene módulo nulo:

$$\left|\underline{K}\right|^2 = 0$$

El cuadrimomento de la luz es un vector nulo.

Esto quiere decir que, de hecho, cualquier vector tangente a la trayectoria seguida por la luz tiene módulo nulo. De hecho, 'sólo la luz puede ir por donde la va la luz': el camino más corto, la 'diagonal pura', si nos referimos a una visión local de un espacio curvado.

Veamos alguna repercusión que tiene este comportamiento de la luz. Esto que sucede en un espacio plano… ¿es extensible a un espacio genérico (curvo o no)? Efectivamente, podemos hacerlo de una manera muy simple. Si retomamos el elemento de línea de un espacio de Minkowski de dos dimensiones tenemos que:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2$$

Y si dividimos por ($d\lambda^2$) (el elemento mediante el que parametrizamos cualquier tipo de trayectoria, curva o no) en ambos lados:

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = -\frac{c^2dt^2}{d\lambda^2} + \frac{dx^2}{d\lambda^2}$$

Puesto que:

$$\frac{c^2dt^2}{d\lambda^2} = \frac{dx^2}{d\lambda^2}$$

Necesariamente:

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = 0$$

Es decir, que s es constante y, por lo tanto $ds = 0$ (no hay incremento, no hay cambio). La luz se mueve de manera que $ds^2 = 0$.

Visto este importante resultado, investiguemos, entonces, acerca de la naturaleza de aquello a lo que hemos llamado cuadrimomento de la luz: $\underline{K}$.

Tenemos algunas pistas:

- Debe tener unidades de momento: $\left[Kg \cdot \frac{m}{s}\right]$
- Es un vector tangente a la trayectoria.
- En su expresión no pude haber masa pues estamos hablando de partículas de masa nula.
- Sabemos que $\left|\underline{K}\right|^2 = 0$, es decir:

$$\underline{K} = K^\alpha e_\alpha$$
$$\underline{K} \cdot \underline{K} = K^\alpha e_\alpha \cdot K^\beta e_\beta \quad {}^{315}$$
$$\underline{K} \cdot \underline{K} = K^\alpha K^\beta g_{\alpha\beta} = 0$$

- Sabemos que $ds^2 = 0$

Puesto que estamos ante una ***matriz métrica ortogonal*** en que todos los elementos que no están en la diagonal son iguales a cero[316] necesariamente el producto del vector por sí mismo es:

$$\underline{K} \cdot \underline{K} = g_{00}(K^0)^2 + g_{11}(K^1)^2 + g_{22}(K^2)^2 + g_{33}(K^3)^2$$

Donde la parte señalada en color rojo corresponde a la parte exclusivamente espacial luego:

$$\underline{K} \cdot \underline{K} = g_{00}(K^0)^2 + \vec{K} \cdot \vec{K}$$

---

[315] Usamos dos índices α y β diferentes para poder atender a los productos cruzados.

[316] Los elementos de línea son del tipo:

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 + g_{11}d(x^1)^2 + g_{22}d(x^2)^2 + g_{33}d(x^3)^2$$

Es decir, no sobrevive ningún producto cruzado.

Es decir:

$$\underline{K} \cdot \underline{K} = g_{00}(K^0)^2 + \left|\vec{K}\right|^2$$

Sabemos que esta expresión anterior debe ser igual a cero, luego, necesariamente:

$$g_{00}(K^0)^2 + \left|\vec{K}\right|^2 = 0$$

$$\left|\vec{K}\right|^2 = -g_{00}(K^0)^2$$

$$\left|\vec{K}\right| = \sqrt{-g_{00}(K^0)^2}$$

$$\left|\vec{K}\right| = \sqrt{-g_{00}}(K^0)$$

$$\left|\vec{K}\right| = \sqrt{-g_{00}}\,|K^0| \quad {}^{317}$$

Y, puesto que, como hemos dicho, podemos expresar el cuadrimomento como una combinación lineal de los vectores de la base:

$$\underline{K} = K^\alpha e_\alpha$$

Si separamos la parte temporal de la parte espacial:

$$\underline{K} = K^0 e_0 + \left|\vec{K}\right|\hat{k}$$

Donde la parte señalada en rojo y azul no es otra cosa que el módulo del vector espacial por el vector unitario de la dirección en la que se propaga (digamos que nos orientamos felizmente para que sólo sea necesario un vector unitario). Ahora podemos sustituir:

$$\underline{K} = K^0 e_0 + \sqrt{-g_{00}}\,|K^0|\hat{k}$$

Que es la definición del cuadrimomento de la luz.

(OBSERVACIÓN. Obviamente esta expresión es válida sólo para los espacios con métricas ortogonales ya que no se han considerado los productos cruzados)

Desde este punto, y para completar nuestro desarrollo, calculemos ahora la Energía de la luz, pues nos va a servir para redefinir mejor el cuadrimomento de la luz.

(OBSERVACIÓN. Sólo podremos hablar de energía si hay Killing temporal, es decir, si hay simetría temporal. Sólo si hay simetría temporal podremos hablar de energía)

Recordemos que decíamos que, para una partícula material, definíamos:

$$\underline{p} \cdot \underline{\xi} = -E/c$$

[317] Necesitamos el valor absoluto de K^0.

Ahora, como decimos, no tenemos masa, es decir, no tenemos el momento lineal ordinario $\underline{p}$ sino $\underline{K}$. Propongamos entonces[318]:

$$\underline{K} \cdot \underline{\xi} = -E/c$$

Luego:

$$E = -c \cdot \underline{K} \cdot \underline{\xi}$$

Analicemos un poco más, ahora que conocemos la forma general de la energía de la luz en movimiento, la naturaleza del cuadrimomento. Hemos dicho que debe haber Killing temporal y es mediante el Killing temporal mediante el que deducimos la Energía. Así, sabiendo que en Minkowski el Killing temporal era e_0 [319], podemos decir:

$$E = -c \cdot \underline{K} \cdot e_0$$

Podemos reescribir de manera totalmente general como:

$$E = -c \cdot K^{\alpha} e_{\alpha} \cdot e_0$$

Pero, puesto que las métricas sobre las que estamos trabajando son ortogonales[320], en este caso sólo sobrevivirá el término en que $\alpha = 0$:

$$E = -c \cdot K^0 e_0 \cdot e_0$$

$$E = -cK^0 g_{00}$$

Despejemos ahora K^0:

---

[318] ¿Por qué suponemos que es la misma relación de energía? Porque es un invariante que se da en las geodésicas y, además debe tener unidades de Energía: julios (joules):

$$1\,J = 1\,Newton \cdot m = \left(Kg \cdot \frac{m}{s^2}\right) \cdot m$$

Y es precisamente para que la energía de la luz tenga estas unidades por lo que el cuadrimomento de la luz $\underline{K}$ debía tener unidades de cuadirmomento: $\left[Kg \cdot \frac{m}{s}\right]$
Así, ahora, puesto que nuestra definición de energía para la luz decimos que:

$$E = -c \cdot \underline{K} \cdot \underline{\xi}$$

Las unidades, entonces quedan como (el Killing no tiene unidades):

$$E = -\left[\frac{m}{s}\right] \cdot \left[Kg \cdot \frac{m}{s}\right] \cdot \underline{\xi} \rightarrow \left[Kg \cdot \frac{m^2}{s^2}\right]$$

Es decir, julios: unidades de energía.

[319] También lo será en Schwarzschild.

[320] Como ya dijimos antes, si no fuera ortogonal, tendríamos que considerar los productos cruzados. Por otro lado es interesante comentar que las ***métricas ortogonales describen agujeros negros estáticos*** mientras que ***las métricas no ortogonales describen agujeros negros rotantes***.

$$K^0 = \frac{-E}{cg_{00}}$$

Y, ahora, si volvemos a sustituir en la expresión que ya teníamos:

$$\underline{K} = K^0 e_0 + \sqrt{-g_{00}}\,|K^0|\hat{k}$$

Nos queda que:

$$\underline{K} = \frac{-E}{c}\frac{1}{g_{00}}e_0 + \sqrt{-g_{00}}\left|\frac{-E}{cg_{00}}\right|\hat{k}$$

Podemos reescribir como:

$$\underline{K} = \frac{-E}{c}\frac{1}{g_{00}}e_0 + \frac{E}{c}\frac{\sqrt{-g_{00}}}{|-g_{00}|}\hat{k}$$

De manera que[321]:

$$\underline{K} = \frac{-E}{c}\frac{1}{g_{00}}e_0 + \frac{E}{c}\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\hat{k}$$

Si sacamos $\frac{E}{c}$ como facgor común, nos queda una expresión definitiva para la defínción del cuadrimomento de la luz:

[321] Es obvio que $\frac{\sqrt{-g_{00}}}{|-g_{00}|} = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}$. Imaginemos un caso más simple:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\underline{K} = \frac{E}{c}\left[\frac{-1}{g_{00}}e_0 + \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\hat{k}\right] \quad {}^{322}$$

[322] Si tomamos prestadas de otras parcelas de la Física algunas nociones acerca de la Energía de la luz podemos reformular la definición que hemos dado del cuadrimomento de la luz de manera muy interesante. Por ejemplo, tomemos de la Física Cuántica la siguiente expresión de la energía de cada fotón:

$$E = \hbar\omega \text{ (Constante de Dirac · frecuencia)}$$

Donde $\hbar$ es la constante de Planck (h) corregida para un ciclo: $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

Por otro lado, tomemos de las Ecuaciones de Maxwell las siguientes expresiones:

- La frecuencia está definida como $\omega = \frac{2\pi}{T}$, donde T es el periodo.
- También sabemos que $\frac{1}{T}$ es la frecuencia de la luz: ν.

Así, podemos decir que para un fotón:

$$\omega = 2\pi \cdot \nu$$

También sabemos por Maxwell que:

- La velocidad de la luz puede definirse como el producto de la longitud de onda por la frecuencia:

$$c = \lambda \cdot \nu$$

Con esta información podemos decir que:

$$\frac{\omega}{2\pi} = \nu \quad \text{y} \quad \frac{c}{\lambda} = \nu$$

Luego:

$$\nu = \nu$$
$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{\lambda} \rightarrow \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

Si ahora retomamos la expresión que tomamos prestada de la Física Cuántica:

$$E = \hbar\omega$$

Y sustituimos:

$$E = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

Y si sustituimos en la expresión del cuadrimomento de la luz de nuestro hilo principal:

$$\underline{K} = \frac{E}{c}\left[\frac{-1}{g_{00}}e_0 + \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\hat{k}\right]$$

(OBSERVACIÓN. g_{00} suele tener valores negativos por lo que la raíz negativa se resuleve sin problemas. Recordemos Minkowski)

Calculemos ahora el ***Cuadrimomento Angular*** $L_{x,y,z}$ de un fotón suponiendo, como es el caso de Minkowski, que estamos en un espacio con simetría esférica (como, de hecho, será también el espacio de Schwarzschild).

Para ello recordemos de nuevo los Killings Rotacionales (pues buscamos el momento angular como magnitud conservada en un espacio esféricamente simétrico) que habíamos definido para el espacio de Minkowski en coordenadas esféricas:

$$\vec{\xi}^{(rot.z)} = e_\varphi$$

$$\vec{\xi}^{(rot.x)} = sin\,\varphi\, e_\theta + \frac{cos\,\theta\, cos\,\varphi}{sin\,\theta} e_\varphi$$

$$\vec{\xi}^{(rot.y)} = cos\,\varphi\, e_\theta - \frac{cos\,\theta}{sin\,\theta} sin\,\varphi\, e_\varphi$$

Y también la métrica recogida en el Elemento de Línea del Espacio de Minkowski:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$

Ahora, en primer lugar, calculemos el nuevo, conservativo, y *exótico*, momento angular de la luz en torno al eje z.

- $\vec{\xi}^{(rot.z)} = e_\varphi$

Puesto que debe ser una cantidad conservada postulamos:

$$\underline{K} \cdot \underline{\xi} = constante$$

$$\underline{K} \cdot \vec{\xi}^{(rot.z)} = L_z$$

$$\underline{K} \cdot e_\varphi = L_z$$

$$\underline{K} = \frac{1}{c} \cdot \frac{hc}{\lambda}\left[\frac{-1}{g_{00}} e_0 + \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\hat{k}\right]$$

Nos queda que:

$$\underline{K} = \frac{h}{\lambda}\left[\frac{-1}{g_{00}} e_0 + \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\hat{k}\right]$$

Que es la misma expresión pero en la que tenemos la Energía en función de la frecuencia de la luz y mediante la cual podremos saber qué longitud de onda percibe cada posible observador según la luz recorra la geodésica (efecto Doppler).

$$K^{\alpha} e_{\alpha} \cdot e_{\varphi} = L_z$$

De esta expresión, puesto que estamos en un espacio con métrica ortogonal, sólo sobrevivirán los términos en que $\alpha = \varphi$:

$$K^{\varphi} e_{\varphi} \cdot e_{\varphi} = L_z$$

$$K^{\varphi} g_{\varphi\varphi} = L_z$$

Es decir:

$$L_z = K^{\varphi} r^2 sin^2\theta$$

Procedamos ahora con el momento angular de la luz en torno al eje x.

- $\vec{\xi}^{(rot.x)} = sin\,\varphi\, e_{\theta} + \frac{cos\,\theta\, cos\,\varphi}{sin\,\theta} e_{\varphi}$

$$\underline{K} \cdot \underline{\xi} = constante$$

$$\underline{K} \cdot \vec{\xi}^{(rot.x)} = L_x$$

$$\underline{K} \cdot \left(sin\,\varphi\, e_{\theta} + \frac{cos\,\theta\, cos\,\varphi}{sin\,\theta} e_{\varphi} \right) = L_x$$

$$K^{\alpha} e_{\alpha} \cdot \left(sin\,\varphi\, e_{\theta} + \frac{cos\,\theta\, cos\,\varphi}{sin\,\theta} e_{\varphi} \right) = L_x$$

$$\left(K^{\theta} e_{\theta} + K^{\varphi} e_{\varphi} \right) \cdot \left(sin\,\varphi\, e_{\theta} + \frac{cos\,\theta\, cos\,\varphi}{sin\,\theta} e_{\varphi} \right) = L_x$$

Los productos cruzados no sobreviven, de manera que sólo queda:

$$K^{\theta}\, sin\,\varphi\, e_{\theta} e_{\theta} + K^{\varphi} \frac{cos\,\theta\, cos\,\varphi}{sin\,\theta} e_{\varphi} e_{\varphi} = L_x$$

$$K^{\theta}\, sin\,\varphi\, g_{\theta\theta} + K^{\varphi} \frac{cos\,\theta\, cos\,\varphi}{sin\,\theta} g_{\varphi\varphi} = L_x$$

$$K^{\theta}\, sin\,\varphi\, r^2 + K^{\varphi} \frac{cos\,\theta\, cos\,\varphi}{sin\,\theta} r^2 sin^2\theta = L_x$$

$$K^{\theta}\, sin\,\varphi\, r^2 + K^{\varphi} r^2\, cos\,\theta\, sin\,\theta\, cos\,\varphi = L_x$$

Procedamos finalmente con el momento angular de la luz en torno al eje y.

- $\vec{\xi}^{(rot.y)} = cos\,\varphi\, e_{\theta} - \frac{cos\,\theta}{sin\,\theta} sin\,\varphi\, e_{\varphi}$

$$\underline{K} \cdot \underline{\xi} = constante$$

$$\underline{K} \cdot \vec{\xi}^{(rot.y)} = L_y$$

$$\underline{K} \cdot \left(cos\,\varphi\, e_\theta - \frac{cos\,\theta}{sin\,\theta} sin\,\varphi\, e_\varphi \right) = L_y$$

$$K^\alpha e_\alpha \cdot \left(cos\,\varphi\, e_\theta - \frac{cos\,\theta}{sin\,\theta} sin\,\varphi\, e_\varphi \right) = L_y$$

$$\left(K^\theta e_\theta + K^\varphi e_\varphi \right) \cdot \left(cos\,\varphi\, e_\theta - \frac{cos\,\theta}{sin\,\theta} sin\,\varphi\, e_\varphi \right) = L_y$$

Los productos cruzados no sobreviven, de manera que sólo queda:

$$K^\theta\, cos\,\varphi\, e_\theta e_\theta + K^\varphi \left(-\frac{cos\,\theta}{sin\,\theta} sin\,\varphi\, e_\varphi \right) e_\varphi = L_y$$

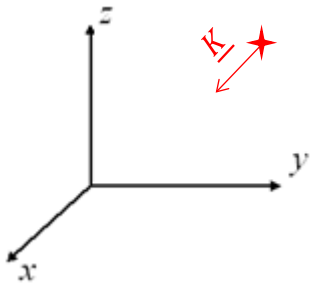
$$K^\theta\, cos\,\varphi\, g_{\theta\theta} + K^\varphi \left(-\frac{cos\,\theta}{sin\,\theta} sin\,\varphi \right) g_{\varphi\varphi} = L_y$$

$$K^\theta\, cos\,\varphi\, r^2 + K^\varphi \left(-\frac{cos\,\theta}{sin\,\theta} sin\,\varphi \right) r^2 sin^2\theta = L_y$$

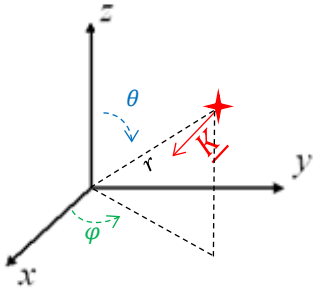
$$K^\theta\, cos\,\varphi\, r^2 - K^\varphi r^2\, cos\,\theta\, sin\,\theta\, sin\,\varphi = L_y$$

Y ya tendríamos el momento angular de la luz asociada al giro en torno a cada eje.

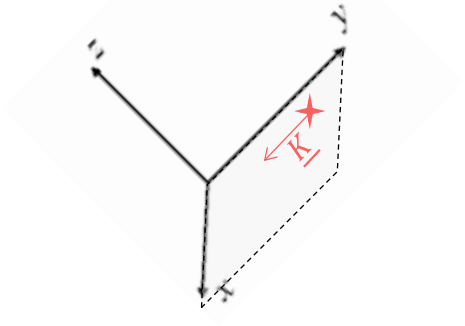
Pero esto lo podríamos simplificar aún más. Imaginemos un espaciotiempo de Minkowski (el eje temporal no vamos a dibujarlo de manera deliberada pues no sabríamos representar gráficamente cuatro dimensiones… sencillamente imaginemos que va como para dentro del papel o algo así) por el que discurre un fotón con un momento $\underline{K}$:



En coordenadas esféricas se estructuraría más o menos del siguiente modo:



Pero, recordemos, hemos dicho que el espacio tiene simetría esférica, es decir, que podemos rotar los ejes sin que se produzcan cambios en el cuadrimomento de la luz que, efectivamente, tiene carácter tensorial en espacios configurados de tal manera. En tal caso, giremos los ejes de manera que el fotón y la trayectoria de su cuadrimomento esté incorporada en el plano xy:



En este caso el ángulo θ hasta el plano y, por ende, hasta la trayectoria del fotón será siempre, de manera constante: $\frac{\pi}{2}$. En tal caso nuestras expresiones del momento quedarán muy simplificadas (téngase en cuenta, como hemos dicho, que en un espacio con simetría esférica siempre podemos orientar nuestros ejes como más nos convengan)[323]:

$$L_z = K^{\varphi} r^2 sin^2\theta \rightarrow K^{\varphi} r^2 sin^2 \frac{\pi}{2} \rightarrow K^{\varphi} r^2$$

$$L_x = K^{\theta}\, sin\, \varphi\, r^2 + K^{\varphi} r^2\, cos\, \theta\, sin\, \theta\, cos\, \varphi$$

$$L_x = (0)\, sin\, \varphi\, r^2 + K^{\varphi} r^2\, cos \frac{\pi}{2} sin \frac{\pi}{2} cos\, \varphi$$

$$L_x = (0)\, sin\, \varphi\, r^2 + K^{\varphi} r^2 (0)(1)\, cos\, \varphi = 0$$

$$L_y = K^{\theta}\, cos\, \varphi\, r^2 - K^{\varphi} r^2\, cos\, \theta\, sin\, \theta\, sin\, \varphi$$

$$L_y = (0)\, cos\, \varphi\, r^2 - K^{\varphi} r^2\, cos \frac{\pi}{2} sin \frac{\pi}{2} sin\, \varphi$$

$$L_y = (0)\, cos\, \varphi\, r^2 - K^{\varphi} r^2 (0)(1)\, sin\, \varphi = 0$$

Es decir:

$$L_z = K^{\varphi} r^2 \quad // \quad L_x = 0 \quad // \quad L_y = 0$$

Cuestión que facilitará mucho nuestros estudios.

---

[323] Téngase en cuenta que al estar contenida en un plano fijo en que theta es fija, la componente K^{θ} será, obviamente, cero.

-2.10-

Rindler y las paradojas que suscita.

Caracterización del Espacio de Schwarzschild

$\int$

Con todo el aparato teórico que hemos ido acumulando estamos en condiciones de dar nuestros primeros pasos en un entorno más cercano a la realidad. Serán nuestras nociones del Espacio de Rindler las que nos servirán para adentrarnos en el mundo real.

Recordemos que un espacio de Rindler, tal y como lo hemos definido en nuestro texto, es un espacio plano de dos dimensiones (una temporal y otra espacial) que hemos deformado (estirado y contraído) de manera que algo que esté acelerado aparezca, sin embargo, como si fuera 'recto'. Por supuesto también podemos acogernos a la perspectiva contraria: que una trayectoria que aparezca curvada, la consideremos como 'recta', es decir, como un móvil con trayectoria curvada sea considerado como 'no afectado de fuerzas externas'. Efectivamente, la causa de dicha desviación en la trayectoria no se debería a la aplicación de ninguna aceleración a la partícula en movimiento, sino que sería una propiedad misma de del espacio. El móvil estaría siguiendo una geodésica, el camino más corto, el más 'recto', en un espacio deformado (decimos 'deformado' y no 'curvado' porque el espacio de Rindler, recordemos, es un espacio plano, deformado, pero plano, es decir: no curvado, con Tensor de Riemann igual a cero).

Para proceder a acercarnos a definir teóricamente lo que es un Horizonte de Sucesos (cuya conceptualización general damos por conocida dado lo prolijo de la literatura divulgativa sobre el mismo) vamos a recordar los elementos teóricos que conocemos del Espacio de Rindler (todos estos elementos fueron calculados en la sección 2.6).

- Elemento de línea (siempre tendremos $x > 0$):

$$ds^2 = -x^2c^2dt^2 + dx^2 \quad ^{324}$$

- Conexión métrica:

[324] Ponemos la versión 'abreviada' que tiene alguna inconsistencia en sus unidades tal y como comentábamos en la sección 2.6 p.332 y siguientes. Para el procedimiento que vamos a emplear nos es perfectamente válida y consistente.

$$\Gamma^0_{10} = \frac{1}{x} \quad // \quad \Gamma^1_{00} = x$$

- Tensor de Riemann = 0. Es decir, estamos ante un espacio plano.
- Vectores de Killings:

$$\underline{\xi}^c = \frac{1}{x_1} cosh\, c\tau_1 e_{\tau_1} - sinh\, c\tau_1\ e_{x_1}$$

$$\underline{\xi}^b = \frac{-1}{x_1} sinh\, c\tau_1\ e_{\tau_1} + cosh\, c\tau_1\ e_{x_1}$$

$$\underline{\xi}^a = e_{\tau_1}$$

Puesto que en Rindler estamos ante un espacio tipo (1+1) y tiene 3 Killings, estamos ante un espacio máximamente simétrico[325].

Con estos datos, procedamos a calcular la Energía de una partícula masiva. Puesto que existe simetría temporal, podremos calcular la Energía[326]: $\underline{\xi}^{(temp)} = e_0$

Recordemos que hemos definido la Energía de partículas masivas como:

$$E = -c \cdot \underline{p} \cdot \underline{\xi}^{(temp)} = constante$$

$$E = -c \cdot m \cdot \underline{u} \cdot e_0$$

$$E = -c \cdot m \cdot u^\alpha e_\alpha \cdot e_0$$

Y, puesto que estamos en un espacio de métrica ortogonal, sólo sobrevivirán los términos en los que $\alpha = 0$:

$$E = -c \cdot m \cdot u^0 e_0 \cdot e_0$$

$$E = -c \cdot m \cdot u^0 g_{00}$$

$$E = -c \cdot m \cdot u^0 (-x^2)$$

$$E = c \cdot m \cdot u^0 \cdot x^2$$

Una Energía que debe ser constante a lo largo de una geodésica no nula (material).

Para seguir desarrollando esta expresión de la Energía, recordemos cómo se define la cuadrivelocidad en un espacio de dos dimensiones:

$$\underline{u} = \frac{dx^0}{d\tau} e_0 + \frac{dx^1}{d\tau} e_1$$

Podemos sustituir, entonces, u^0 por $\frac{dx^0}{d\tau}$:

[325] Recordemos: $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(2+1)}{2} = 3$

[326] Simplificamos la notación de los vectores de la base para más comodidad.

$$E = c \cdot m \cdot \frac{dx^0}{d\tau} \cdot x^2$$

$$E = c \cdot m \cdot \frac{dct}{d\tau} \cdot x^2$$

$$E = c \cdot m \cdot c\frac{dt}{d\tau} \cdot x^2$$

$$E = m \cdot c^2 \cdot x^2 \cdot \frac{dt}{d\tau}$$ [327]

Aún podemos desarrollarla un poco más, pues ya hemos dilucidado, en secciones anteriores, la relación que hay entre el 'tiempo externo' y el tiempo propio. Para ello recordemos[328] que definíamos el tiempo propio de una partícula como:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2$$

Entonces podemos desarrollar para este espacio:

$$-x^2c^2dt^2 + dx^2 = -c^2d\tau^2$$

$$x^2c^2dt^2 - dx^2 = c^2d\tau^2$$

$$x^2c^2dt^2 - dx^2 = c^2d\tau^2$$

Sacamos dt^2 como factor común:

$$dt^2\left(x^2c^2 - \frac{dx^2}{dt^2}\right) = c^2d\tau^2$$

Multiplico en ambos lados de la ecuación por $\frac{1}{c^2}$:

$$dt^2\left(x^2 - \frac{1}{c^2}\frac{dx^2}{dt^2}\right) = d\tau^2$$

$$\frac{dt^2}{d\tau^2}\left(x^2 - \frac{1}{c^2}\frac{dx^2}{dt^2}\right) = 1$$

$$\frac{dt^2}{d\tau^2} = \frac{1}{\left(x^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right)}$$

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{\left(x^2 - \frac{1}{c^2}v^2\right)}$$

[327] dt es la variación diferencial en el tiempo medido por el observador externo omnisciente, y $d\tau$ es al cambio diferencial en el tiempo propio de la partícula que mida internamente.

[328] Decir dónde

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{\frac{1}{\left(x^2 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(x^2 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

Y ahora podemos sustituir en nuestra expresión para le Energía:

$$E = m \cdot c^2 \cdot x^2 \cdot \frac{dt}{d\tau}$$

$$E = m \cdot c^2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(x^2 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

Y ya tendríamos la energía en función de variables que nosotros, observadores omniscientes, podemos medir 'desde fuera' del sistema.

Ahora, para simplificar los desarrollos siguientes, se suele definir un parámetro adimensional 'auxiliar' para la energía de partículas masivas:

$$\hat{E} = \frac{E}{mc^2}$$

Siendo esto así, podemos redefinir:

$$E = m \cdot c^2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(x^2 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$$\frac{E}{mc^2} = x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(x^2 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$$\hat{E} = \frac{x^2}{\sqrt{\left(x^2 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

Ahora elevamos al cuadrado ambos lados de la expresión:

$$\hat{E}^2 = \left(\frac{x^2}{\sqrt{\left(x^2 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}\right)^2$$

$$\hat{E}^2 = \frac{x^4}{\left(x^2 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

$$\left(x^2 - \frac{v^2}{c^2}\right)\hat{E}^2 = x^4$$

$$x^2\hat{E}^2 - \frac{v^2}{c^2}\hat{E}^2 = x^4$$

$$-\frac{v^2}{c^2}\hat{E}^2 = x^4 - x^2\hat{E}^2$$

$$\frac{v^2}{c^2}\hat{E}^2 = x^2\hat{E}^2 - x^4$$

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\left(x^2\hat{E}^2 - x^4\right)}{\hat{E}^2}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = x^2 - \frac{x^4}{\hat{E}^2}$$

$$\frac{v}{c} = \pm\sqrt{x^2 - \frac{x^4}{\hat{E}^2}} \quad [329]$$

$$v = \pm c\sqrt{x^2 - \frac{x^4}{\hat{E}^2}}$$

$$v = \pm cx\sqrt{1 - \frac{x^2}{\hat{E}^2}}$$

$$v = \pm cx\sqrt{1 - \frac{x^2}{\hat{E}^2}} \quad [330]$$

Todo esto *sucede* en un geodésica.

Analizando nuestra expresión de la velocidad[331] ordinaria observamos que tenemos a dicha velocidad en función de una variable (v) y dos constantes c y $\hat{E}$ (¡recordemos que postulamos

[329] Al despejar un cuadrado siempre hay que poner un $\pm$. En algunos casos quizás no se ha puesto porque no tenía sentido una magnitud negativa. En este caso sí lo va a tener y, por lo tanto, puesto que metodológicamente, además, es lo apropiado, lo ponemos. En este caso será tener velocidad hacia un lado o hacia el opuesto.

[330] Ya dijimos, al definir el elemento de línea del Espacio de Rindler, que x es siempre positivo y, por eso no es necesario, al sacarlo de la raíz, ponerlo como valor absoluto.

[331] Podríamos haber llegado a lo mismo, en vez de desarrollando el Killing temporal, mediante el empleo de los Killings rotacionales. De todas formas lo más útil es usar el Killing temporal, pues los rotacionales no estarán en todos los espacios que se estudien. Aún así, vamos a esbozar cómo hubiéramos podido extraer nuestra expresión de la velocidad y, también, la de la trayectoria de la partícula masiva.

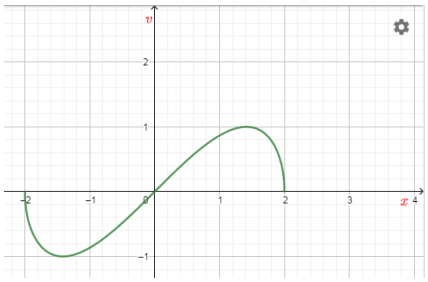
$$\underline{p}\cdot\underline{\xi}^c = -m\left(cx\frac{dt}{d\tau}\cosh ct + \frac{dx}{d\tau}\sinh ct\right) = cte = K_c$$

$$\underline{p}\cdot\underline{\xi}^b = m\left(cx\frac{dt}{d\tau}\sinh ct + \frac{dx}{d\tau}\cosh ct\right) = cte = K_b$$

Dividamos las dos constante y obtendremos otra constante:

la energía es constante! y además, $\hat{E}$ es una constante dividida por otras dos constantes m y c^2). Representémosla gráficamente para $c = 1$ y el valor máximo posible de $\hat{E}$: 2 [332].

- $v = +x\sqrt{1 - \frac{x^2}{2^2}}$



$$\frac{-K_c}{K_b} = \frac{m\left(cx\frac{dt}{d\tau}\cosh ct + \frac{dx}{d\tau}\sinh ct\right)}{m\left(cx\frac{dt}{d\tau}\sinh ct + \frac{dx}{d\tau}\cosh ct\right)}$$

Multipliquemos arriba y abajo por $d\tau$:

$$\frac{-K_c}{K_b} = \frac{cx\ dt\cosh ct + dx\sinh ct}{cx\ dt\ \sinh ct + dx\cosh ct}$$

Dividamos arriba y abajo por dt:

$$\frac{-K_c}{K_b} = \frac{cx\frac{dt}{dt}\cosh ct + \frac{dx}{dt}\sinh ct}{cx\frac{dt}{dt}\ \sinh ct + \frac{dx}{dt}\cosh ct}$$

$$\frac{-K_c}{K_b} = \frac{cx\ (1)\cosh ct + \frac{dx}{dt}\sinh ct}{cx\ (1)\sinh ct + \frac{dx}{dt}\cosh ct}$$

$$\frac{-K_c}{K_b} = \frac{cx\ (1)\cosh ct + v\sinh ct}{cx\ (1)\sinh ct + v\cosh ct}$$

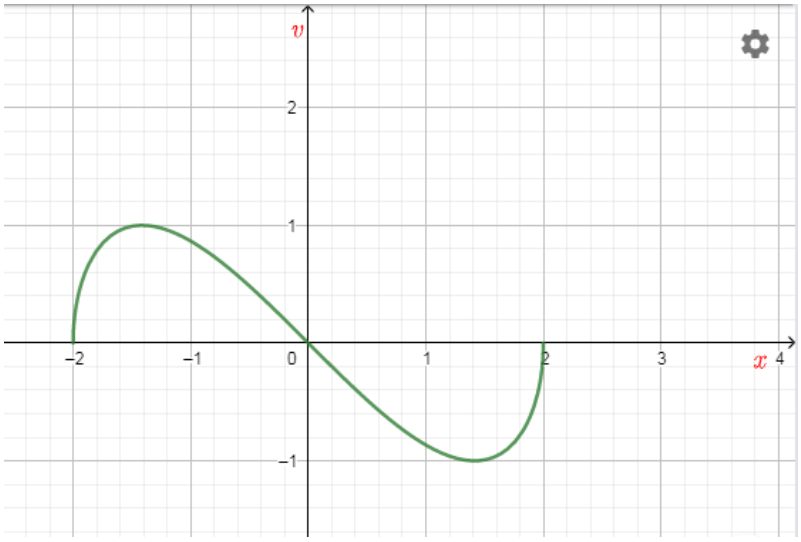
El valor de esto es también una constante K. Podemos despejar v y ya tendríamos la expresión de la velocidad en función de t. También opodríamos integrar esta expresión en función de t y obtener la trayectoria.

[332] Esto me ha dado algún que otro quebradero de cabeza y la explicación de que $\hat{E}$ sea 2 emana directamente de la premisa fundamental de que nada puede ir más rápido que la velocidad de la luz. ***Es una imposición nuestra***. Digamos que hemos construido la única gráfica posible para nuestra naturaleza postulada. Es decir, si nos fijamos en la definición que hemos hecho de la velocidad:

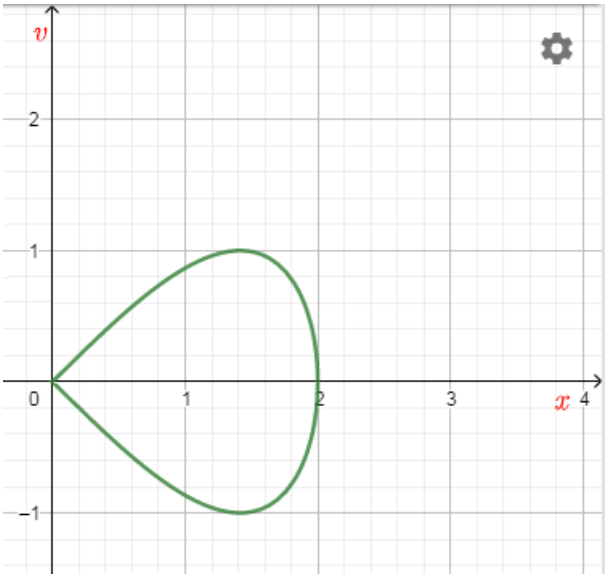
$$v = \pm cx\sqrt{1 - \frac{x^2}{\hat{E}^2}}$$

El factor que hemos marcado en color rojo nunca podrá valer más de 1 ($\pm$) ya que en tal caso, el cuerpo al que nos estamos refiriendo podría superar la velocidad de la luz. El único caso en que nuestra gráfica tiene límites, justamente, en ± 1 es para una $\hat{E}$ constante igual a 2…

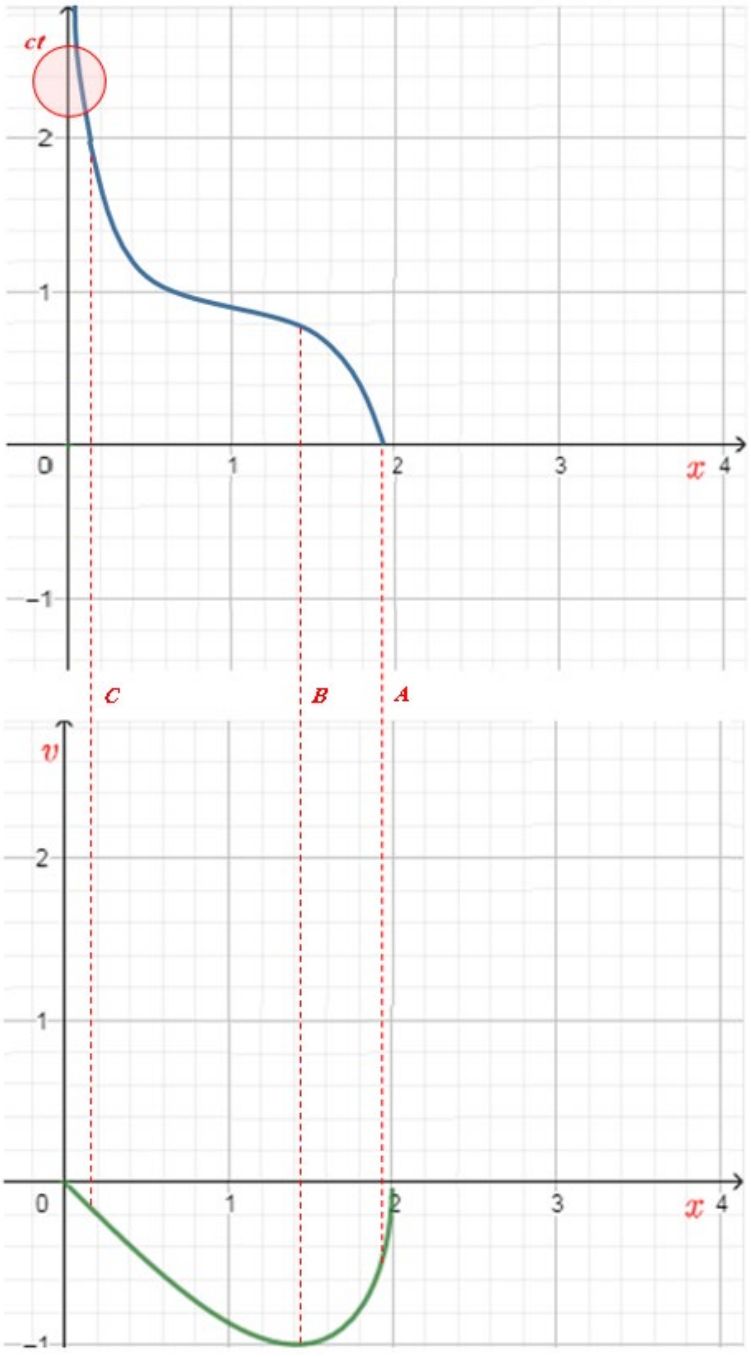
- $v = -x\sqrt{1 - \frac{x^2}{2^2}}$



- Como sabemos que x es siempre positivo, nos quedaríamos, en los dos casos, con la 'parte derecha' de la gráfica que, además, debemos solapar. Es decir, nuestra gráfica que relaciona el comportamiento de la velocidad según cambie x queda definitivamente como:



Tratemos ahora de dibujar la trayectoria de una partícula que se mueve hacía la izquierda (con velocidad de sentido negativo/izquierda):



Hemos distinguido 3 zonas en la relación velocidad/trayectoria:

- Zona A. El móvil está moviéndose a una velocidad creciente hacia la izquierda.
- Zona B. El móvil alcanza la velocidad de la luz ($v = c$) y, por lo tanto, la trayectoria alacanza en nuestro diagrama un ángulo de 45º (el máximo posible)[333].

[333] Obviamente una línea vertical supone un móvil con velocidad cero y una línea de 45º supone un movimiento de la velocidad de la luz ya que $ct = x$.

- Zona C. El móvil se acerca asintóticamente al eje $ct;\ x = 0$, pero nunca llega a alcanzarlo. Su velocidad baja y baja conforme se acerca al eje.

La trayectoria que hemos trazado en el diagrama ct,x es la que sigue una partícula a lo largo de una geodésica, es decir, sin estar afectada por ninguna fuerza externa. Dicha partícula, digamos, se encuentra en movimiento 'libre', o lo que es lo mismo, no está afectada por ninguna cuadriaceleración: $\underline{a} = 0$. Se está moviendo por una geodéisca, es decir, va en línea recta aunque nosotros, observadores omniscientes externos, percibimos una curvatura que, realmente, es producto de la naturaleza misma del espacio.

Como vemos, en la 'zona C', la partícula se va frenando y frenando hasta presentar un comportamiento asintótico con el eje ct. Nunca llegaría a tocarlo. ¿Por qué? Analizando nuestra expresión algebraica que relaciona dt y $d\tau$ podemos ver algunas pistas. Recordemos que hemos dicho:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\left(x^2 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

Si x tuviera un valor igual a cero, la raíz sería negativa y el movimiento una componente imaginaria, cosa que en la realidad no puede suceder.

Sin embargo, analizando la expresión encontramos un motivo mucho más interesante e impactante. Algo maravillosamente alucinante: algo que podría parecer (y decimos parecer) un horizonte de sucesos. Veamos:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\left(x^2 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$$dt = \frac{1}{\sqrt{\left(x^2 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} d\tau$$

Supongamos que no estamos hablando de magnitudes diferenciales, sino de incrementos macroscópicos; pequeños, pero macroscópicos.

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{\left(x^2 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \Delta\tau$$

Analicemos el modo en que se relacionan el 'tiempo externo que percibimos los observadores externos omniscientes' (t) y 'el tiempo interno o tiempo propio que mide la partícula' (τ) medainte un ejemplo práctico. Supongamos que estamos en la 'zona C' asintótica y que la partícula está realmente cerca del eje ct y se mueve a una velocidad muy muy baja, por ejemplo:

- $x = 0.01\ s$
- $v = 0.01\ m/s$

Sustituyamos en nuestra expresión:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{\left(x^2 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}\Delta\tau$$

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{\left((0.01)^2 - \frac{(0.01)^2}{c^2}\right)}}\Delta\tau$$

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{((0.01)^2 - (\sim 0))}}\Delta\tau$$

$$\Delta t = \frac{1}{0.01}\Delta\tau$$

$$\Delta t = 100\Delta\tau$$

¿Esto qué quiere decir? Quiere decir que:

$$\frac{\Delta t}{100} = \Delta\tau$$

Es decir, que son necesarias 100 unidades de Δt para que $\Delta\tau$ llegue a ser 1. Es decir, ¡que para que pase 1 segundo según la partícula, deben pasar 100 segundos de los nuestros, observadores externos!

Y, además, ¡esto va a más! Mientras más cerca esté la partícula del eje $ct;\ x = 0$ esta diferencia será más acusada llegando a tender a infinito o, lo que e lo mismo, a, bajo nuestro punto de vista parezca que la partícula, definitivamente se ha detenido.

Esto, efectivamente, se parece mucho a lo que en la literatura de divulgación se denomina Horizonte de Sucesos en torno a un agujero negro u otro objeto astronómico (pues pueden existir también en torno a cuerpo uniformen te acelerado que se mueva a una velocidad que tienda a la de la luz, etc…).

Ciertamente parece que estamos ante una paradoja alucinante pero, no tengamos prisa, de momento esto no es, realmente, un horizonte de sucesos, una extrañeza, una singularidad extrapolable al mundo físico real. Aquí, sencillamente, estamos ante, llamémosla así, una paradoja instrumental que se solventaría con sólo adoptar el punto de vista de la partícula adecuada. La partícula, en el mundo real, y bajo el punto de vista del sistema de referencia adecuado, llega sin problemas al eje ct… Aún así, ¿qué sorpresa nos tenía guardad el bueno de rindler, eh?

Hemos visto el comportamiento de una partícula masiva pero… ¿Sucede lo mismo con un fotón? Veámoslo.

2.10.1. Geodésica de la luz.

Puesto que vamos a estudiar el comportamiento energético de la luz, en primer lugar, recordemos nuestra definición del cuadrimomento de la luz:

$$\underline{K} = \frac{E}{c}\left[\frac{-1}{g_{00}}e_0 + \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\hat{k}\right]$$

El vector $\hat{k}$ [334], es un vector unitario y por lo tanto su módulo debe ser:

$$\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

Como es un vector espacial, en nuestro espaciotiempo bidimensional de Rindler, necesariamente:

$$\hat{k} = \alpha \cdot e_1$$

Así:

$$\hat{k} \cdot \hat{k} = (\alpha \cdot e_1) \cdot (\alpha \cdot e_1)$$

$$\hat{k} \cdot \hat{k} = \alpha^2 e_1 e_1$$

$$\hat{k} \cdot \hat{k} = \alpha^2 g_{11}$$

Puesto que el elemento de línea de Rindler es:

$$ds^2 = -x^2 c^2 dt^2 + dx^2$$

Podemos escribir:

$$\hat{k} \cdot \hat{k} = \alpha^2 (1)$$

Y puesto que estamos diciendo que el módulo debe ser igual a 1, necesariamente:

$$\alpha^2 = 1$$

$$\alpha = \pm 1$$

Luego:

$$\hat{k} = \alpha \cdot e_1 \rightarrow \hat{k} = (\pm 1) e_1$$

Así, nuestra expresión queda como:

$$\underline{K} = \frac{E}{c}\left[\frac{-1}{g_{00}} e_0 \pm \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} e_1\right]$$

Calculemos ahora la magnitud conservada mediante el producto del cuadrimomento de la luz por el Killing temporal:

$$\underline{K} \cdot \underline{\xi}^a = cte$$

$$\frac{E}{c}\left[\frac{-1}{g_{00}} e_0 \pm \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} e_1\right] \cdot e_0 = cte$$

De aquí sólo sobrevive:

[334] $\hat{k}$ es un vector espacial (de hecho, sustituye a e_1) y, por lo tanto, su módulo no puede ser nulo. Necesariamente su módulo deber ser > 0.

$$\frac{E}{c}\frac{-1}{g_{00}}e_0 e_0 = cte$$

$$\frac{E}{c}\frac{-1}{g_{00}}g_{00} = cte$$

$$\frac{-E}{c} = cte$$

Que es justo lo que podríamos esperar[335].

Calculemos ahora la geodésica de la luz y que no es otra cosa que la trayectoria que dibujaría el vector tangente $\underline{K}$.

Estamos de acuerdo en que en el espacio de Rindler:

$$\underline{K} = K^0 e_0 + K^1 e_1$$

Donde:

$$K^0 = c\frac{dt}{d\tau} \quad // \quad K^1 = \frac{dx}{d\tau}$$

Recordemos que hemos dicho que:

$$\underline{K} = \frac{E}{c}\left[\frac{-1}{g_{00}}e_0 \pm \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}e_1\right]$$

Luego:

$$K^0 = \frac{E}{c}\frac{-1}{g_{00}} \quad // \quad K^1 = \pm\frac{E}{c}\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}$$

$$K^0 = \frac{E}{c}\frac{1}{x^2} \quad // \quad K^1 = \pm\frac{E}{c}\frac{1}{x}$$

Luego, equiparando las dos expresiones que tenemos para las componentes del cuadrimomento tenemos que:

$$c\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{c}\frac{1}{x^2} \quad // \quad \frac{dx}{d\tau} = \pm\frac{E}{c}\frac{1}{x}$$

Dividamos ahora K^1 por K^2:

$$\frac{\frac{dx}{d\tau}}{c\frac{dt}{d\tau}} = \frac{\pm\frac{E}{c}\frac{1}{x}}{\frac{E}{c}\frac{1}{x^2}}$$

$$\frac{1}{c}\frac{dx}{dt} = \pm x$$

Resolvamos esta simple ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = \pm x \cdot c$$

[335] Véanse p. 405 y ss.

$$dx = \pm x \cdot c \cdot dt$$

$$\frac{1}{x} dx = \pm c \cdot dt$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \pm c \int dt$$

$$\pm ln\, x + K = c\, t$$

Para calcular la constante de integración K impongamos un escenario simple como, por ejemplo, que estamos en $t = 0$ y $x = x_0$:

$$\pm ln\, x_0 + K = c\, (0)$$

$$\pm ln\, x_0 + K = 0$$

$$\pm ln\, x_0 = \mp K$$

Luego nuestra expresión quedaría como:

$$\pm ln\, x \mp ln\, x_0 = c\, t \rightarrow \begin{cases} + ln\, x - ln\, x_0 = c\, t \\ - ln\, x + ln\, x_0 = c\, t \end{cases}$$

$$\pm (ln\, x - ln\, x_0) = c\, t$$

Que, por las propiedades de los logaritmos podemos escribir como:

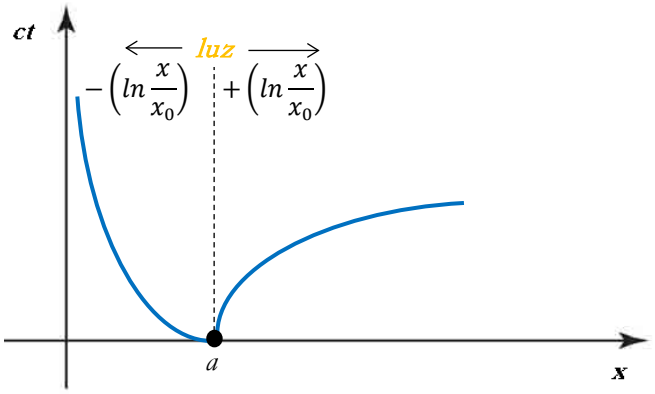
$$\pm \left(ln \frac{x}{x_0} \right) = c\, t$$

Y que es nuestra expresión para la geodésica que sigue la luz. Es decir, muy importante, que la luz, a nuestros ojos: ¡se tuerce en su viaje! ¿Cómo es esto posible? La respuesta es muy simple: depende del punto de vista desde el que se mire.

Supongamos que somos un observador que gira y que vemos un rayo de luz. Si no somos conscientes de nuestro giro, nos parecerá que la luz es la que está girando. Esto no incumple ningún postulado de la Teoría de la Relatividad ya que, recordemos, Albert Einstein postula que la *luz mantiene una velocidad constante PARA TODO OBSERVADOR EN UN SISTEMA DE REFERENCIA INERCIAL.*

Nosotros, observadores externos, si miramos el comportamiento de la luz en un espacio de Rindler, veremos cosas raras. El observador de dentro, el comóvil a la partícula, no verá nada extraño pero, nosotros, que lo vemos todo desde fuera veremos cosas muy raras como, por ejemplo, la variación misma de la velocidad de la luz.

Tratemos de dibujar, visto desde fuera, qué clase de trayectoria sigue un fotón que se emite desde un punto a en un espacio de Rindler:



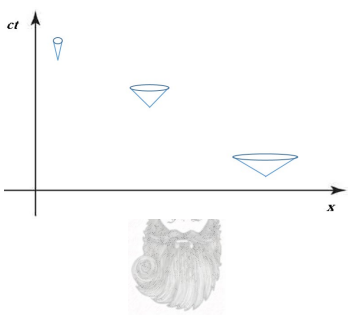
Como vamos, hacia el lado izquierdo la luz parece pararse (¡la curva casi se convierte en una recta vertical!) y hacia el lado derecho vemos que parece adquirir velocidad infinita (¡supera los 45º y se pone casi paralelo al eje x!).

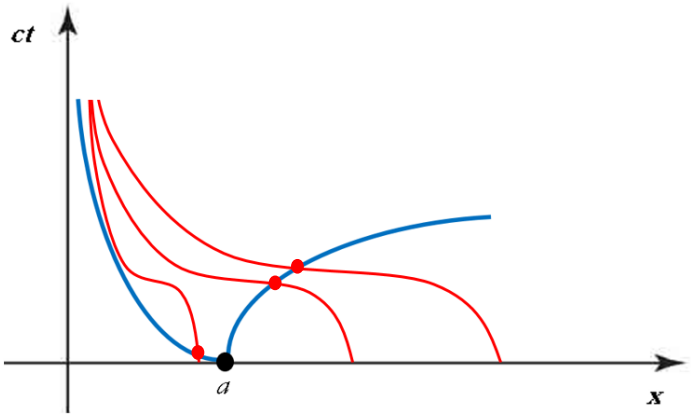
Como decimos no hay de qué extrañarse pues estamos mirando el sistema desde fuera. Un sistema que hemos deformado (estirando y comprimiendo) para que las aceleraciones parezcan no existir. Así cuando algo se comporta de manera 'recta' (constante) en ese espacio deformado, nosotros, desde fuera, veremos curvas extrañas[336].

Insistimos: el segundo postulado de la Relatividad Especial y General es que cualquier observador en un ***SISTEMA DE REFERENCIA INERCIAL*** mide una velocidad de la luz constante. Aquello que suceda en los ***Sistemas de Referencia no Inerciales es mucho más raro***, como vemos en nuestro esquema.

Es más, si nos metiéramos en la piel de las partículas que surcan el espacio de Rindler de manera libre, es decir, recorriendo las geodésicas, mediríamos una velocidad de la luz perfectamente consistente y constante ya que, al ir por las geodésicas, las partículas forman un Sistema de Referencia Inercial (y he aquí la definición fundamental del Principio de Equivalencia: la aceleración producida por la gravedad no es una fuerza externa sino meramente una deformación del espaciotiempo).

[336] Si dibujáramos conos de luz en diferentes zonas del espacio, de hecho, se verían deformados. Algo así como lo siguiente:





Estas partículas, en sus respectivas geodésicas (son diferentes a los trazos parabólicos que veíamos en la interpretación desde Minkowski de un espacio de Rindler porque estas partículas no están aceleradas, están libres¿?), se comportan como un Sistema de Referencia Inercial y, por ello, miden una velocidad de la luz constante.

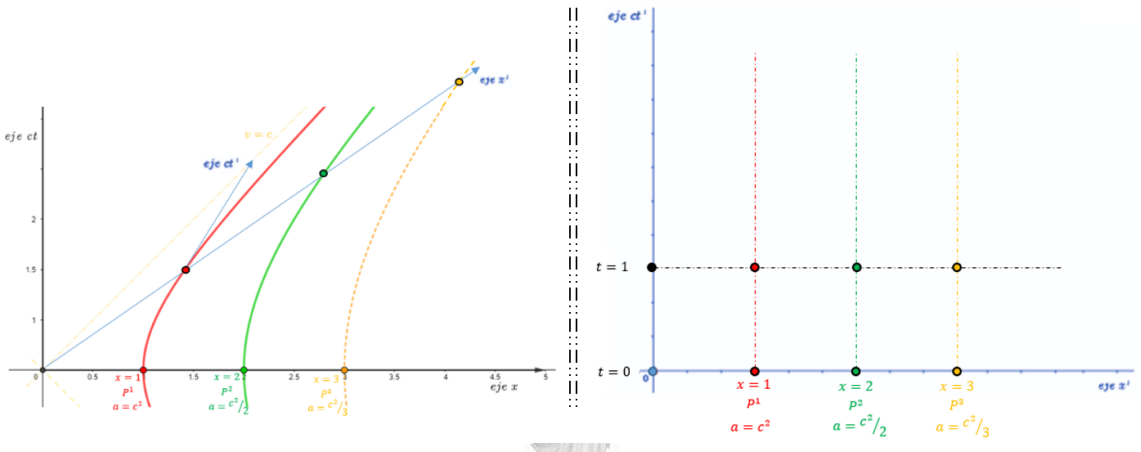
La gran pregunta que se hizo Albert Einstein ante todo esto es: ¿qué role desempeña en todo esto la gravedad? ¿Puede ser considerada la gravedad como una línea de aceleración concreta? ¿Puede identificarse la gravedad con una de las líneas que sigue alguna de las partículas aceleradas del espacio de Rindler? ¿Si analizamos la línea de aceleración en que $a = 9{,}81\ m/s^2$, es posible que justamente esa distorsión sea la distorsión que la gravedad le hace al espacio?

En torno a estas cuestiones se construye el principio de equivalencia. Analicémoslo.

Recordemos la métrica del espacio de Rindler:

$$ds^2 = -\frac{x^2}{b^2}c^2dt^2 + dx^2 \qquad 337$$

337 Observemos que hemos tomado la definición del elemento de línea 'ampliado' o 'correcto' en el que se recoge el parámetro b que identificaba la partícula que tomábamos de 'protagonista' en la elaboración del espacio de Rindler. Recordemos sección 2.6. En este caso la protagonista era la primera, la roja o $b = 1$:



Escojamos una partícula, una b, en la que la aceleración sea exactamente: $9{,}81\ m/s^2$. Vamosa buscar la geodésica que recorre una partícula en caída libre, sólo afectada por la aceleración provocada por el campo gravitatorio de la tierra.

Puesto que, tal y como definimos en la Sección 2.6 acerca de las coordenadas de Rindler, la aceleración de cada partícula estaba definida mediante la expresión:

$$a = \frac{c^2}{b}$$

Y puesto que queremos que:

$$a = \frac{c^2}{b} = 9{,}81\ m/s^2$$

Necesitamos apelar a una b con un valor altísimo ya que necesitamos 'bajar' una cantidad inmensa como c^2 hasta aproximadamente 10 unidades. Es decir, puesto que:

$$a = \frac{c^2}{b} = \frac{3 \cdot 10^{16}}{b} = 9{,}81 \frac{m}{s^2} \rightarrow g = \frac{c^2}{b}$$

¡b debe ser de una magnitud aproximada de 10^{16}! Es decir, nuestra 'partícula protagonista' del Espaciotiempo de Rindler va a estar realmente alejada, muy alejada, del origen de coordenadas.

En un diagrama espaciotemporal estaríamos en un escenario similar al siguiente:

Vamos a estudiar la zona circundante al lejano punto b. Vamos a movernos en los alrededores a una distancia radial de h, donde h es, comparativamente, un número muchísimo más pequeño que b:

$$\frac{h}{b} \lll 1$$

Hagamos ahora un cambio de coordenadas. En vez de trabajar con la coordenada x, vamos a trabajar con la coordenada $b + h$:

$$x = b + h$$

También vamos a necesitar definir dx. Para ello diferenciemos a ambos lados de la expresión:

$$dx = db + dh$$

Puesto que b es constante:

$$dx = (0) + dh$$

$$dx = dh$$

De manera que:

$$dx^2 = dh^2$$

Ahora redefinamos el elemento de línea del espaciotiempo de Rindler:

$$ds^2 = -\frac{x^2}{b^2}c^2dt^2 + dx^2$$

$$ds^2 = -\frac{(b+h)^2}{b^2}c^2dt^2 + dh^2$$

$$ds^2 = -\left(\frac{b^2 + h^2 + 2bh}{b^2}\right)c^2dt^2 + dh^2$$

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{h^2}{b^2} + \frac{2h}{b}\right)c^2dt^2 + dh^2$$

Hagamos ahora una aproximación. En el elemento que hemos marcado en color rojo tenemos un numerador muy pequeño (comparativamente con respecto al denominador) elevado al cuadrado y en el denominador tenemos un número inmenso elevado al cuadrado. Esto, claro, lo podemos aproximar a cero, es decir:

$$ds^2 \approx -\left(1 + \frac{2h}{b}\right)c^2dt^2 + dh^2$$

Podemos seguir transformando nuestra expresión. Recordemos que acabamos de decir que:

$$g = \frac{c^2}{b} \rightarrow b = \frac{c^2}{g}$$

Luego podemos reescribir como:

$$ds^2 \approx -\left(1 + \frac{2gh}{c^2}\right)c^2dt^2 + dh^2$$

Ahora vamos a intentar llegar a una expresión en la que la Energía potencial newtoniana ($E_p = mgh$) tenga algo que ver. De hecho ya vemos que en el numerador del término que hemos marcado en rojo en la anterior expresión está cerca. Multipliquemos dicho término por 1 bajo la forma de $\frac{m}{m}$ (donde m es la masa de la partícula que está en los alrededores del punto b):

$$ds^2 \approx -\left(1 + 2\frac{mgh}{mc^2}\right)c^2dt^2 + dh^2$$

Llamemos Φ la expresión que nos recuerda a la E_p newtoniana ($\Phi = mgh$) y, similarmente a como hemos hecho en alguna ocasión anterior, llamemos:

$$\hat{\Phi} = \frac{mgh}{mc^2}$$

Así, podemos reescribir el elemento de línea como:

$$ds^2 \approx -\left(1 + 2\hat{\Phi}\right)c^2dt^2 + dh^2$$

Ahora que tenemos la métrica aplicable a la 'zona del punto lejano b', calculemos la conexión métrica: los símbolos de Christoffel. Para ello recordemos el truquillo que ya hemos empleado y que se trataba de derivar (en función de las dos variables posibles, en este caso t (∂_0) y h (∂_0)) todos los productos posibles (cruzados y no cruzados) de los vectores de la base. Comencemos.

- $e_0 e_0 = -\left(1 + 2\hat{\Phi}\right)$
  - $\partial_0(e_0 e_0) = \partial_0\left[-\left(1 + 2\hat{\Phi}\right)\right]$

$$(\partial_0 e_0)e_0 + e_0(\partial_0 e_0) = \partial_0\left[-\left(1 + 2\hat{\Phi}\right)\right]$$
$$(\partial_0 e_0)e_0 + e_0(\partial_0 e_0) = 0$$
$$2(\partial_0 e_0)e_0 = 0$$
$$2(\Gamma^0_{00}e_0 + \Gamma^1_{00}e_1)e_0 = 0$$
$$2\Gamma^0_{00}e_0e_0 + \Gamma^1_{00}e_1e_0 = 0$$
$$2\Gamma^0_{00} = 0$$
$$\Gamma^0_{00} = 0$$

  - $\partial_1(e_0 e_0) = \partial_1\left[-\left(1 + 2\hat{\Phi}\right)\right]$

$$(\partial_1 e_0)e_0 + e_0(\partial_1 e_0) = \partial_1\left(-1 - 2\hat{\Phi}\right)$$
$$(\Gamma^0_{10}e_0 + \Gamma^1_{10}e_1)e_0 + e_0(\Gamma^0_{10}e_0 + \Gamma^1_{10}e_1) = 0 - 2\partial_1\hat{\Phi}$$
$$\Gamma^0_{10}e_0e_0 + \Gamma^1_{10}e_1e_0 + \Gamma^0_{10}e_0e_0 + \Gamma^1_{10}e_1e_0 = -2\partial_1\hat{\Phi}$$
$$\Gamma^0_{10}e_0e_0 + (0) + \Gamma^0_{10}e_0e_0 + (0) = -2\partial_1\hat{\Phi}$$
$$2\Gamma^0_{10}e_0e_0 = -2\partial_1\hat{\Phi}$$
$$2\Gamma^0_{10}\left[-1 - 2\hat{\Phi}\right] = -2\partial_1\hat{\Phi}$$
$$2\Gamma^0_{10}\left[-1 - 2\hat{\Phi}\right] = -2\partial_1\hat{\Phi}$$
$$\Gamma^0_{10}\left[-1 - 2\hat{\Phi}\right] = -\partial_1\hat{\Phi}$$
$$\Gamma^0_{10} = \frac{-\partial_1\hat{\Phi}}{\left[-1 - 2\hat{\Phi}\right]} = \frac{\partial_h\hat{\Phi}}{\left[1 + 2\hat{\Phi}\right]}$$

- $e_0 e_1 = 0$ (recordemos que la métrica es ortogonal).

- $\partial_0(e_0e_1) = \partial_0 0$

$$(\partial_0 e_0)e_1 + e_0(\partial_0 e_1) = \partial_0 0$$

$$(\Gamma^0_{00}e_0 + \Gamma^1_{00}e_1)e_1 + e_0(\Gamma^0_{01}e_0 + \Gamma^1_{01}e_1) = 0$$

$$\Gamma^0_{00}e_0e_1 + \Gamma^1_{00}e_1e_1 + \Gamma^0_{01}e_0e_0 + \Gamma^1_{01}e_1e_0 = 0$$

$$\Gamma^1_{00}e_1e_1 + \Gamma^0_{01}e_0e_0 = 0$$

$$\Gamma^1_{00}(1) + \left(\frac{\partial_h \widehat{\Phi}}{[1 + 2\widehat{\Phi}]}\right)([-(1 + 2\widehat{\Phi})]) = 0$$

$$\Gamma^1_{00} - \partial_h \widehat{\Phi} = 0$$

$$\Gamma^1_{00} = \partial_h \widehat{\Phi}$$

- $\partial_1(e_0e_1) = \partial_1 0$

$$(\partial_1 e_0)e_1 + e_0(\partial_1 e_1) = \partial_1 0$$

$$(\Gamma^0_{10}e_0 + \Gamma^1_{10}e_1)e_1 + e_0(\Gamma^0_{11}e_0 + \Gamma^1_{11}e_1) = 0$$

$$\Gamma^0_{10}e_0e_1 + \Gamma^1_{10}e_1e_1 + \Gamma^0_{11}e_0e_0 + \Gamma^1_{11}e_1e_0 = 0$$

$$\Gamma^1_{10}e_1e_1 + \Gamma^0_{11}e_0e_0 = 0$$

$$\Gamma^1_{10}(1) + \Gamma^0_{11}\left(-1 - 2\widehat{\Phi}\right) = 0$$

$$(0)(1) + \Gamma^0_{11}\left(-1 - 2\widehat{\Phi}\right) = 0$$

(OBSERVACIÓN. Efectivamente $\Gamma^1_{10} = 0$, lo que pasa es que aún no lo hemos visto. Lo vamos a ver en el siguiente desarrollo. Digamos que esto lo hemos dejado en suspenso hasta que hemos resuelto los siguientes Símbolos de Christoffel y, después, hemos vuelto hacia atrás para resolverlo. Lo hemos dejado así por mantener un modo ordenado de abordar las ecuaciones)

$$\Gamma^0_{11}\left(-1 - 2\widehat{\Phi}\right) = 0$$

$$\Gamma^0_{11} = 0$$

(OBSERVACIÓN. No es necesario hacer el otro cruzado porque nos daría lo mismo)

- $e_1e_1 = 1$

- $\partial_0(e_1e_1) = \partial_0 0$

$$(\partial_0 e_1)e_1 + e_1(\partial_0 e_1) = \partial_1 0$$
$$(\Gamma^0_{01} e_0 + \Gamma^1_{01} e_1)e_1 + e_1(\Gamma^0_{01} e_0 + \Gamma^1_{01} e_1) = 0$$
$$\Gamma^0_{01} e_0 e_1 + \Gamma^1_{01} e_1 e_1 + \Gamma^0_{01} e_0 e_1 + \Gamma^1_{01} e_1 e_1 = 0$$
$$\Gamma^1_{01} e_1 e_1 + \Gamma^1_{01} e_1 e_1 = 0$$
$$2\Gamma^1_{01} e_1 e_1 = 0$$
$$2\Gamma^1_{01}(1) = 0$$
$$\Gamma^1_{01} = 0$$

(OBSERVACIÓN. Éste es el que hemos necesitado antes)

- $\partial_0(e_1 e_1) = \partial_0 0$

$$(\partial_0 e_1)e_1 + e_1(\partial_0 e_1) = \partial_1 0$$
$$(\Gamma^0_{01} e_0 + \Gamma^1_{01} e_1)e_1 + e_1(\Gamma^0_{01} e_0 + \Gamma^1_{01} e_1) = 0$$
$$\Gamma^0_{01} e_0 e_1 + \Gamma^1_{01} e_1 e_1 + \Gamma^0_{01} e_0 e_1 + \Gamma^1_{01} e_1 e_1 = 0$$
$$\Gamma^1_{01} e_1 e_1 + \Gamma^1_{01} e_1 e_1 = 0$$
$$2\Gamma^1_{01} e_1 e_1 = 0$$
$$2\Gamma^1_{01}(1) = 0$$
$$\Gamma^1_{01} = 0$$

- $\partial_1(e_1 e_1) = \partial_1 0$

$$(\partial_1 e_1)e_1 + e_1(\partial_1 e_1) = \partial_1 0$$
$$(\Gamma^0_{11} e_0 + \Gamma^1_{11} e_1)e_1 + e_1(\Gamma^0_{11} e_0 + \Gamma^1_{11} e_1) = 0$$
$$\Gamma^0_{11} e_0 e_1 + \Gamma^1_{11} e_1 e_1 + \Gamma^0_{11} e_0 e_1 + \Gamma^1_{11} e_1 e_1 = 0$$
$$\Gamma^1_{11} e_1 e_1 + \Gamma^1_{11} e_1 e_1 = 0$$
$$2\Gamma^1_{11} e_1 e_1 = 0$$
$$2\Gamma^1_{11}(1) = 0$$
$$\Gamma^1_{11} = 0$$

Y ya tendríamos la conexión métrica de un nuestro espaciotiempo de Rindler de dos dimensiones para la zona en que $x = b + h$:

$$\Gamma^0_{00} = 0 \quad // \quad \Gamma^0_{11} = 0$$

$$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{\partial_h \widehat{\Phi}}{[1 + 2\widehat{\Phi}]}$$

$$\Gamma^1_{10} = \Gamma^1_{01} 0$$

$$\Gamma^1_{00} = \partial_h \widehat{\Phi} \quad // \quad \Gamma^1_{11} = 0$$

Ahora, conociendo la Conexión Métrica, calculemos la expresión para la geodésica en este espaciotiempo. Así, usando los símbolos de Christoffel asociados a la conexión sin torsión, la curva geodésica de mínima longitud que pasa por un punto h es[338]:

$$\frac{d^2h}{d\tau^2} + \Gamma^1_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

Sabemos que el único Christoffel con supraíndice 1 que sobrevive es $\Gamma^1_{00} = \partial_h \widehat{\Phi}$, donde $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, entonces, nuestra geodésica tendrá la forma[339]:

$$\frac{d^2h}{d\tau^2} + \Gamma^1_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = 0$$

Puesto que $dx^0 = d(ct)$:

$$\frac{d^2h}{d\tau^2} + \Gamma^1_{00} \frac{d(ct)}{d\tau} \frac{d(ct)}{d\tau} = 0$$

$$\frac{d^2h}{d\tau^2} + \Gamma^1_{00} \left(\frac{d(ct)}{d\tau}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2h}{d\tau^2} + \Gamma^1_{00} c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2h}{d\tau^2} + (\partial_h \widehat{\Phi}) c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2h}{d\tau^2} + \left(\partial_h \frac{mgh}{mc^2}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2h}{d\tau^2} + \frac{mg}{mc^2} c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2h}{d\tau^2} + \frac{g}{c^2} c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0$$

[338] Decir dónde y si no estás así, asimilarlo...

[339] Ojo a la correspondencia de los subíndices (marcados con colores) con las variables que se derivan (también marcadas en colores).

$$\frac{d^2h}{d\tau^2} + g\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2h}{d\tau^2} = -g\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$$

Que es la expresión de la geodésica para esa lejana '$zona\ x = b + h$'.

Viajemos mentalmente ahora a esa zona e imaginemos un escenario newtoniano en el que el tiempo es muy bajo (apenas acaba de empezar a desplazarse la partícula) y, por lo tanto, la velocidad es de los rangos propios del mundo clásico: muy baja.

Estaremos de acuerdo en que, en este escenario, apenas habrá diferencia entre dt y $d\tau$. Es decir que:

$$\frac{dt}{d\tau} \approx 1$$

Por lo que podremos redefinir aproximadamente la geodésica como:

$$\frac{d^2h}{d\tau^2} = -g(1)^2$$

$$\frac{d^2h}{d\tau^2} = -g$$

Esto que parece tan… raro… (bueno, no lo es tanto), en realidad es algo que conocemos muy pero que muy bien. Tenemos que la segunda derivada de un cambio espacial (una trayectoria) es igual a $-g$. ¿Qué es la segunda derivada del espacio? Efectivamente: l aceleración. Es decir que estamos diciendo que, a bajas velocidades:

$$a = -g$$

Lo cual es perfectamente compatible con el modelo newtoniano.

Es más, si multiplicamos por la masa de la partícula a ambos lados… ¿qué tenemos?

$$ma = -mg$$

Es decir, una expresión de equiparación de fuerzas conservativas.

Sabemos que podemos expresar un conjunto de fuerzas conservativas como[340]:

[340] Sabemos que la energía es una magnitud escalar que asociamos a, digámoslo así, la capacidad de acción dentro de un sistema. Algo así como la capacidad de realizar un trabajo o, más bien, la cantidad de trabajo ($W = F \cdot r$, es decir, una fuerza F ejercida a lo largo de una distancia r) que se puede realizar en un sistema cerrado (si queremos que la magnitud sea constante).
En este sentido, la Energía Potencial de un sistema cerrado es la capacidad que tiene un cuerpo para realizar un trabajo sólo debido a su posición en el, por ejemplo, campo gravitatorio, que es un campo de fuerzas conservativas, es decir, un campo en el que el trabajo que se desarrolla a lo largo de una trayectoria cerrada acaba siendo nulo ($W = 0$)(obviamente, 'se baja lo mismo que se sube'). Esto quiere decir que el trabajo depende exclusivamente del estado inicial y el estado final del devenir del cuerpo en el sistema sin importar 'lo que suceda durante el trayecto'. Por supuesto, puesto que el sistema considerado es cerrado, esta capacidad de desarrollar un trabajo, esta energía, es constante.
Sabemos que el trabajo es:

$$dW = F \cdot dr$$

$$W_{IF} = \int_{Inicial}^{Final} F \cdot dr$$

Por otro lado sabemos que la capacidad de trabajo de un sistema gravitatorio que está, digamos, en Stand-by, como en pause, preparado para empezar a moverse (partículas que empiezan a caer o lo que sea) corresponde a la Energía Potencial que, en el mundo clásico, viene dada por la expresión:

$$E_P = mgh$$

Por otro lado, en un sistema que se desarrolla podemos calcular la diferencia de E_P entre dos momentos diferentes:

$$\Delta E_P = E_{P_F} - E_{P_I}$$

Donde ΔE_P es la energía consumida en el proceso, es decir, el trabajo realizado:

$$\Delta E_P = W_{IF}$$

Así:

$$\Delta E_P = \int_{Inicial}^{Final} F \cdot dr$$

De donde podemos definir la Fuerza total ejercible por el sistema como el gradiente de la Energía potencial (en negativo por el sentido de la fuerza que se ejerce por el potencial gravitacional):

$$F = \nabla E_P$$

Recordemos algunos conceptos necesarios para entender bien la función que ejerce aquí el gradiente.

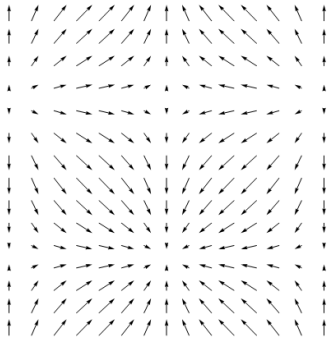
- Campo escalar.

Recordémoslo con un ejemplo. UN campo escalar de dos dimensiones es una distribución de escalares a lo largo de un plano bidimensional que nos da una información sobre la magnitud determinadas variables (temperatura, presión, altura, …) en los diferentes puntos del plano. Por ejemplo, un mapa de curvas de nivel de una zona geográfica:

Donde cada línea los puntos que tienen un mismo valor para la altura. Es decir, podemos imaginar nuestro diagrama como dos montañas prácticamente unidas donde la cumbre son los círculos centrales de cada figura (pues observamos que hay como dos figuras unidas) y las líneas cerradas que las circundan son las diferentes alturas en el descenso de la montaña. A cada línea le correspondería, en todo caso, una magnitud escalar, por ejemplo: $1100m$, $1000m$, $900m$, etc… y así, cada punto cada línea tendria un valor escalar, en este caso, una altura asociada.

- Campo vectorial.

Por resumir un poco podríamos decir que es lo mismo pero en vez de escalares usamos vectores, es decir, objetos matemáticos que tienen módulo, dirección y sentido. Por ejemplo:



Este caso no tiene nada que ver con el anterior, es un mero ejemplo cogido de internet. Pero imaginemos que los vectores vienen a indicar la dirección y sentido de las pendientes de la montaña (no su altura) y mediante el módulo se aprecia el grado, la intensidad de la misma. A más módulo más escarpado.

- Operador Nabla.

Transforma un escalar en una magnitud vectorial:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z} + \cdots$$

- Gradiente (compleméntese con la nota …).

Fundamental: el gradiente ***se aplica sobre un campo escalar*** y ***devuelve como resultado un campo vectorial*** donde los vectores ***siempre*** apuntan hacia el lado creciente (hacia la dirección en que crecían los escalares en el campo escalar sobre el que se aplica) y cuya intensidad de cambio viene marcad por el módulo del vector (vectores) resultante. Es la aplicación del operador Nabla a un campo (a una función) escalar (no se puede aplicar a un campo vectorial).
Así, si aplicamos el gradiente a una función escalar como, por ejemplo:

$$f_{(x,y)} = x^2y^3$$

Si le aplicamos el gradiente obtendremos un campo vectorial con la forma:

$$\nabla f_{(x,y)} = \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla f_{(x,y)} = \frac{\partial(x^2y^3)}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial(x^2y^3)}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial(x^2y^3)}{\partial z}\hat{k}$$

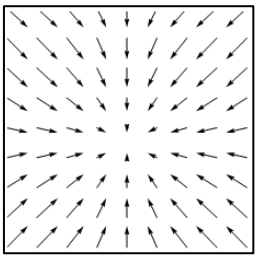
$$\nabla f_{(x,y)} = 2xy^3\,\hat{\imath} + x^2 3y^2\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k} = \vec{F}$$

- Divergencia.

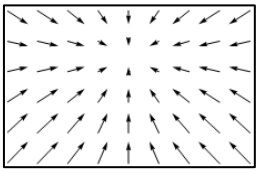
Al contrario de lo que sucedía con el Gradiente, la Divergencia sólo se puede aplicar a un campo vectorial. La Divergencia se aplica sobre un campo vectorial y devuelve un campo escalar.
¿Para qué sirve? Digamos que sirve para saber si en una región del espacio, en un sistema, hay más flujo entrante que saliente o viceversa o, también sucede, son exactamente iguales y por lo tanto el sistema es estable. Podríamos definirlo como un estudio de la 'cantidad de flecha' (lo decimos en singular, pues no es un mero conteo de 'flechas', sino que contamos la cantidad de flechas y también se pondera por su módulo, es decir, se mide la cantidad de flujo entrante/saliente) que entra o sale en un sistema.

- Si hay la misma cantidad de flujo entrante que saliente estaremos ante una Divergencia$= 0$.

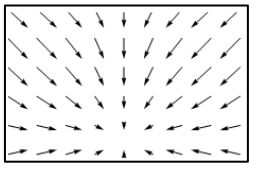
(OBSERVACIÓN. Cuidado con esto y no caigamos en engaño. Aquí no todos los vectores (de los que suponemos, por supuesto, que todos tienen idéntico módulo) están 'entrando' aunque nos lo parezca. Hay algunos que van hacia abajo y otros que van hacia arriba, justo en sentido contrario. Unos entran y otros salen)



- Si hay más flujo saliente, hablaremos de una Divergencia positiva (si definimos 'hacia arriba' como saliente).



- Si hay más flujo entrante, hablaremos de una Divergencia negativa (si definimos 'hacia abajo' como entrante).



Se suele escribir como 'Nabla punto':

$$\nabla \cdot$$

Y se aplica a un campo vectorial, arrojando como resultado un campo escalar.

Su forma es:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z$$

Es decir, la derivada parcial de la componente del vector (del campo vectorial) en cada dirección. Aplicado al caso de antes tendríamos que si:

$$\vec{F} = 2xy^3\,\hat{\imath} + x^2 3y^2\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial(2xy^3)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2 3y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(0)}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = 2y^3 + x^2 6y + 0 = g_{(x,y)}$$

Que es una función que define un campo escalar que recoge información acerca del flujo entrante y saliente en el sistema.

- Laplaciano.

Si tuviéramos una función, por, ejemplo: $f_{(h)} = mgh$, que define un campo escalar y quisiéramos saber si el sistema es un sistema de fuerzas conservativas, es decir, que ni se incrementan ni decrecen, bastaría con aplicar a la función, primero el gradiente y después la divergencia. Por ejemplo, considerando que la E_P de un sistema es caracterizable mediante un campo escalar que define la energía mediante un escalar para cada uno de sus puntos, podríamos aplicar la siguiente operación:

$$div \cdot (grad\ E_P) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla E_P) = 0$$

$$\nabla^2 E_P = 0$$

Estaríamos definiendo la E_P de un sistema como un conjunto de fuerzas conservativas al que "ni entran ni salen fuerzas", es decir, se conservan.

Al operador que se conforma mediante la aplicación de los dos operadores se le denomina Operador Laplaciano y se le suele denominar mediante el símbolo: Δ

$$\nabla \cdot (\nabla) = \Delta$$

Y, en relación a la energía potencial, existe una generalización de la aplicación de este operador a la que se denomina ***Ecuación de Poisson***:

$$\nabla^2 E_P = 0$$

Según la nomenclatura de nuestro hilo principal:

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

Finalmente, ya que estamos desarrollando las diversas utilidades del operador Nabla, terminemos por definir el Rotacional.

- Rotacional.

Se aplica a un campo vectorial y arroja como resultado otro campo vectorial. Es muy simple: si tenemos un campo vectorial 'giratorio' en sentido de las agujas del reloj, obtendremos un campo

$$\vec{F} = -\nabla E_p$$

Recordemos que decíamos, para ahorrar esfuerzo escribiendo, definíamos la E_p newtoniana como Φ, es decir:

$$\vec{F} = -\nabla \Phi$$

Podremos decir, entonces, que la energía potencial, derivada en función del único parámetro libre que hay (la distancia 'h') es lo mismo que decir:

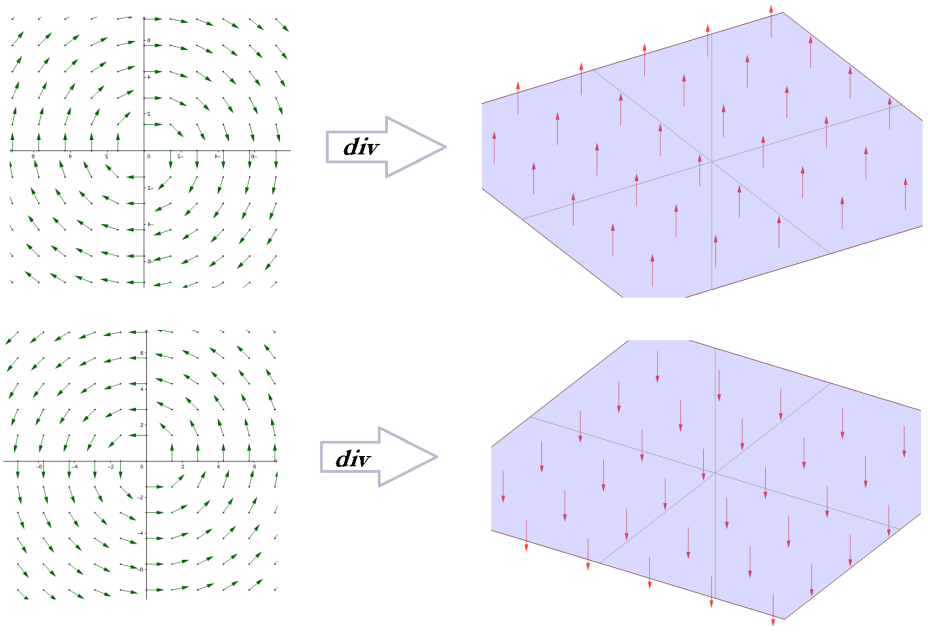
$$-\nabla \Phi = -mg$$

$$\nabla \Phi = mg$$

Si, suponemos que se trata de un campo de fuerzas conservativas, al aplicar la divergencia (en función, de nuevo, de 'h')[341] (como hemos visto en la nota anterior) hemos de postular que:

---

vectorial con vectores que apuntan 'hacia arriba' con mayor o menor módulo en relación al ángulo de giro de los vectores del campo vectorial inicial 'giratorio' (y viceversa para el giro en contra de las agujas del reloj).



El rotacional se expresa como el producto vectorial de la divergencia sobre un campo vectorial:

$$\nabla \times \vec{F}$$

Resumimos:

- Gradiente de una función (campo) escalar: $\nabla f_{(x,y,\dots)}$
- Divergencia de una función (campo) vectorial: $\nabla \cdot \vec{F}$
- Rotacional de una función (campo) vectorial: $\nabla \times \vec{F}$
- Laplaciano de una función (campo) escalar: $\Delta f_{(x,y,\dots)}$

[341] Véase nota anterior.

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

Que es la Ecuación de Poisson que viene a decir que '*ni entran ni salen fuerzas*' del campo.

Demos ahora un paso interesantísimo. Recordemos la métrica de Rindler:

$$ds^2 \approx -\left(1 + 2\widehat{\Phi}\right)c^2 dt^2 + dh^2$$

Recordemos también que hemos definido la E_p newtoniana como:

$$\Phi = mgh$$

Pero que hemos definido una especie de E_p corregida/relativista como:

$$\widehat{\Phi} = \frac{mgh}{mc^2}$$

Si usamos esta E_p corregida en nuestra Ecuación de Poisson y usamos al cmpleto el elemento g_{00} de la métrica, podremos decir que :

$$\nabla^2 g_{00} = 0$$

Pues, efectivamente, resulta que se cumple perfectamente para el elemento g_{00} de la métrica de Rindler. Veámoslo:

$$\nabla \cdot \left(\nabla\left[-\left(1 + 2\widehat{\Phi}\right)\right]\right) = 0$$

$$\nabla \cdot \left(\nabla\left[-\left(1 + 2\frac{mgh}{mc^2}\right)\right]\right) = 0$$

Veamos el gradiente, marcado en color rojo:

$$\nabla\left[-\left(1 + 2\frac{mgh}{mc^2}\right)\right] =$$

$$0 - \nabla\left(2\frac{mgh}{mc^2}\right) = 0 - \nabla\left(2\frac{gh}{c^2}\right) =$$

$$0 - \left(2\frac{g}{c^2}\right)\nabla h =$$

$$0 - \left(2\frac{g}{c^2}\right)\nabla h \ \ ^{342} = \frac{\partial h}{\partial h}\hat{h} + \frac{\partial h}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial h}{\partial z}\hat{k} + \cdots$$

$$0 - \left(2\frac{g}{c^2}\right)\nabla h \ \ ^{343} = 1\hat{h} + 0\hat{j} + 0\hat{k} + \cdots$$

Y ahora aplicamos la divergencia:

$$\nabla \cdot (1\hat{h} + 0\hat{j} + 0\hat{k} + \cdots) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}F_h + \frac{\partial}{\partial y}F_y + \frac{\partial}{\partial z}F_z \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(1) + \frac{\partial}{\partial y}0 + \frac{\partial}{\partial z}0 + \cdots = 0$$

[342] Digamos que h es la dirección x.
[343] Digamos que h es la dirección x.

Es decir, que, efectivamente:

$$\nabla^2 g_{00} = 0$$

¡Y este es algo absolutamente maravilloso pues tenemos una ecuación en la que la incógnita es un elemento de la métrica!

Justo por esta línea discurrió Albert Einstein. Planteó una ecuación en la que la incógnita era un elemento de la métrica. Es decir, planteó una serie de condiciones y propuesto una expresión cuyo parámetro a encontrar era una métrica que fuera reflejo del espacio en el que dichas condiciones establecidas se cumplían. Un espacio que reuniera las condiciones que se dan en un espacio de Rindler (pero de dimensiones 1+3) en la distancia lejana (como hemos visto) en que la aceleración asociada a una partícula fuera igual a la gravedad: $a = g$. Un espacio en el que pudiéramos considerar dicha aceleración más como una propiedad del espacio que como una fuerza externa. Justo de este punto surgieron las ecuaciones de Einstein.

Sin embargo, antes de dar el paso a la soluciones de Einstein, vamos a abordar la solución de Schwarzschild porque podemos realizar un desarrollo pedagógico que nos permita comprender mejor el proceso total.

Demos, pues el salto de Rindler a Schwarzschild. Recordemos de nuevo la métrica de Rindler:

$$ds^2 = -\frac{x^2}{b^2}c^2dt^2 + dx^2$$

Y recordemos la aproximación que hicimos:

$$ds^2 = -\frac{(b+h)^2}{b^2}c^2dt^2 + dh^2$$

$$ds^2 = -\left(\frac{b^2 + h^2 + 2bh}{b^2}\right)c^2dt^2 + dh^2$$

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{h^2}{b^2} + \frac{2h}{b}\right)c^2dt^2 + dh^2$$

$$ds^2 \approx -\left(1 + \frac{2h}{b}\right)c^2dt^2 + dh^2$$

Supongamos que hacemos una extensión de esta aproximación. Es decir, supongamos que en vez de ser una aproximación que funciona en una zona determinada del espacio es una expresión ***exacta*** [344], es decir:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2h}{b}\right)c^2dt^2 + dh^2$$

Observamos que comparando las dos formas de la métrica:

[344] ¿Quién supuso esto y por qué lo hizo? ¿Fue Schwarzschild?

$$ds^2 = -\frac{x^2}{b^2}c^2dt^2 + dx^2$$

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2h}{b}\right)c^2dt^2 + dx^2$$

Resulta que podemos identificar:

$$\frac{x^2}{b^2} = 1 + \frac{2h}{b}$$

(OBSERVACIÓN. Insistimos: es igual, no aproximado)

Derivemos en ambos lados de la expresión, estudiemos el cambio[345]:

$$\frac{2x}{b^2}dx = \frac{2}{b}dh$$

$$\frac{x}{b^2}dx = \frac{1}{b}dh$$

Elevemos ahora al cuadrado en ambos lados:

$$\frac{x^2}{b^4}dx^2 = \frac{1}{b^2}dh^2$$

$$\frac{x^2}{b^2}\frac{1}{b^2}dx^2 = \frac{1}{b^2}dh^2$$

$$\frac{x^2}{b^2}dx^2 = dh^2$$

$$dx^2 = \frac{b^2}{x^2}dh^2$$

Pero recordemos que:

$$\frac{x^2}{b^2} = 1 + \frac{2h}{b}$$

Luego:

$$\frac{b^2}{x^2} = \frac{1}{1 + \frac{2h}{b}}$$

De manera que nuestra expresión:

$$dx^2 = \frac{b^2}{x^2}dh^2$$

[345] ¿Por qué hacemos eso? ¿Qué clase de razonamiento hay detrás?

queda como:

$$dx^2 = \left(\frac{1}{1+\frac{2h}{b}}\right) dh^2$$

Así, retomando nuestro elemento de línea:

$$ds^2 = -\left(1+\frac{2h}{b}\right)c^2dt^2 + dx^2$$

Podemos reescribirlo como:

$$ds^2 = -\left(1+\frac{2h}{b}\right)c^2dt^2 + \left(\frac{1}{1+\frac{2h}{b}}\right) dh^2$$

Ahora recordemos también que en el espacio de Rindler habíamos definido:

$$b = \frac{c^2}{g}$$

Luego, si tenemos que:

$$ds^2 = -\left(1+2\frac{1}{b}h\right)c^2dt^2 + \left(\frac{1}{1+2\frac{1}{b}h}\right) dh^2$$

Sustituyendo:

$$ds^2 = -\left(1+2\frac{g}{c^2}h\right)c^2dt^2 + \left(\frac{1}{1+2\frac{g}{c^2}h}\right) dh^2$$

Y si metemos el 1 como $\frac{m}{m}$:

$$ds^2 = -\left(1+2\frac{mgh}{mc^2}\right)c^2dt^2 + \left(\frac{1}{1+2\frac{mgh}{mc^2}}\right) dh^2$$

Y llamando, como hicimos, a la 'E_P corregida':

$$\hat{\Phi} = \frac{mgh}{mc^2}$$

Podemos decir que:

$$ds^2 = -(1+2\hat{\Phi})c^2dt^2 + \left(\frac{1}{1+2\hat{\Phi}}\right) dh^2$$

Recordemos que decíamos que:

$$\Phi = -mgh \rightarrow E_P \text{ newtoniana}$$

$$\hat{\Phi} = -mgh \cdot \frac{1}{mc^2} = \frac{-mgh}{mc^2} \rightarrow E_P \text{ 'corregida'}$$

Pero… ¿y si, ya que de Energía potencial clásica estamos hablando, usamos una expresión newtoniana más exacta para la misma?

$$\Phi = \frac{-GMm}{r}$$

En tal caso, nuestra E_P 'corregida' queda como:

$$\hat{\Phi} = \left(\frac{-GMm}{r}\right) \cdot \frac{1}{mc^2}$$

$$\hat{\Phi} = \frac{-GM}{rc^2}$$

Y ahora, empleemos esta expresión de la E_P 'corregida' en la expresión del elemento de línea:

$$ds^2 = -(1 + 2\hat{\Phi})c^2dt^2 + \left(\frac{1}{1 + 2\hat{\Phi}}\right)dh^2$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dt^2 + \left(\frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}}\right)dh^2$$

Supongamos, recordemos que estamos de momento en una sola dimensión espacial, que la distancia h que estamos manejando es en realidad una distancia radial r:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dt^2 + \left(\frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}}\right)dr^2$$

Y ahora, tal y como estamos diciendo desde el principio, supongamos (más bien afirmamos) que este espacio de Schwarzschild presenta simetría esférica y, por lo tanto, podemos añadir, sin problemas, las dimensiones adicionales de la métrica que recogen dicha simetría (por supuesto, en coordenadas esféricas, pues hemos dicho que estamos ante una distancia radial). En tal caso el elemento de línea quedaría como sigue:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta d\varphi^2$$

O lo que es lo mismo:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$

Que en muchos textos lo hemos visto como:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2\Omega$$

Que matricialmente queda como:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 sin^2 \end{pmatrix}$$

Esta métrica define el espaciotiempo deformado (curvado) por masas como planetas o agujeros negros. Es cierto que en todo momento nos hemos referido a agujeros negros porque, digamos, es la parte más divertida de todo esto, la más extraña, la que da pie a más especulaciones de carácter metafísicas pero, como comentamos, esta métrica también es válida para el espacio afectado por cualquier cuerpo masivo… que no esté rotando. Esto es importante: que no esté rotando, sin momento angular.

Dentro de un agujero negro de Schwarzschild aparece una hipersuperficie[346] limite tal que al acercarnos a ella el Tensor de Riemann, que marca la curvatura del espaciotiempo, crece y crece y se vuelve loco dando lugar a lo que conocemos como una singularidad espaciotemporal en la que el tejido espaciotemporal es tan absolutamente extremo que el uso de cualquier herramienta científica de las que disponemos (en todo caso, quizás la cuántica tenga algo que decir) es absolutamente estéril.

¿Qué tipos de agujeros negros 'existen'?

- Agujeros Negros de Schwarzschild.

  Es el más simple posible (aunque de improbable existencia) pero que nos sirve de perfectamente de modelo para empezar a analizar los fenómenos que se producen en torno a curvaturas extremas del espaciotiempo.

  La única característica que tiene este Agujero Negro es la masa de que consta (bueno, y su radio). Es un Agujero Negro estático, que no rota (es muy poco probable encontrar un cuerpo celeste que no rote…). De hecho, si nos fijamos en su métrica los únicos parámetros que encontramos son la Masa y el radio.

- Agujeros Negros de Kerr.

  Es como el de Schwarzschild pero presenta rotación y, por lo tanto, en su métrica aparecerán parámetros relacionados con el Momento Angular (son los de mayor probabilidad de existencia en la naturaleza).

- Agujeros Negros de Reissner-Nordström.

  Es justo como el de Schwarzschild: estático, pero presenta carga eléctrica.

- Agujeros Negros de Kerr-Newman.

  Son como los Agujeros Negros de Kerr: rotantes, pero además contienen carga eléctrica.

[346] Una hipersuperficie es una variedad n-dimensional con $n > 2$, es decir, un objeto geométrico que generaliza la noción de una superficie bidimensional a dimensiones superiores.

Para seguir caracterizando el espacio de Schwarzschild, calculemos las conexión métrica. Puesto que estamos ante un espacio de 4 dimensiones (1+3) la cosa va a ser bastante larga:

∂_0	e_0e_0	∂_0	e_0e_1	∂_0	e_0e_2	∂_0	e_0e_3
∂_1		∂_1		∂_1		∂_1	
∂_2		∂_2		∂_2		∂_2	
∂_3		∂_3		∂_3		∂_3	
∂_0	e_1e_0	∂_0	e_1e_1	∂_0	e_1e_2	∂_0	e_1e_3
∂_1		∂_1		∂_1		∂_1	
∂_2		∂_2		∂_2		∂_2	
∂_3		∂_3		∂_3		∂_3	
∂_0	e_2e_0	∂_0	e_2e_1	∂_0	e_2e_2	∂_0	e_2e_3
∂_1		∂_1		∂_1		∂_1	
∂_2		∂_2		∂_2		∂_2	
∂_3		∂_3		∂_3		∂_3	
∂_0	e_3e_0	∂_0	e_3e_1	∂_0	e_3e_2	∂_0	e_3e_3
∂_1		∂_1		∂_1		∂_1	
∂_2		∂_2		∂_2		∂_2	
∂_3		∂_3		∂_3		∂_3	

Donde:

$$\partial_0 \rightarrow \partial_t$$

$$\partial_1 \rightarrow \partial_r$$

$$\partial_2 \rightarrow \partial_\theta$$

$$\partial_3 \rightarrow \partial_\varphi$$

Por motivos de pura simetría y conmutatividad del modelo, no sería necesario calcular los elementos marcados en rojo. El resto… pues hay que ponerse y, además, es tremendamente divertido (en serio, es idóneo a modo de pasatiempo: yo lo he calculado mientras esperaba con Frodo en un pipican a que Sofía, Éire y Belén salieran de entrenar en las pistas de atletismo de La Cartuja). Son 40 cálculos.

Recodemos la métrica.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta d\varphi^2$$

Por simplificar:

$$a = \frac{2GM}{c^2}$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta d\varphi^2$$

Luego:

$$e_0e_0 = -1 + \frac{a}{r} \quad // \quad e_1e_1 = 1 - \frac{a}{r} \quad // \quad e_2e_2 = r^2 \quad // \quad e_3e_3 = r^2 sin^2$$

Y ahora comencemos. Va a ser largo. Lo idóneo es que quien esté leyendo esto lo calcule por sí mismo y después verifique los resultados con los que vamos a recoger aquí. Siendo así podría saltarse perfectamente las siguientes páginas pero, insisto, calcular esto es placentero…Ahora mismo lo estoy pasando a formato electrónico mientras escucho piezas de Juan de la Encina y Jethro Tull.

- $e_0e_0 = -1 + \frac{a}{r}$
  - $\partial_0(e_0e_0) = \partial_0\left(-1 + \frac{a}{r}\right)$

$$(\partial_0 e_0)e_0 + e_0(\partial_0 e_0) = \partial_0\left(-1 + \frac{a}{r}\right)$$

$$2(\partial_0 e_0)e_0 = 0$$

$$2(\Gamma^0_{00}e_0 + \Gamma^1_{00}e_1 + \Gamma^2_{00}e_2 + \Gamma^3_{00}e_3)e_0 = 0$$

Sólo sobrevive:

$$2\Gamma^0_{00}e_0e_0 = 0$$

$$\Gamma^0_{00}e_0e_0 = 0$$

$$\Gamma^0_{00}\left(-1 + \frac{a}{r}\right) = 0$$

Para que esto se cumpla siempre (no sólo cuando $r = a$) necesariamente debe suceder que:

$$\Gamma^0_{00} = 0$$

  - $\partial_1(e_0e_0) = \partial_1\left(-1 + \frac{a}{r}\right)$

$$(\partial_1 e_0)e_0 + e_0(\partial_1 e_0) = \partial_1\left(-1 + \frac{a}{r}\right)$$

$$2(\partial_1 e_0)e_0 = 0$$

$$2(\Gamma^0_{10}e_0 + \Gamma^1_{10}e_1 + \Gamma^2_{10}e_2 + \Gamma^3_{10}e_3)e_0 = \frac{-a}{r^2}$$

$$2\Gamma^0_{10}e_0e_0 = \frac{-a}{r^2}$$

$$\Gamma^0_{10}\left(-1+\frac{a}{r}\right) = \frac{-a}{2r^2}$$

$$\Gamma^0_{10} = \frac{-a}{2r^2}\cdot\frac{1}{\left(-1+\frac{a}{r}\right)}$$

$$\Gamma^0_{10} = \frac{-a}{-2r^2+2ra} = \frac{a}{2r^2-2ra} = \frac{a}{2r(r-a)}$$

$$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{a}{2r(r-a)}$$

- $\partial_2(e_0e_0) = \partial_2\left(-1+\frac{a}{r}\right)$

$$(\partial_2 e_0)e_0 + e_0(\partial_2 e_0) = \partial_2\left(-1+\frac{a}{r}\right)$$

$$2(\partial_2 e_0)e_0 = 0$$

$$2(\Gamma^0_{20}e_0 + \Gamma^1_{20}e_1 + \Gamma^2_{20}e_2 + \Gamma^3_{20}e_3)e_0 = 0$$

$$2\Gamma^0_{20}e_0e_0 = 0$$

$$\Gamma^0_{20}e_0e_0 = 0$$

$$\Gamma^0_{20} = \Gamma^0_{02} = 0$$

- $\partial_3(e_0e_0) = \partial_3\left(-1+\frac{a}{r}\right)$

$$(\partial_3 e_0)e_0 + e_0(\partial_3 e_0) = \partial_3\left(-1+\frac{a}{r}\right)$$

$$2(\partial_3 e_0)e_0 = 0$$

$$2(\Gamma^0_{30}e_0 + \Gamma^1_{30}e_1 + \Gamma^2_{30}e_2 + \Gamma^3_{30}e_3)e_0 = 0$$

$$2\Gamma^0_{30}e_0e_0 = 0$$

$$\Gamma^0_{30}e_0e_0 = 0$$

$$\Gamma^0_{30} = \Gamma^0_{03} = 0$$

- $e_0 e_1 = 0$
  - $\partial_0(e_0 e_1) = \partial_0 0$

$$(\partial_0 e_0)e_1 + e_0(\partial_0 e_1) = \partial_0 0$$

$$(\Gamma^0_{00}e_0 + \Gamma^1_{00}e_1 + \Gamma^2_{00}e_2 + \Gamma^3_{00}e_3)e_1 + e_0(\Gamma^0_{01}e_0 + \Gamma^1_{01}e_1 + \Gamma^2_{01}e_2 + \Gamma^3_{01}e_3) = 0$$

Sólo sobreviven:

$$\Gamma^1_{00}e_1e_1 + \Gamma^0_{01}e_0e_0 = 0$$

En verde pondremos los símbolos que ya conocemos:

$$\Gamma^1_{00}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) + \left(\frac{a}{2r(r-a)}\right)\left(-1+\frac{a}{r}\right) = 0$$

$$\Gamma^1_{00}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) + \left(\frac{a}{2r(r-a)}\right)\left(-1+\frac{a}{r}\right) = 0$$

$$\Gamma^1_{00}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) + \frac{-a}{2r(r-a)} + \frac{a^2}{2r^2(r-a)} = 0$$

$$\Gamma^1_{00}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) + \frac{-ar}{2rr(r-a)} + \frac{a^2}{2r^2(r-a)} = 0$$

$$\Gamma^1_{00}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) + \frac{-ar}{2r^2(r-a)} + \frac{a^2}{2r^2(r-a)} = 0$$

$$\Gamma^1_{00}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) + \frac{-ar+a^2}{2r^2(r-a)} = 0$$

$$\Gamma_{00}^{1}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)+\frac{a(-r+a)}{2r^2(r-a)}=0$$

$$\Gamma_{00}^{1}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)+\frac{-a(r-a)}{2r^2(r-a)}=0$$

$$\Gamma_{00}^{1}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)+\frac{-a}{2r^2}=0$$

$$\Gamma_{00}^{1}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)=\frac{a}{2r^2}$$

$$\Gamma_{00}^{1}=\frac{a}{2r^2}\cdot\left(1-\frac{a}{r}\right)=\frac{a(r-a)}{2r^3}$$

- $\partial_1(e_0e_1)=\partial_1 0$

$$(\partial_1 e_0)e_1+e_0(\partial_1 e_1)=\partial_1 0$$

Vamos a ahorrarnos un poco de esfuerzo recogiendo sólo los términos que sobreviven:

$$\Gamma_{10}^{1}e_1e_1+\Gamma_{11}^{0}e_0e_0=0$$

$$\Gamma_{10}^{1}\frac{1}{\left(1-\frac{a}{r}\right)}+\Gamma_{11}^{0}\left(-1+\frac{a}{r}\right)=0$$

Para solucionar éste, ahora mismo, nos faltan datos así que lo dejaremos en stand-by y lo resolveremos en cuanto conozcamos más símbolos de Christoffel. Lo siguiente, que estará en color rojo, indica que se ha puesto a posteriori, una vez conocidos más datos.

$$\Gamma_{10}^{1}\frac{1}{\left(1-\frac{a}{r}\right)}+\Gamma_{11}^{0}\left(-1+\frac{a}{r}\right)=0$$

$$(0)\frac{1}{\left(1-\frac{a}{r}\right)}+\Gamma_{11}^{0}\left(-1+\frac{a}{r}\right)=0$$

$$\Gamma_{11}^{0}\left(-1+\frac{a}{r}\right)=0$$

$$\Gamma_{11}^{0}=0$$

- $\partial_2(e_0e_1)=\partial_2 0$

$$(\partial_2 e_0)e_1+e_0(\partial_2 e_1)=\partial_2 0$$

$$\Gamma_{20}^{1}e_1e_1+\Gamma_{21}^{0}e_0e_0=0$$

$$\Gamma_{20}^{1}\frac{1}{\left(1-\frac{a}{r}\right)}+\Gamma_{21}^{0}\left(-1+\frac{a}{r}\right)=0$$

En stand-by… estos Símbolos de Christoffel quedan sueltos y no se resuelven mediante la mera sustitución paulatina de Símbolos hallados. Se resolverán al final mediante un simple sistema de ecuaciones. Los marcaremos en azul,

- $\partial_3(e_0e_1)=\partial_3 0$

$$(\partial_3 e_0)e_1+e_0(\partial_3 e_1)=\partial_3 0$$

$$\Gamma_{30}^{1}e_1e_1+\Gamma_{31}^{0}e_0e_0=0$$

$$\Gamma_{30}^{1}\frac{1}{\left(1-\frac{a}{r}\right)}+\Gamma_{31}^{0}\left(-1+\frac{a}{r}\right)=0$$

En stand-by… Al final en azul.

- $e_0e_2=0$
  - $\partial_0(e_0e_2)=\partial_0 0$

$$(\partial_0 e_0)e_2 + e_0(\partial_0 e_2) = \partial_0 0$$

$$\Gamma^2_{00} e_2 e_2 + \Gamma^0_{02} e_0 e_0 = 0$$

$$\Gamma^2_{00} r^2 + \Gamma^0_{02}\left(-1 + \frac{a}{r}\right) = 0$$

$$\Gamma^2_{00} r^2 + (0)\left(-1 + \frac{a}{r}\right) = 0$$

$$\Gamma^2_{00} r^2 = 0$$

$$\Gamma^2_{00} = 0$$

- $\partial_1(e_0 e_2) = \partial_1 0$

$$(\partial_1 e_0)e_2 + e_0(\partial_1 e_2) = \partial_1 0$$

$$\Gamma^2_{10} e_2 e_2 + \Gamma^0_{12} e_0 e_0 = 0$$

$$\Gamma^2_{10} r^2 + \Gamma^0_{12}\left(-1 + \frac{a}{r}\right) = 0$$

En stand-by… Al final en azul.

- $\partial_2(e_0 e_2) = \partial_2 0$

$$(\partial_2 e_0)e_2 + e_0(\partial_2 e_2) = \partial_1 0$$

$$\Gamma^2_{20} e_2 e_2 + \Gamma^0_{22} e_0 e_0 = 0$$

$$\Gamma^2_{20} r^2 + \Gamma^0_{22}\left(-1 + \frac{a}{r}\right) = 0$$

En stand-by…

$$(0) r^2 + \Gamma^0_{22}\left(-1 + \frac{a}{r}\right) = 0$$

$$\Gamma^0_{22}\left(-1 + \frac{a}{r}\right) = 0$$

$$\Gamma^0_{22} = 0$$

- $\partial_3(e_0e_2) = \partial_3 0$

$$(\partial_3 e_0)e_2 + e_0(\partial_3 e_2) = \partial_3 0$$

$$\Gamma^2_{30} e_2 e_2 + \Gamma^0_{32} e_0 e_0 = 0$$

$$\Gamma^2_{30} r^2 + \Gamma^0_{32}\left(-1 + \frac{a}{r}\right) = 0$$

En stand-by… Al final en azul.

- $e_0e_3 = 0$

- $\partial_0(e_0e_3) = \partial_0 0$

$$(\partial_0 e_0)e_3 + e_0(\partial_0 e_3) = \partial_0 0$$

$$\Gamma^3_{00} e_3 e_3 + \Gamma^0_{03} e_0 e_0 = 0$$

$$\Gamma^3_{00} r^2 sin^{\,2}\theta + \Gamma^0_{03}\left(-1 + \frac{a}{r}\right) = 0$$

$$\Gamma^3_{00} r^2 sin^{\,2}\theta + (0)\left(-1 + \frac{a}{r}\right) = 0$$

$$\Gamma^3_{00} r^2 sin^{\,2}\theta = 0$$

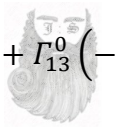
$$\Gamma^3_{00} = 0$$

- $\partial_1(e_0e_3) = \partial_1 0$

$$(\partial_1 e_0)e_3 + e_0(\partial_1 e_3) = \partial_1 0$$

$$\Gamma^3_{10} e_3 e_3 + \Gamma^0_{13} e_0 e_0 = 0$$

$$\Gamma^3_{10} r^2 sin^{\,2}\theta + \Gamma^0_{13}\left(-1 + \frac{a}{r}\right) = 0$$



En stand-by… Al final en azul.

- $\partial_2(e_0 e_3) = \partial_2 0$

$$(\partial_2 e_0)e_3 + e_0(\partial_2 e_3) = \partial_2 0$$

$$\Gamma^3_{20} e_3 e_3 + \Gamma^0_{23} e_0 e_0 = 0$$

$$\Gamma^3_{20} r^2 sin^2\theta + \Gamma^0_{23}\left(-1 + \frac{a}{r}\right) = 0$$

En stand-by… Al final en azul.

- $\partial_3(e_0 e_3) = \partial_3 0$

$$(\partial_3 e_0)e_3 + e_0(\partial_3 e_3) = \partial_3 0$$

$$\Gamma^3_{30} e_3 e_3 + \Gamma^0_{33} e_0 e_0 = 0$$

$$\Gamma^3_{30} r^2 sin^2\theta + \Gamma^0_{33}\left(-1 + \frac{a}{r}\right) = 0$$

En stand-by…

$$\Gamma^3_{30} r^2 sin^2\theta + \Gamma^0_{33}\left(-1 + \frac{a}{r}\right) = 0$$

$$(0) r^2 sin^2\theta + \Gamma^0_{33}\left(-1 + \frac{a}{r}\right) = 0$$

$$\Gamma^0_{33}\left(-1 + \frac{a}{r}\right) = 0$$

$$\Gamma^0_{33} = 0$$

- $e_1 e_1 = \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{r}\right)}$

- $\partial_0(e_1 e_1) = \partial_0 \frac{1}{\left(1-\frac{a}{r}\right)}$

$$(\partial_0 e_1)e_1 + e_0(\partial_0 e_1) = \partial_0 0$$

$$\Gamma^1_{01} e_1 e_1 + \Gamma^1_{01} e_1 e_1 = 0$$

$$2\Gamma^1_{01} e_1 e_1 = 0$$

$$2\Gamma^1_{01} \frac{1}{\left(1-\frac{a}{r}\right)} = 0$$

$$\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = 0$$

- $\partial_1(e_1 e_1) = \partial_1 \left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)$

$$(\partial_1 e_1)e_1 + e_0(\partial_1 e_1) = \partial_1 \left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)$$

$$\Gamma^1_{11} e_1 e_1 + \Gamma^1_{11} e_1 e_1 = \frac{-a}{(a-r)^2}$$

$$2\Gamma^1_{11} e_1 e_1 = \frac{-a}{(a-r)^2}$$

$$2\Gamma^1_{11} \left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = \frac{-a}{(a-r)^2}$$

$$\Gamma^1_{11} \left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = \frac{-a}{2(a-r)^2}$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{-a}{2(a-r)^2} \cdot \left(1-\frac{a}{r}\right)$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{-a}{2(a-r)^2} + \frac{a^2}{2r(a-r)^2}$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{-ar}{2r(a-r)^2} + \frac{a^2}{2r(a-r)^2}$$

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{-ar + a^2}{2r(a-r)^2}$$

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{a(a-r)}{2r(a-r)^2}$$

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{a}{2r(a-r)}$$

- $\partial_2(e_1 e_1) = \partial_2\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)$

$$(\partial_2 e_1)e_1 + e_0(\partial_2 e_1) = \partial_2\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)$$

$$\Gamma_{21}^{1} e_1 e_1 + \Gamma_{21}^{1} e_1 e_1 = 0$$

$$2\Gamma_{21}^{1} e_1 e_1 = 0$$

$$2\Gamma_{21}^{1}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = 0$$

$$\Gamma_{21}^{1} = \Gamma_{12}^{1} = 0$$

- $\partial_3(e_1 e_1) = \partial_3\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)$

$$(\partial_3 e_1)e_1 + e_0(\partial_3 e_1) = \partial_3\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)$$

$$\Gamma_{31}^{1} e_1 e_1 + \Gamma_{31}^{1} e_1 e_1 = 0$$

$$2\Gamma_{31}^{1} e_1 e_1 = 0$$

$$2\Gamma_{31}^{1}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = 0$$

$$\Gamma^1_{31} = \Gamma^1_{13} = 0$$

- $e_1 e_2 = 0$
  - $\partial_0(e_1 e_2) = \partial_0 0$

$$(\partial_0 e_1)e_2 + e_1(\partial_0 e_2) = \partial_0 0$$

$$\Gamma^2_{01} e_2 e_2 + \Gamma^1_{02} e_1 e_1 = 0$$

$$\Gamma^2_{01} r^2 + \Gamma^1_{02}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = 0$$

En stand-by… Al final en azul.

  - $\partial_1(e_1 e_2) = \partial_1 0$

$$(\partial_1 e_1)e_2 + e_1(\partial_1 e_2) = \partial_1 0$$

$$\Gamma^2_{11} e_2 e_2 + \Gamma^1_{12} e_1 e_1 = 0$$

$$\Gamma^2_{11} r^2 + \Gamma^1_{12}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = 0$$

$$\Gamma^2_{11} r^2 + (0)\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = 0$$

$$\Gamma^2_{11} r^2 = 0$$

$$\Gamma^2_{11} = 0$$

  - $\partial_2(e_1 e_2) = \partial_2 0$

$$(\partial_2 e_1)e_2 + e_1(\partial_2 e_2) = \partial_1 0$$

$$\Gamma^2_{21} e_2 e_2 + \Gamma^1_{22} e_1 e_1 = 0$$

$$\Gamma^2_{21} r^2 + \Gamma^1_{22}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = 0$$

En stand-by…

$$\Gamma^2_{21} r^2 + \Gamma^1_{22}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = 0$$

$$\frac{1}{r} r^2 + \Gamma^1_{22}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = 0$$

$$r + \Gamma^1_{22}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = 0$$

$$\Gamma^1_{22}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = -r$$

$$\Gamma^1_{22} = -r\left(1-\frac{a}{r}\right)$$

$$\Gamma^1_{22} = \left(-r - \frac{-ra}{r}\right)$$

$$\Gamma^1_{22} = (a - r)$$

- $\partial_3(e_1 e_2) = \partial_3 0$

$$(\partial_3 e_1)e_2 + e_1(\partial_3 e_2) = \partial_3 0$$

$$\Gamma^2_{31} e_2 e_2 + \Gamma^1_{32} e_1 e_1 = 0$$

$$\Gamma^2_{31} r^2 + \Gamma^1_{32}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = 0$$

En stand-by… Al final en azul.

- $e_1 e_3 = 0$
  - $\partial_0(e_1 e_3) = \partial_0 0$

$$(\partial_0 e_1)e_3 + e_1(\partial_0 e_3) = \partial_0 0$$

$$\Gamma^3_{01} e_3 e_3 + \Gamma^1_{03} e_1 e_1 = 0$$

$$\Gamma^3_{01} r^2 sin^{\,2}\theta + \Gamma^1_{03}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = 0$$

En stand-by… Al final en azul.

  - $\partial_1(e_1 e_3) = \partial_1 0$

$$(\partial_1 e_1)e_3 + e_1(\partial_1 e_3) = \partial_1 0$$

$$\Gamma^3_{11} e_3 e_3 + \Gamma^1_{13} e_1 e_1 = 0$$

$$\Gamma^3_{11} r^2 sin^{\,2}\theta + \Gamma^1_{13}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = 0$$

$$\Gamma^3_{11} r^2 sin^{\,2}\theta + (0)\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = 0$$

$$\Gamma^3_{11} r^2 sin^{\,2}\theta = 0$$

$$\Gamma^3_{11} = 0$$

  - $\partial_2(e_1 e_3) = \partial_2 0$

$$(\partial_2 e_1)e_3 + e_1(\partial_2 e_3) = \partial_2 0$$

$$\Gamma^3_{21} e_3 e_3 + \Gamma^1_{23} e_1 e_1 = 0$$

$$\Gamma_{21}^{3} r^2 sin^{\,2}\theta + \Gamma_{23}^{1}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = 0$$

En stand-by… Al final en azul.

- $\partial_3(e_1 e_3) = \partial_3 0$

$$(\partial_2 e_1)e_3 + e_1(\partial_3 e_3) = \partial_3 0$$

$$\Gamma_{31}^{3} e_3 e_3 + \Gamma_{33}^{1} e_1 e_1 = 0$$

$$\Gamma_{31}^{3} r^2 sin^{\,2}\theta + \Gamma_{33}^{1}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = 0$$

En stand-by…

$$\Gamma_{31}^{3} r^2 sin^{\,2}\theta + \Gamma_{33}^{1}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = 0$$

$$\frac{1}{r} r^2 sin^{\,2}\theta + \Gamma_{33}^{1}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = 0$$

$$r sin^{\,2}\theta + \Gamma_{33}^{1}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = 0$$

$$\Gamma_{33}^{1}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = -r sin^{\,2}\theta$$

$$\Gamma_{33}^{1} = -r sin^{\,2}\theta\left(1-\frac{a}{r}\right)$$

$$\Gamma_{33}^{1} = -r sin^{\,2}\theta + a sin^{\,2}\theta$$

$$\Gamma_{33}^{1} = (a-r) sin^{\,2}\theta$$

- $e_2 e_2 = r^2$
    - $\partial_0(e_2 e_2) = \partial_0 r^2$

$$(\partial_0 e_2)e_2 + e_2(\partial_0 e_2) = \partial_0 r^2$$

$$2(\partial_0 e_2)e_2 = 0$$

$$2\Gamma^2_{02} e_2 e_2 = 0$$

$$2\Gamma^2_{02} r^2 = 0$$

$$\Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = 0$$

    - $\partial_1(e_2 e_2) = \partial_1 r^2$

$$(\partial_1 e_2)e_2 + e_2(\partial_1 e_2) = \partial_1 r^2$$

$$2(\partial_1 e_2)e_2 = 2r$$

$$2\Gamma^2_{12} e_2 e_2 = 2r$$

$$2\Gamma^2_{12} r^2 = 2r$$

$$\Gamma^2_{12} r^2 = r$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}$$

    - $\partial_2(e_2 e_2) = \partial_2 r^2$

$$(\partial_2 e_2)e_2 + e_2(\partial_2 e_2) = \partial_2 r^2$$

$$2(\partial_2 e_2)e_2 = 0$$

$$2\Gamma^2_{22} e_2 e_2 = 0$$

$$2\Gamma^2_{22} r^2 = 0$$

$$\Gamma^2_{22} = 0$$

- $\partial_3(e_2e_2) = \partial_3 r^2$

$$(\partial_3 e_2)e_2 + e_2(\partial_3 e_2) = \partial_3 r^2$$

$$2(\partial_3 e_2)e_2 = 0$$

$$2\Gamma^2_{32} e_2 e_2 = 0$$

$$2\Gamma^2_{32} r^2 = 0$$

$$\Gamma^2_{32} = \Gamma^2_{23} = 0$$

- $e_2e_3 = 0$

- $\partial_0(e_2e_3) = \partial_0 0$

$$(\partial_0 e_2)e_3 + e_2(\partial_0 e_3) = \partial_0 0$$

$$\Gamma^3_{02} e_3 e_3 + \Gamma^2_{03} e_2 e_2 = 0$$

$$\Gamma^3_{02} r^2 sin^{\,2}\theta + \Gamma^2_{03} r^2 = 0$$

En stand-by… Al final en azul.

- $\partial_1(e_2e_3) = \partial_1 0$

$$(\partial_1 e_2)e_3 + e_2(\partial_1 e_3) = \partial_1 0$$

$$\Gamma^3_{12} e_3 e_3 + \Gamma^2_{13} e_2 e_2 = 0$$

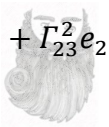
$$\Gamma^3_{12} r^2 sin^{\,2}\theta + \Gamma^2_{13} r^2 = 0$$

En stand-by… Al final en azul.

- $\partial_2(e_2e_3) = \partial_2 0$

$$(\partial_2 e_2)e_3 + e_2(\partial_2 e_3) = \partial_2 0$$

$$\Gamma^3_{22} e_3 e_3 + \Gamma^2_{23} e_2 e_2 = 0$$



$$\Gamma^3_{22} r^2 sin^{\,2}\theta + \Gamma^2_{23} r^2 = 0$$

$$\Gamma^3_{22} r^2 sin^{\,2}\theta + (0) r^2 = 0$$

$$\Gamma^3_{22} r^2 sin^{\,2}\theta = 0$$

$$\Gamma^3_{22} = 0$$

- $\partial_3(e_2 e_3) = \partial_3 0$

$$(\partial_3 e_2) e_3 + e_2(\partial_3 e_3) = \partial_3 0$$

$$\Gamma^3_{32} e_3 e_3 + \Gamma^2_{33} e_2 e_2 = 0$$

$$\Gamma^3_{32} r^2 sin^{\,2}\theta + \Gamma^2_{33} r^2 = 0$$

En stand-by…

$$\Gamma^3_{32} r^2 sin^{\,2}\theta + \Gamma^2_{33} r^2 = 0$$

$$cot\,\theta\, r^2 sin^{\,2}\theta + \Gamma^2_{33} r^2 = 0$$

$$\frac{cos\,\theta}{sin\,\theta} r^2 sin^{\,2}\theta + \Gamma^2_{33} r^2 = 0$$

$$\Gamma^2_{33} r^2 = -\frac{cos\,\theta}{sin\,\theta} r^2 sin^{\,2}\theta$$

$$\Gamma^2_{33} r^2 = -cos\,\theta\, r^2\, sin\,\theta$$

$$\Gamma^2_{33} = -cos\,\theta\, sin\,\theta$$

- $e_3 e_3 = r^2 sin^{\,2}\,\theta$
  - $\partial_0(e_3 e_3) = \partial_0 r^2 sin^{\,2}\,\theta$

$$(\partial_0 e_3) e_3 + e_3(\partial_0 e_3) = \partial_0 r^2 sin^{\,2}\,\theta$$

$$2\Gamma^3_{03} e_3 e_3 = 0$$

$$2\Gamma^3_{03} r^2 sin^{\,2}\theta = 0$$

$$\Gamma_{03}^{3} = \Gamma_{30}^{3} = 0$$

- $\partial_1(e_3e_3) = \partial_1 r^2 sin^{\,2}\,\theta$

$$(\partial_1 e_3)e_3 + e_3(\partial_1 e_3) = \partial_1 r^2 sin^{\,2}\theta$$

$$2\Gamma_{13}^{3} e_3 e_3 = 2r sin^{\,2}\theta$$

$$2\Gamma_{13}^{3} r^2 sin^{\,2}\theta = 2r sin^{\,2}\,\theta$$

$$\Gamma_{13}^{3} r^2 sin^{\,2}\theta = r sin^{\,2}\,\theta$$

$$\Gamma_{13}^{3} r^2 = r$$

$$\Gamma_{13}^{3} = \Gamma_{31}^{3} = \frac{1}{r}$$

- $\partial_2(e_3e_3) = \partial_2 r^2 sin^{\,2}\,\theta$

(OBSERVACIÓN. Recuérdese que ∂_2 es ∂_θ)

$$(\partial_2 e_3)e_3 + e_3(\partial_2 e_3) = \partial_2 r^2 sin^{\,2}\,\theta$$

$$2\Gamma_{23}^{3} e_3 e_3 = r^2 2\,sin\,\theta\,cos\,\theta$$

$$2\Gamma_{23}^{3} r^2 sin^{\,2}\,\theta = r^2 2\,sin\,\theta\,cos\,\theta$$

$$\Gamma_{23}^{3} r^2 sin^{\,2}\,\theta = r^2\,sin\,\theta\,cos\,\theta$$

$$\Gamma_{23}^{3} sin^{\,2}\,\theta = sin\,\theta\,cos\,\theta$$

$$\Gamma_{23}^{3} = \frac{sin\,\theta\,cos\,\theta}{sin^{\,2}\theta}$$

$$\Gamma_{23}^{3} = \frac{cos\theta}{sin\,\theta}$$

$$\Gamma_{23}^{3} = \Gamma_{32}^{3} = cot\,\theta$$

- $\partial_3(e_3e_3) = \partial_3 r^2 sin^{\,2}\,\theta$

$$(\partial_3 e_3)e_3 + e_3(\partial_3 e_3) = \partial_3 r^2 sin^{\,2}\theta$$

$$2\Gamma_{33}^{3} e_3 e_3 = 0$$

$$2\Gamma_{33}^{3} r^2 sin^{\,2}\theta = 0$$

$$\Gamma_{33}^{3} = 0$$

Como dijimos, pasemos a resolver (lo marcaremos en color azul) los Símbolos de Christoffel de los que hasta el momento no hemos encontrado solución pero que fácilmente veremos que son todos iguales a cero. Vamos a agruparlas en cuatro conjuntos de tres ecuaciones. El criterio de agrupación es que aporten soluciones relacionándose entre ellas:

Grupo 1

$$\Gamma_{02}^{3} r^2 sin^{\,2}\theta + \Gamma_{03}^{2} r^2 = 0$$

$$\Gamma_{20}^{3} r^2 sin^{\,2}\theta + \Gamma_{23}^{0}\left(-1 + \frac{a}{r}\right) = 0$$

$$\Gamma_{30}^{2} r^2 + \Gamma_{32}^{0}\left(-1 + \frac{a}{r}\right) = 0$$

Grupo 2

$$\Gamma_{20}^{1}\left(\frac{1}{1 - \frac{a}{r}}\right) + \Gamma_{21}^{0}\left(-1 + \frac{a}{r}\right) = 0$$

$$\Gamma_{10}^{2} r^2 + \Gamma_{12}^{0}\left(-1 + \frac{a}{r}\right) = 0$$

$$\Gamma_{01}^{2} r^2 + \Gamma_{02}^{1}\left(\frac{1}{1 - \frac{a}{r}}\right) = 0$$

Grupo 3

$$\Gamma_{30}^{1}\left(\frac{1}{1 - \frac{a}{r}}\right) + \Gamma_{31}^{0}\left(-1 + \frac{a}{r}\right) = 0$$

$$\Gamma_{10}^{3} r^2 sin^{\,2}\theta + \Gamma_{13}^{0}\left(-1 + \frac{a}{r}\right) = 0$$

$$\Gamma_{01}^{3} r^2 sin^{\,2}\theta + \Gamma_{03}^{1}\left(\frac{1}{1 - \frac{a}{r}}\right) = 0$$

Grupo 4

$$\Gamma_{31}^{2} r^{2} + \Gamma_{32}^{1}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = 0$$

$$\Gamma_{21}^{3} r^{2} sin^{2}\theta + \Gamma_{23}^{1}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = 0$$

$$\Gamma_{12}^{3} r^{2} sin^{2}\theta + \Gamma_{13}^{2} r^{2} = 0$$

Acometamos la solución del Grupo 1.

$$\Gamma_{02}^{3} r^{2} sin^{2}\theta + \Gamma_{03}^{2} r^{2} = 0$$

$$\Gamma_{20}^{3} r^{2} sin^{2}\theta + \Gamma_{23}^{0}\left(-1+\frac{a}{r}\right) = 0$$

$$\Gamma_{30}^{2} r^{2} + \Gamma_{32}^{0}\left(-1+\frac{a}{r}\right) = 0$$

Tomemos la tercera:

$$\Gamma_{30}^{2} r^{2} = -\Gamma_{32}^{0}\left(-1+\frac{a}{r}\right)$$

Ahora tomemos la segunda:

$$\Gamma_{20}^{3} r^{2} sin^{2}\theta = -\Gamma_{23}^{0}\left(-1+\frac{a}{r}\right)$$

Luego, por estas dos ecuaciones, podremos decir que:

$$\Gamma_{30}^{2} r^{2} = \Gamma_{20}^{3} r^{2} sin^{2}\theta$$

Y así, finalmente, en la primera podemos decir que:

$$\Gamma_{02}^{3} r^{2} sin^{2}\theta + \Gamma_{20}^{3} r^{2} sin^{2}\theta = 0$$

Y ya podemos resolver sin problemas:

$$\Gamma_{02}^{3} r^{2} sin^{2}\theta + \Gamma_{20}^{3} r^{2} sin^{2}\theta = 0$$

$$2\Gamma_{02}^{3}(r^{2} sin^{2}\theta) = 0$$
$$20$$

Luego, definitivamente:

$$\Gamma^3_{02} = \Gamma^3_{20} = 0$$

Y teniendo este símbolo, el resto de símbolos, trivialmente, también se igualan a cero:

$$\Gamma^2_{03} = \Gamma^2_{30} = 0$$

$$\Gamma^0_{23} = \Gamma^0_{32} = 0$$

Para el resto de grupos procederemos igual. No será necesario volver a mostrar y repetir todo el proceso, sencillamente, mediante colores ilustraremos los 'intercambios' que nos dan la solución.

Solución del Grupo 2.

$$\Gamma^1_{20}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) + \Gamma^0_{21}\left(-1+\frac{a}{r}\right) = 0$$

$$\Gamma^2_{10} r^2 + \Gamma^0_{12}\left(-1+\frac{a}{r}\right) = 0$$

$$\Gamma^2_{01} r^2 + \Gamma^1_{02}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = 0$$

Luego:

$$\Gamma^1_{20}\frac{1}{\left(1-\frac{a}{r}\right)} + \Gamma^1_{02}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right) = 0$$

$$\Gamma^1_{20} = \Gamma^1_{02} = 0$$

$$\Gamma^0_{21} = \Gamma^0_{12} = 0$$

$$\Gamma^2_{10} = \Gamma^2_{01} = 0$$

Solución del Grupo 3.

$$\Gamma_{30}^{1}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)+\Gamma_{31}^{0}\left(-1+\frac{a}{r}\right)=0$$

$$\Gamma_{10}^{3}r^{2}sin^{2}\theta+\Gamma_{13}^{0}\left(-1+\frac{a}{r}\right)=0$$

$$\Gamma_{01}^{3}r^{2}sin^{2}\theta+\Gamma_{03}^{1}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)=0$$

$$\Gamma_{30}^{1}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)+\Gamma_{03}^{1}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)=0$$

$$\Gamma_{30}^{1}=\Gamma_{03}^{1}=0$$

$$\Gamma_{31}^{0}=\Gamma_{13}^{0}=0$$

$$\Gamma_{10}^{3}=\Gamma_{01}^{3}=0$$

Solución del Grupo 4.

$$\Gamma_{31}^{2}r^{2}+\Gamma_{32}^{1}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)=0$$

$$\Gamma_{21}^{3}r^{2}sin^{2}\theta+\Gamma_{23}^{1}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)=0$$

$$\Gamma_{12}^{3}r^{2}sin^{2}\theta+\Gamma_{13}^{2}r^{2}=0$$

$$\Gamma_{31}^{2}r^{2}+\Gamma_{13}^{2}r^{2}=0$$

$$\Gamma_{31}^{2}=\Gamma_{13}^{2}=0$$

$$\Gamma_{32}^{1}=\Gamma_{23}^{1}=0$$

$$\Gamma_{21}^{3}=\Gamma_{12}^{3}=0$$

Y ya tendríamos calculados todos los Símbolos de Christoffel de un espaciotiempo de Schwarzschild. Recogeremos en la siguiente tabla sólo aquellos que son diferentes a cero.

(OBSERVACIÓN. Recordemos que $a = \frac{2GM}{c^2}$*)*

$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{a}{2r(r-a)}$	$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{GM}{r(c^2r - 2GM)}$
$\Gamma^1_{00} = \frac{a}{2r^2} \cdot \left(1 - \frac{a}{r}\right) = \frac{a(r-a)}{2r^3}$	$\Gamma^1_{00} = \frac{GM}{c^2r^2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)$
$\Gamma^1_{11} = \frac{a}{2r(a-r)}$	$\Gamma^1_{11} = \frac{GM}{c^2r\left(\frac{2GM}{c^2} - r\right)}$
$\Gamma^1_{22} = (a-r)$	$\Gamma^1_{22} = \left(\frac{2GM}{c^2} - r\right)$
$\Gamma^1_{33} = (a-r)sin^2\theta$	$\Gamma^1_{33} = \left(\frac{2GM}{c^2} - r\right) sin^2\theta$
$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}$	$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}$
$\Gamma^2_{33} = -cos\,\theta\, sin\,\theta$	$\Gamma^2_{33} = -cos\,\theta\, sin\,\theta$
$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}$	$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}$
$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = cot\,\theta$	$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = cot\,\theta$

Y ya, finalmente, para terminar de caracterizar el Espaciotiempo de Schwarzschild, vamos a medir su curvatura calculando el Tensor de Riemann del mismo. Para ello usaremos el procedimiento abreviado que comentamos en la sección tal o cual, páginas tales o cuales:

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl}$$

Recordemos que lo que, en definitiva, estamos haciendo con esto es desplazar un vector tetradimensional con carácter tensorial (efectivamente, en realidad un tensor). Para refrescar nuestra memoria, aunque bastante informalmente, pensemos que es un como un vector de cuatro dimensiones cuya magnitud es invariante ante un cambio de coordenadas, digamos, ordenado, es decir, un cambio de coordenadas que mantenga la proporcionalidad, la linealidad, entre las diferentes dimensiones. Algo así como que las coordenadas miden de otra manera pero conservan las proporciones, no es un cambio arbitrario (eso sería el coño de la Bernarda).

Como decimos, vamos a desplazar ese vector de manera paralela a lo largo de una trayectoria cerrada a lo largo de la superficie de la variedad (una zona del espaciotiempo de Schwarzschild) y veamos en qué ha cambiado cuando retornamos al punto de partida.

Efectivamente, al aplicar el operador $[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k]$ a un vector de la base e_j obtendremos otro vector que debe poder expresarse en los vectores bases de las cuatro dimensiones del espaciotiempo y, de esta manera, podremos acceder a los valores de las componentes del vector invariante (tensor) tetradimensional R^i_{jkl}. El índice libre 'i' se cumplimentará finalmente asociándolo a cada uno de los vectores de la base… se entiende mejor así:

$$R^i_{jkl} = R^i_{jkl}\, e_i = R^0_{jkl}\, e_0 + R^1_{jkl}\, e_1 + R^2_{jkl}\, e_2 + R^3_{jkl}\, e_3$$

Estos cálculos son bastante largos y engorrosos pero hay que hacerlos de vez en cuando. Como hemos dicho, el valor 'i' lo podemos dejar para el final de cada subcálculo (en cuanto lo desarrollemos entenderemos a qué nos estamos refiriendo) Para ello la estrategia que vamos a seguir es, en primer lugar calcular todas las combinaciones posibles de k y l usando los valores de las cuatro dimensiones del espaciotiempo de Schwarzschild $(0,1,2,3)$ y, después, por las propiedades mismas del operador $[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k]$, eliminar aquellas que sean reiterativas o no aporten nada. Finalmente, calcularemos los datos paras esas combinaciones para cada valor posible de 'j': $(0,1,2,3)$.

Las combinaciones posibles de k y l son:

$k=0 \quad l=0$	$k=1 \quad l=0$	$k=2 \quad l=0$	$k=3 \quad l=0$
$k=0 \quad l=1$	$k=1 \quad l=1$	$k=2 \quad l=1$	$k=3 \quad l=1$
$k=0 \quad l=2$	$k=1 \quad l=2$	$k=2 \quad l=2$	$k=3 \quad l=2$
$k=0 \quad l=3$	$k=1 \quad l=3$	$k=2 \quad l=3$	$k=3 \quad l=3$

Ahora propongamos una serie de condiciones que emanan de la definición misma del operador que vamos a aplicar:

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k]$$

a) Es obvio que cuando $k = l$ el operador es igual a cero.

$$[\partial_0\partial_0 - \partial_0\partial_0] = 0$$
$$[\partial_1\partial_1 - \partial_1\partial_1] = 0$$
$$\dots$$

Por ello, podremos eliminar de nuestros cálculos las combinaciones en que esto suceda (las marcaremos en rojo en la tabla de combinaciones).

b) Es obvio que cuando los índices k y l intercambien sus posiciones el valor de la componente resultante será el mismo pero con el signo cambiado. Supongamos $(k = 0\,;\, l = 1)$ y $(k = 1\,;\, l = 0)$:

$$[\partial_0\partial_1 - \partial_1\partial_0] = ¿\,?$$
$$[\partial_1\partial_0 - \partial_0\partial_1] = -¿\,?$$

Pues resulta obvio que:

$$[\partial_0\partial_1 - \partial_1\partial_0] = -[\partial_1\partial_0 - \partial_0\partial_1]$$

Marcaremos en azul este tipo de combinaciones en la tabla.

Por ello, y aplicando estas dos restricciones, y volviendo a la tabla de combinaciones posibles tenemos que:

$k=0 \quad l=0$	$k=1 \quad l=0$	$k=2 \quad l=0$	$k=3 \quad l=0$
$k=0 \quad l=1$	$k=1 \quad l=1$	$k=2 \quad l=1$	$k=3 \quad l=1$
$k=0 \quad l=2$	$k=1 \quad l=2$	$k=2 \quad l=2$	$k=3 \quad l=2$
$k=0 \quad l=3$	$k=1 \quad l=3$	$k=2 \quad l=3$	$k=3 \quad l=3$

Es decir tendremos que realizar:

$k=0 \quad l=1$		
$k=0 \quad l=2$	$k=1 \quad l=2$	
$k=0 \quad l=3$	$k=1 \quad l=3$	$k=2 \quad l=3$

Seis cálculos por 4 valores diferentes que podrá tener '*j*', es decir: 24 cálculos. Comencemos.

Cálculo 1. $\boldsymbol{j = 0\ ;\ k = 0 \quad l = 1}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_0 \partial_1 - \partial_1 \partial_0] e_0 = R^i_{001} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_0 \partial_1 e_0 - \partial_1 \partial_0 e_0 = R^i_{001} e_i$$

Tenemos dos elementos que vamos a tratar por separado.

1.a. El término marcado en rojo: $\partial_0 \partial_1 e_0$

$$\partial_0 (\partial_1 e_0)$$

$$\partial_0 (\Gamma^0_{10} e_0 + \Gamma^1_{10} e_1 + \Gamma^2_{10} e_2 + \Gamma^3_{10} e_3)$$

De todos estos Símbolos de Christoffel, si miramos la conexión métrica del espaciotiempo de Schwarzschild que acabamos de calcular, observamos que sólo sobrevive:

$$\partial_0 (\Gamma^0_{10} e_0)$$

Ahora hacemos la derivada del producto:

$$(\partial_0 \Gamma^0_{10}) e_0 + \Gamma^0_{10} (\partial_0 e_0)$$

$$\left(\partial_t \frac{a}{2r(r-a)}\right) e_0 + \Gamma^0_{10} (\Gamma^0_{00} e_0 + \Gamma^1_{00} e_1 + \Gamma^2_{00} e_2 + \Gamma^3_{00} e_3)$$

Del término derecho, sólo sobrevive:

$$\left(\partial_t \frac{a}{2r(r-a)}\right) e_0 + \Gamma^0_{10} \Gamma^1_{00} e_1$$

$$(0) e_0 + \Gamma^0_{10} \Gamma^1_{00} e_1$$

$$\Gamma^0_{10} \Gamma^1_{00} e_1$$

1.b. El término marcado en azul: $\partial_1 \partial_0 e_0$

$$\partial_1 (\partial_0 e_0)$$

$$\partial_1 (\Gamma^0_{00} e_0 + \Gamma^1_{00} e_1 + \Gamma^2_{00} e_2 + \Gamma^3_{00} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_1 (\Gamma^1_{00} e_1)$$

Hacemos la derivada del producto:

$$(\partial_1 \Gamma^1_{00}) e_1 + \Gamma^1_{00} (\partial_1 e_1)$$

$$(\partial_1 \Gamma^1_{00}) e_1 + \Gamma^1_{00} (\Gamma^0_{11} e_0 + \Gamma^1_{11} e_1 + \Gamma^2_{11} e_2 + \Gamma^3_{11} e_3)$$

En el término de la derecha sólo sobrevive:

$$(\partial_1 \Gamma^1_{00})e_1 + \Gamma^1_{00}\Gamma^1_{11}e_1$$

Agrupemos ahora los términos iniciales 1.a y 1.b :

$$\Gamma^0_{10}\Gamma^1_{00}e_1 - [(\partial_1 \Gamma^1_{00})e_1 + \Gamma^1_{00}\Gamma^1_{11}e_1] = R^i_{001}e_i$$

$$\Gamma^0_{10}\Gamma^1_{00}e_1 - (\partial_1 \Gamma^1_{00})e_1 - \Gamma^1_{00}\Gamma^1_{11}e_1 = R^i_{001}e_i$$

Si nos fijamos podemos sacar factor común e_1:

$$[\Gamma^0_{10}\Gamma^1_{00} - (\partial_1 \Gamma^1_{00}) - \Gamma^1_{00}\Gamma^1_{11}]e_1 = R^i_{001}e_i$$

Es decir, que ya sabemos que:

$$R^i_{001}e_i = 0e_0 + [\Gamma^0_{10}\Gamma^1_{00} - (\partial_1 \Gamma^1_{00}) - \Gamma^1_{00}\Gamma^1_{11}]e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

Por lo que ya conocemos al menos tres componentes:

$$R^0_{001} = 0$$

$$R^2_{001} = 0$$

$$R^3_{001} = 0$$

Centremos entonces nuestra atención en la que nos queda: R^1_{001}. Calculamos la derivada del término central que, esta vez, sí es distinta de cero pues se deriva en base a r algo que está en función de r, y desarrollamos el resto de términos con los valores que ya hemos calculado para los Símbolos de Christoffel:

$$\Gamma^0_{10}\Gamma^1_{00} - (\partial_1 \Gamma^1_{00}) - \Gamma^1_{00}\Gamma^1_{11}$$

$$\left(\frac{a}{2r(r-a)}\right)\left(\frac{a(r-a)}{2r^3}\right) + \left(-\partial_r \frac{a(r-a)}{2r^3}\right) - \left(\frac{a(r-a)}{2r^3}\right)\left(\frac{a}{2r(a-r)}\right)$$

$$\left(\frac{a^2}{4r^4}\right) + \left(-\partial_r \frac{a(r-a)}{2r^3}\right) - \left(\frac{a(r-a)}{2r^3}\right)\left(\frac{-a}{2r(r-a)}\right)$$ [347]

$$\left(\frac{a^2}{4r^4}\right) + \left(-\partial_r \frac{a(r-a)}{2r^3}\right) + \left(\frac{a^2}{4r^4}\right)$$

$$\left(\frac{2a^2}{4r^4}\right) + \left(-\partial_r \frac{a(r-a)}{2r^3}\right)$$

Ahora, finalmente resolvemos la derivada del término marcado en color rojo:

$$\left(\frac{2a^2}{4r^4}\right) + \left(\frac{-a2r^3 + 6r^2a(r-a)}{4r^6}\right)$$

[347] Ojo al cambio de signo (arriba y abajo) en segundo factor del último término.

$$\frac{2a^2}{4r^4} + \frac{-a2r^3 + 6r^2a(r-a)}{4r^6}$$

$$\frac{2a^2}{4r^4} \cdot \frac{r^2}{r^2} + \frac{-a2r^3 + 6r^2a(r-a)}{4r^6}$$

$$\frac{2a^2r^2}{4r^6} + \frac{-a2r^3 + 6r^2a(r-a)}{4r^6}$$

$$\frac{2a^2r^2 - a2r^3 + 6r^2a(r-a)}{4r^6}$$

$$\frac{2r^2a^2 - 2r^3a + 6r^3a - 6r^2a^2}{4r^6}$$

$$\frac{4r^3a - 4r^2a^2}{4r^6}$$

$$\frac{r^3a - r^2a^2}{r^6}$$

$$\frac{ra - a^2}{r^4}$$

$$R^1_{001} = \frac{a(r-a)}{r^4}$$

Ya hay una componente diferente de cero entre los 24 cálculos que vamos a hacer por lo que, efectivamente, el espacio es curvo. ¿Cómo de curvo? ¿Con qué naturaleza? Lo sabremos con el resto de las componentes del Tensor de Riemann. Sencillamente hemos dicho esto por anticiparnos un poco.

Cálculo 2. $\boldsymbol{j = 0\ ;\ k = 0\quad l = 2}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_0 \partial_2 - \partial_2 \partial_0] e_0 = R^i_{002} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_0 \partial_2 e_0 - \partial_2 \partial_0 e_0 = R^i_{002} e_i$$

Volvemos a tratar por separado.

2.a. El término marcado en rojo: $\partial_0 \partial_2 e_0$

$$\partial_0 (\partial_2 e_0)$$

$$\partial_0 (\Gamma^0_{20} e_0 + \Gamma^1_{20} e_1 + \Gamma^2_{20} e_2 + \Gamma^3_{20} e_3)$$

Ninguno sobrevive, todos los Símbolos de Christoffel son iguales a cero por lo que ya hemos terminado con 2.a $= 0$.

2.b. El término marcado en azul: $\partial_2 \partial_0 e_0$

$$\partial_2 (\partial_0 e_0)$$

$$\partial_2 (\Gamma^0_{00} e_0 + \Gamma^1_{00} e_1 + \Gamma^2_{00} e_2 + \Gamma^3_{00} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_2 (\Gamma^1_{00} e_1)$$

Planteamos la derivada del producto:

$$(\partial_2 \Gamma^1_{00}) e_1 + \Gamma^1_{00} (\partial_2 e_1)$$

Planteamos la derivada de la base del término derecho:

$$(\partial_2 \Gamma^1_{00}) e_1 + \Gamma^1_{00} (\Gamma^0_{21} e_0 + \Gamma^1_{21} e_1 + \Gamma^2_{21} e_2 + \Gamma^3_{21} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$(\partial_2 \Gamma^1_{00}) e_1 + \Gamma^1_{00} (\Gamma^2_{21} e_2)$$

$$(\partial_2 \Gamma^1_{00}) e_1 + \Gamma^1_{00} \Gamma^2_{21} e_2$$

Agrupemos ahora los términos iniciales 2.a y 2.b :

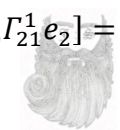
$$0 - [(\partial_2 \Gamma^1_{00}) e_1 + \Gamma^1_{00} \Gamma^2_{21} e_2] = R^i_{002} e_i$$

$$(\partial_2 \Gamma^1_{00}) e_1 - \Gamma^1_{00} \Gamma^2_{21} e_2 = R^i_{002} e_i$$

$$[(\partial_\theta \Gamma^1_{00}) e_1 - \Gamma^1_{00} \Gamma^1_{21} e_2] = R^i_{002} e_i$$

$$[(0) e_1 - \Gamma^1_{00} \Gamma^1_{21} e_2] = R^i_{002} e_i$$

$$[-\Gamma^1_{00} \Gamma^1_{21} e_2] = R^i_{002} e_i$$



Calculamos, entonces, la componente R^2_{002}:

$$[-\Gamma^1_{00}\Gamma^1_{21}]$$

$$\left[-\left(\frac{a(r-a)}{2r^3}\right)\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$R^2_{002} = \frac{-a(r-a)}{2r^4} = \frac{a(a-r)}{2r^4}$$

Sólo hay componente en e_2, así que ya sabemos, entonces, que el tensor tiene la forma:

$$R^i_{002}e_i = 0e_0 + 0e_1 + \left(\frac{a(a-r)}{2r^4}\right)e_2 + 0e_3$$

$$R^0_{002} = 0$$

$$R^1_{002} = 0$$

$$R^2_{002} = \frac{a(a-r)}{2r^4}$$

$$R^3_{002} = 0$$

Cálculo 3. $\boldsymbol{j = 0\ ;\ k = 0\quad l = 3}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_0 \partial_3 - \partial_3 \partial_0] e_0 = R^i_{003} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_0 \partial_3 e_0 - \partial_3 \partial_0 e_0 = R^i_{003} e_i$$

Volvemos a tratar por separado.

3.a. El término marcado en rojo: $\partial_0 \partial_3 e_0$

$$\partial_0 (\partial_3 e_0)$$

$$\partial_0 (\Gamma^0_{30} e_0 + \Gamma^1_{30} e_1 + \Gamma^2_{30} e_2 + \Gamma^3_{30} e_3)$$

No sobrevive nada: $= 0$.

3.b. El término marcado en azul: $\partial_3 \partial_0 e_0$

$$\partial_3 (\partial_0 e_0)$$

$$\partial_3 (\Gamma^0_{00} e_0 + \Gamma^1_{00} e_1 + \Gamma^2_{00} e_2 + \Gamma^3_{00} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_3 (\Gamma^1_{00} e_1)$$

Desplegamos la derivada del producto:

$$(\partial_3 \Gamma^1_{00}) e_1 + \Gamma^1_{00} (\partial_3 e_1)$$

El término izquierdo se elimina pues:

$$\partial_3 \Gamma^1_{00} \to \partial_\varphi \Gamma^1_{00} \to \partial_\varphi \frac{a(r-a)}{2r^3} = 0$$

Y nos queda el derecho, que desarrollamos:

$$\Gamma^1_{00} (\Gamma^0_{31} e_0 + \Gamma^1_{31} e_1 + \Gamma^2_{31} e_2 + \Gamma^3_{31} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\Gamma^1_{00} \Gamma^3_{31} e_3$$

$$\left[\left(\frac{a(r-a)}{2r^3} \right) \cdot \left(\frac{1}{r} \right) \right] e_3 = \left(\frac{a(r-a)}{2r^4} \right) e_3$$

Agrupando 3.a y 3.b:

$$\left[0 - \left(\frac{a(r-a)}{2r^4} \right) e_3 \right] = R^i_{003} e_i$$

O lo que es lo mismo:

$$R^{i}_{003}e_i = 0e_0 + 0e_1 + 0e_2 + \left[-\frac{a(r-a)}{2r^4}\right]e_3$$

Por lo que:

$$R^{0}_{003} = 0$$

$$R^{1}_{003} = 0$$

$$R^{2}_{003} = 0$$

$$R^{3}_{003} = \frac{a(a-r)}{2r^4}$$

Cálculo 4. $\boldsymbol{j = 0\ ;\ k = 1\quad l = 2}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_1 \partial_2 - \partial_2 \partial_1] e_0 = R^i_{012} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_1 \partial_2 e_0 - \partial_2 \partial_1 e_0 = R^i_{012} e_i$$

Volvemos a tratar por separado.

4.a. El término marcado en rojo: $\partial_1 \partial_2 e_0$

$$\partial_1 (\partial_2 e_0)$$

$$\partial_1 (\Gamma^0_{20} e_0 + \Gamma^1_{20} e_1 + \Gamma^2_{20} e_2 + \Gamma^3_{20} e_3)$$

Aquí no sobrevive ningún Símbolo de Christoffel, luego 4.a$= 0$.

4.b. El término marcado en azul: $\partial_2 \partial_1 e_0$

$$\partial_2 (\partial_1 e_0)$$

$$\partial_2 (\Gamma^0_{10} e_0 + \Gamma^1_{10} e_1 + \Gamma^2_{10} e_2 + \Gamma^3_{10} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_2 \Gamma^0_{10} e_0$$

Es decir:

$$\partial_\theta \left(\frac{a}{2r(r-a)} \right) e_0$$

Es decir, 4.b$= 0$.

Agrupando 4.a y 4.b:

$$[0 - 0] e_0 = R^i_{012} e_i$$

O lo que es lo mismo:

$$R^i_{012} e_i = 0 e_0 + 0 e_1 + 0 e_2 + 0 e_3$$

Por lo que:

$$R^0_{012} = 0$$

$$R^1_{012} = 0$$

$$R^2_{012} = 0$$

$$R^3_{012} = 0$$

Cálculo 5. $\boldsymbol{j = 0\ ;\ k = 1\quad l = 3}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_1 \partial_3 - \partial_3 \partial_1] e_0 = R^i_{013} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_1 \partial_3 e_0 - \partial_3 \partial_1 e_0 = R^i_{013} e_i$$

Volvemos a tratar por separado.

5.a. El término marcado en rojo: $\partial_1 \partial_3 e_0$

$$\partial_1 (\partial_3 e_0)$$

$$\partial_1 (\Gamma^0_{30} e_0 + \Gamma^1_{30} e_1 + \Gamma^2_{30} e_2 + \Gamma^3_{30} e_3)$$

Aquí no sobrevive ningún Símbolo de Christoffel, luego 5.a$= 0$.

5.b. El término marcado en azul: $\partial_3 \partial_1 e_0$

$$\partial_3 (\partial_1 e_0)$$

$$\partial_3 (\Gamma^0_{10} e_0 + \Gamma^1_{10} e_1 + \Gamma^2_{10} e_2 + \Gamma^3_{10} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_3 \Gamma^0_{10} e_0$$

Es decir:

$$\partial_\varphi \left(\frac{a}{2r(r-a)} \right) e_0$$

Es decir, 5.b$= 0$.

Agrupando 5.a y 5.b:

$$[0 - 0] e_0 = R^i_{013} e_i$$

O lo que es lo mismo:

$$R^i_{013} e_i = 0 e_0 + 0 e_1 + 0 e_2 + 0 e_3$$

Por lo que:

$$R^0_{013} = 0$$

$$R^1_{013} = 0$$

$$R^2_{013} = 0$$

$$R^3_{013} = 0$$

Cálculo 6. $\boldsymbol{j = 0\ ;\ k = 2\quad l = 3}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_2 \partial_3 - \partial_3 \partial_2] e_0 = R^i_{023} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_2 \partial_3 e_0 - \partial_3 \partial_2 e_0 = R^i_{023} e_i$$

Volvemos a tratar por separado.

6.a. El término marcado en rojo: $\partial_2 \partial_3 e_0$

$$\partial_2 (\partial_3 e_0)$$

$$\partial_2 (\Gamma^0_{30} e_0 + \Gamma^1_{30} e_1 + \Gamma^2_{30} e_2 + \Gamma^3_{30} e_3)$$

Aquí no sobrevive ningún Símbolo de Christoffel, luego 6.a$= 0$.

6.b. El término marcado en azul: $\partial_3 \partial_2 e_0$

$$\partial_3 (\partial_2 e_0)$$

$$\partial_3 (\Gamma^0_{20} e_0 + \Gamma^1_{20} e_1 + \Gamma^2_{20} e_2 + \Gamma^3_{20} e_3)$$

Aquí no sobrevive ningún Símbolo de Christoffel, luego 6.b$= 0$

Agrupando 6.a y 6.b:

$$[0 - 0] e_0 = R^i_{023} e_i$$

O lo que es lo mismo:

$$R^i_{023} e_i = 0 e_0 + 0 e_1 + 0 e_2 + 0 e_3$$

Por lo que:

$$R^0_{023} = 0$$

$$R^1_{023} = 0$$

$$R^2_{023} = 0$$

$$R^3_{023} = 0$$

Terminamos con las $j = 0$

Cálculo 7. $\boldsymbol{j = 1\ ;\ k = 0 \quad l = 1}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_0 \partial_1 - \partial_1 \partial_0] e_1 = R^i_{101} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_0 \partial_1 e_1 - \partial_1 \partial_0 e_1 = R^i_{101} e_i$$

Tenemos dos elementos que vamos a tratar por separado.

7.a. El término marcado en rojo: $\partial_0 \partial_1 e_1$

$$\partial_0 (\partial_1 e_1)$$

$$\partial_0 (\Gamma^0_{11} e_0 + \Gamma^1_{11} e_1 + \Gamma^2_{11} e_2 + \Gamma^3_{11} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_0 (\Gamma^1_{11} e_1)$$

Ahora hacemos la derivada del producto:

$$(\partial_0 \Gamma^1_{11}) e_1 + \Gamma^1_{11} (\partial_0 e_1)$$

$$\left(\partial_t \frac{a}{2r(a-r)}\right) e_1 + \Gamma^1_{11} (\Gamma^0_{01} e_0 + \Gamma^1_{01} e_1 + \Gamma^2_{01} e_2 + \Gamma^3_{01} e_3)$$

Del término derecho, sólo sobrevive:

$$\left(\partial_t \frac{a}{2r(r-a)}\right) e_1 + \Gamma^1_{11} \Gamma^0_{01} e_0$$

$$(0) e_1 + \Gamma^1_{11} \Gamma^0_{01} e_0$$

$$\Gamma^1_{11} \Gamma^0_{01} e_0$$

7.b. El término marcado en azul: $\partial_1 \partial_0 e_1$

$$\partial_1 (\partial_0 e_1)$$

$$\partial_1 (\Gamma^0_{01} e_0 + \Gamma^1_{01} e_1 + \Gamma^2_{01} e_2 + \Gamma^3_{01} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_1 (\Gamma^0_{01} e_0)$$

Hacemos la derivada del producto:

$$(\partial_1 \Gamma^0_{01}) e_0 + \Gamma^0_{01} (\partial_1 e_0)$$

$$(\partial_1 \Gamma^0_{01}) e_0 + \Gamma^0_{01} (\Gamma^0_{10} e_0 + \Gamma^1_{10} e_1 + \Gamma^2_{10} e_2 + \Gamma^3_{10} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$(\partial_1 \Gamma^0_{01}) e_0 + \Gamma^0_{01} \Gamma^0_{10} e_0$$

Agrupamos 7.a y 7.b:

$$\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{01}^{0}e_0 - [(\partial_1\Gamma_{01}^{0})e_0 + \Gamma_{01}^{0}\Gamma_{10}^{0}e_0]$$

$$\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{01}^{0}e_0 - (\partial_1\Gamma_{01}^{0})e_0 - \Gamma_{01}^{0}\Gamma_{10}^{0}e_0$$
$$-(\partial_1\Gamma_{01}^{0})e_0 + \Gamma_{11}^{1}\Gamma_{01}^{0}e_0 - \Gamma_{01}^{0}\Gamma_{10}^{0}e_0$$

Podemos sacar e_0 como factor común:

$$[-(\partial_1\Gamma_{01}^{0}) + \Gamma_{11}^{1}\Gamma_{01}^{0} - \Gamma_{01}^{0}\Gamma_{10}^{0}]e_0$$

Centremos nuestra atención en R_{101}^{0}:

$$R_{101}^{0} = -(\partial_1\Gamma_{01}^{0}) + \Gamma_{11}^{1}\Gamma_{01}^{0} - \Gamma_{01}^{0}\Gamma_{10}^{0}$$

$$= -(\partial_1\Gamma_{01}^{0}) + \frac{a}{2r(a-r)}\cdot\frac{a}{2r(r-a)} - \frac{a}{2r(r-a)}\cdot\frac{a}{2r(r-a)}$$

$$= -(\partial_1\Gamma_{01}^{0}) + \frac{a}{2r(a-r)}\cdot\frac{a}{2r(r-a)} - \frac{a^2}{4r^2(r-a)^2}$$

$$= -(\partial_1\Gamma_{01}^{0}) + \frac{-a}{2r(r-a)}\cdot\frac{a}{2r(r-a)} - \frac{a^2}{4r^2(r-a)^2}$$

$$= -(\partial_1\Gamma_{01}^{0}) + \frac{-a^2}{4r^2(r-a)^2} - \frac{a^2}{4r^2(r-a)^2}$$

$$= -(\partial_1\Gamma_{01}^{0}) + \frac{-2a^2}{4r^2(r-a)^2}$$

$$= -(\partial_1\Gamma_{01}^{0}) + \frac{-a^2}{2r^2(r-a)^2}$$

$$= \frac{a}{2r(r-a)^2} + \frac{a}{2r^2(r-a)} - \frac{a^2}{2r^2(r-a)^2}$$

Vamos a poner todo con común denominador:

$$= \frac{ar}{2r^2(r-a)^2} + \frac{a(r-a)}{2r^2(r-a)^2} - \frac{a^2}{2r^2(r-a)^2}$$

$$= \frac{ar + ar - a^2 - a^2}{2r^2(r-a)^2}$$

$$= \frac{2ar - 2a^2}{2r^2(r-a)^2}$$

$$= \frac{2a(r-a)}{2r^2(r-a)^2}$$

$$R_{101}^{0} = \frac{a}{r^2(r-a)}$$

Luego ya podemos decir que:

$$R^{i}_{101}e_i = \left(\frac{a}{r^2(r-a)}\right)e_0 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

Es decir que:

$$R^{0}_{101} = \frac{a}{r^2(r-a)}$$

$$R^{1}_{101} = 0$$

$$R^{2}_{101} = 0$$

$$R^{3}_{101} = 0$$

Cálculo 8. $\boldsymbol{j = 1\ ;\ k = 0 \quad l = 2}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_0 \partial_2 - \partial_2 \partial_0] e_1 = R^i_{102} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_0 \partial_2 e_1 - \partial_2 \partial_0 e_1 = R^i_{102} e_i$$

Volvemos a tratar por separado.

8.a. El término marcado en rojo: $\partial_0 \partial_2 e_1$

$$\partial_0 (\partial_2 e_1)$$

$$\partial_0 (\Gamma^0_{21} e_0 + \Gamma^1_{21} e_1 + \Gamma^2_{21} e_2 + \Gamma^3_{21} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_0 \Gamma^2_{21} e_2$$

Desarrollemos la derivada del producto:

$$(\partial_0 \Gamma^2_{21}) e_2 + \Gamma^2_{21} (\partial_0 e_2)$$

$$(\partial_t \Gamma^2_{21}) e_2 + \Gamma^2_{21} (\Gamma^0_{02} e_0 + \Gamma^1_{02} e_1 + \Gamma^2_{02} e_2 + \Gamma^3_{02} e_3)$$

Nada sobrevive: $(0) e_2 + \Gamma^2_{21} (0)$

Luego el término 8.a $= 0$.

8.b. El término marcado en azul: $\partial_2 \partial_0 e_1$

$$\partial_2 (\partial_0 e_1)$$

$$\partial_2 (\Gamma^0_{01} e_0 + \Gamma^1_{01} e_1 + \Gamma^2_{01} e_2 + \Gamma^3_{01} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_2 \Gamma^0_{01} e_0$$

$$\partial_\theta \Gamma^0_{01} e_0$$

Luego el término 8.b $= 0$.

Agrupemos ahora los términos iniciales 8.a y 8.b :

$$[0 - 0] = R^i_{102} e_i$$

O lo que es lo mismo:

$$R^i_{102} e_i = 0 e_0 + 0 e_1 + 0 e_2 + 0 e_3$$

Por lo que:

$$R^0_{102} = 0 \quad // \quad R^1_{102} = 0 \quad // \quad R^2_{102} = 0 \quad // \quad R^3_{102} = 0$$

Cálculo 9. $\boldsymbol{j = 1\ ;\ k = 0 \quad l = 3}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_0 \partial_3 - \partial_3 \partial_0] e_1 = R^i_{103} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_0 \partial_3 e_1 - \partial_3 \partial_0 e_1 = R^i_{103} e_i$$

Volvemos a tratar por separado.

9.a. El término marcado en rojo: $\partial_0 \partial_3 e_1$

$$\partial_0 (\partial_3 e_1)$$

$$\partial_0 (\Gamma^0_{31} e_0 + \Gamma^1_{31} e_1 + \Gamma^2_{31} e_2 + \Gamma^3_{31} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_0 \Gamma^3_{31} e_3$$

Desarrollemos la derivada del producto:

$$(\partial_0 \Gamma^3_{31}) e_3 + \Gamma^3_{31} (\partial_0 e_3)$$

$$(\partial_t \Gamma^3_{31}) e_3 + \Gamma^3_{31} (\Gamma^0_{03} e_0 + \Gamma^1_{03} e_1 + \Gamma^2_{03} e_2 + \Gamma^3_{03} e_3)$$

De donde no sobrevive nada:

$$(0) e_3 + \Gamma^3_{31} (0)$$

Luego el término 9.a $= 0$.

9.b. El término marcado en azul: $\partial_3 \partial_0 e_1$

$$\partial_3 (\partial_0 e_1)$$

$$\partial_3 (\Gamma^0_{01} e_0 + \Gamma^1_{01} e_1 + \Gamma^2_{01} e_2 + \Gamma^3_{01} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_3 \Gamma^0_{01} e_0$$

Desarrollemos la derivada del producto:

$$(\partial_3 \Gamma^0_{01}) e_0 + \Gamma^0_{01} (\partial_3 e_0)$$

$$(\partial_t \Gamma^0_{01}) e_0 + \Gamma^0_{01} (\Gamma^0_{03} e_0 + \Gamma^1_{03} e_1 + \Gamma^2_{03} e_2 + \Gamma^3_{03} e_3)$$

De donde no sobrevive nada:

$$(0)e_0 + \Gamma^0_{01}(0)$$

Luego el término 9.b $= 0$.

Agrupemos ahora los términos iniciales 9.a y 9.b :

$$[0 - 0] = R^i_{103}e_i$$

O lo que es lo mismo:

$$R^i_{103}e_i = 0e_0 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

Por lo que:

$$R^0_{103} = 0 \quad // \quad R^1_{103} = 0 \quad // \quad R^2_{103} = 0 \quad // \quad R^3_{103} = 0$$

Cálculo 10. $\boldsymbol{j = 1\ ;\ k = 1 \quad l = 2}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_1 \partial_2 - \partial_2 \partial_1] e_1 = R^i_{112} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_1 \partial_2 e_1 - \partial_2 \partial_1 e_1 = R^i_{112} e_i$$

Volvemos a tratar por separado.

10.a. El término marcado en rojo: $\partial_1 \partial_2 e_1$

$$\partial_1 (\partial_2 e_1)$$

$$\partial_1 (\Gamma^0_{21} e_0 + \Gamma^1_{21} e_1 + \Gamma^2_{21} e_2 + \Gamma^3_{21} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_1 \Gamma^2_{21} e_2$$

Desarrollamos la derivada del producto:

$$(\partial_1 \Gamma^2_{21}) e_2 + \Gamma^2_{21} (\partial_1 e_2)$$

$$(\partial_1 \Gamma^2_{21}) e_2 + \Gamma^2_{21} (\Gamma^0_{12} e_0 + \Gamma^1_{12} e_1 + \Gamma^2_{12} e_2 + \Gamma^3_{12} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$(\partial_1 \Gamma^2_{21}) e_2 + \Gamma^2_{21} \Gamma^2_{12} e_2$$

$$\left(-\frac{1}{r^2}\right) e_2 + \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r}\right) e_2$$

$$\left(-\frac{1}{r^2}\right) e_2 + \left(\frac{1}{r^2}\right) e_2 = 0 e_2$$

Luego el término 10.a $= 0$.

10.b. El término marcado en azul: $\partial_2 \partial_1 e_1$

$$\partial_2 (\partial_1 e_1)$$

$$\partial_2 (\Gamma^0_{11} e_0 + \Gamma^1_{11} e_1 + \Gamma^2_{11} e_2 + \Gamma^3_{11} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_2 \Gamma^1_{11} e_1$$

Desarrollemos la derivada del producto:

$$(\partial_2 \Gamma^1_{11}) e_1 + \Gamma^1_{11} (\partial_2 e_1)$$

$$(\partial_2 \Gamma^1_{11})e_1 + \Gamma^1_{11}(\Gamma^0_{21}e_0 + \Gamma^1_{21}e_1 + \Gamma^2_{21}e_2 + \Gamma^3_{21}e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$(\partial_2 \Gamma^1_{11})e_1 + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21}e_2$$

$$\left(\partial_\theta \frac{a}{2r(a-r)}\right)e_1 + \frac{a}{2r(a-r)} \cdot \frac{1}{r} e_2$$

$$(0)e_1 + \frac{a}{2r(a-r)} \cdot \frac{1}{r} e_2$$

$$\frac{a}{2r^2(a-r)} e_2$$

Luego el término 10.b $= \frac{a}{2r^2(a-r)} e_2$.

Agrupemos ahora los términos iniciales 10.a y 10.b :

$$\left[0 - \frac{a}{2r^2(a-r)} e_2\right] = R^i_{112} e_i$$

O lo que es lo mismo:

$$R^i_{112} e_i = 0e_0 + 0e_1 + \left(\frac{a}{2r^2(a-r)}\right)e_2 + 0e_3$$

Por lo que:

$$R^0_{112} = 0$$

$$R^1_{112} = 0$$

$$R^2_{112} = \frac{a}{2r^2(a-r)}$$

$$R^3_{112} = 0$$

Cálculo 11. $\boldsymbol{j = 1\ ;\ k = 1 \quad l = 3}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_1 \partial_3 - \partial_3 \partial_1] e_1 = R^i_{113} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_1 \partial_3 e_1 - \partial_3 \partial_1 e_1 = R^i_{113} e_i$$

Volvemos a tratar por separado.

11.a. El término marcado en rojo: $\partial_1 \partial_3 e_1$

$$\partial_1 (\partial_3 e_1)$$

$$\partial_1 (\Gamma^0_{31} e_0 + \Gamma^1_{31} e_1 + \Gamma^2_{31} e_2 + \Gamma^3_{31} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_1 (\Gamma^3_{31} e_3)$$

Desarrollemos la derivada del producto:

$$(\partial_1 \Gamma^3_{31}) e_3 + \Gamma^3_{31} (\partial_1 e_3)$$

$$(\partial_1 \Gamma^3_{31}) e_3 + \Gamma^3_{31} (\Gamma^0_{13} e_0 + \Gamma^1_{13} e_1 + \Gamma^2_{13} e_2 + \Gamma^3_{13} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$(\partial_1 \Gamma^3_{31}) e_3 + \Gamma^3_{31} \Gamma^3_{13} e_3$$

Desarrollemos:

$$\left(\partial_r \frac{1}{r}\right) e_3 + \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r} e_3$$

$$\left(-\frac{1}{r^2}\right) e_3 + \left(\frac{1}{r^2}\right) e_3$$

$$0\ e_3$$

Luego el elemento 11.a es $= 0$.

11.b. El término marcado en azul: $\partial_3 \partial_1 e_1$

$$\partial_3 (\partial_1 e_1)$$

$$\partial_3 (\Gamma^0_{11} e_0 + \Gamma^1_{11} e_1 + \Gamma^2_{11} e_2 + \Gamma^3_{11} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_3 \Gamma^1_{11} e_1$$

Desarrollemos la derivada del producto:

$$(\partial_3 \Gamma^1_{11}) e_1 + \Gamma^1_{11} (\partial_3 e_1)$$

$$(\partial_3 \Gamma^1_{11}) e_1 + \Gamma^1_{11} (\Gamma^0_{31} e_0 + \Gamma^1_{31} e_1 + \Gamma^2_{31} e_2 + \Gamma^3_{31} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$(\partial_3 \Gamma^1_{11}) e_1 + \Gamma^1_{11} \Gamma^3_{31} e_3$$

Desarrollamos:

$$(\partial_\varphi \Gamma^1_{11}) e_1 + \Gamma^1_{11} \Gamma^3_{31} e_3$$

$$(0) e_1 + \left(\frac{a}{2r(a-r)}\right)\left(\frac{1}{r}\right) e_3$$

Es decir, 11.b $= \left(\frac{a}{2r^2(a-r)}\right) e_3$

Agrupando 11.a y 11.b:

$$\left[0 - \left(\frac{a}{2r^2(a-r)}\right) e_3\right] e_0 = R^i_{113} e_i$$

O lo que es lo mismo:

$$R^i_{113} e_i = 0 e_0 + 0 e_1 + 0 e_2 + \left(\frac{-a}{2r^2(a-r)}\right) e_3$$

Por lo que:

$$R^0_{113} = 0$$

$$R^1_{113} = 0$$

$$R^2_{113} = 0$$

$$R^3_{113} = \left(\frac{-a}{2r^2(a-r)}\right)$$

Cálculo 12. $\boldsymbol{j = 1\ ;\ k = 2\quad l = 3}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_2 \partial_3 - \partial_3 \partial_2] e_1 = R^i_{123} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_2 \partial_3 e_1 - \partial_3 \partial_2 e_1 = R^i_{123} e_i$$

Volvemos a tratar por separado.

12.a. El término marcado en rojo: $\partial_2 \partial_3 e_1$

$$\partial_2 (\partial_3 e_1)$$

$$\partial_2 (\Gamma^0_{31} e_0 + \Gamma^1_{31} e_1 + \Gamma^2_{31} e_2 + \Gamma^3_{31} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_2 \Gamma^3_{31} e_3$$

Desarrollamos la derivada del producto:

$$(\partial_2 \Gamma^3_{31}) e_3 + \Gamma^3_{31} (\partial_2 e_3)$$

$$\left(\partial_2 \frac{1}{r}\right) e_3 + \Gamma^3_{31} (\Gamma^0_{23} e_0 + \Gamma^1_{23} e_1 + \Gamma^2_{23} e_2 + \Gamma^3_{23} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\left(\partial_\theta \frac{1}{r}\right) e_3 + \left(\frac{1}{r}\right) (cot\ \theta) e_3$$

$$(0) e_3 + \left(\frac{cot\ \theta}{r}\right) e_3$$

Luego 12.a es: $\left(\frac{cot\ \theta}{r}\right) e_3$

12.b. El término marcado en azul: $\partial_3 \partial_2 e_1$

$$\partial_3 (\partial_2 e_1)$$

$$\partial_3 (\Gamma^0_{21} e_0 + \Gamma^1_{21} e_1 + \Gamma^2_{21} e_2 + \Gamma^3_{21} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_3 \Gamma^2_{21} e_2$$

Desarrollemos la derivada del producto:

$$(\partial_3 \Gamma^2_{21}) e_2 + \Gamma^2_{21} (\partial_3 e_2)$$

$$(\partial_\varphi \Gamma^2_{21})e_2 + \Gamma^2_{21}(\Gamma^0_{32}e_0 + \Gamma^1_{32}e_1 + \Gamma^2_{32}e_2 + \Gamma^3_{32}e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$(0)e_2 + \Gamma^2_{21}\Gamma^3_{32}e_3$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)\cdot(\cot\theta)e_3$$

Por lo que 12.b es: $\left(\frac{\cot\theta}{r}\right)e_3$

Agrupando 12.a y 12.b:

$$\left[\left(\frac{\cot\theta}{r}\right) - \left(\frac{\cot\theta}{r}\right)\right]e_3 = [0]e_3 = R^i_{123}e_i$$

O lo que es lo mismo:

$$R^i_{123}e_i = 0e_0 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

Por lo que:

$$R^0_{123} = 0$$

$$R^1_{123} = 0$$

$$R^2_{123} = 0$$

$$R^3_{123} = 0$$

Terminamos con las $j = 1$

Cálculo 13. $\boldsymbol{j = 2\ ;\ k = 0\quad l = 1}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_0 \partial_1 - \partial_1 \partial_0] e_2 = R^i_{201} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_0 \partial_1 e_2 - \partial_1 \partial_0 e_2 = R^i_{201} e_i$$

Tenemos dos elementos que vamos a tratar por separado.

13.a. El término marcado en rojo: $\partial_0 \partial_1 e_2$

$$\partial_0 (\partial_1 e_2)$$

$$\partial_0 (\Gamma^0_{12} e_0 + \Gamma^1_{12} e_1 + \Gamma^2_{12} e_2 + \Gamma^3_{12} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_0 \Gamma^2_{12} e_2$$

Desplegamos la derivada del producto:

$$(\partial_0 \Gamma^2_{12}) e_2 + \Gamma^2_{12} (\partial_0 e_2)$$

Seguimos desplegando:

$$(\partial_0 \Gamma^2_{12}) e_2 + \Gamma^2_{12} (\Gamma^0_{02} e_0 + \Gamma^1_{02} e_1 + \Gamma^2_{02} e_2 + \Gamma^3_{02} e_3)$$

Seguimos:

$$(\partial_t \Gamma^2_{12}) e_2 + \Gamma^2_{12} (0)$$

$$(0) e_2 + \Gamma^2_{12} (0)$$

Luego 13.a $= 0$.

13.b El término marcado en azul: $\partial_1 \partial_0 e_2$

$$\partial_1 (\partial_0 e_2)$$

$$\partial_1 (\Gamma^0_{02} e_0 + \Gamma^1_{02} e_1 + \Gamma^2_{02} e_2 + \Gamma^3_{02} e_3)$$

Nada sobrevive:

$$\partial_1 (0)$$

Luego 13.b $= 0$.

Agrupando 13.a y 13.b:

$$[0 - 0] = R^i_{201} e_i$$

O lo que es lo mismo:

$$R^i_{201}e_i = 0e_0 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

Por lo que:

$$R^0_{201} = 0$$

$$R^1_{201} = 0$$

$$R^2_{201} = 0$$

$$R^3_{201} = 0$$

Cálculo 14. $\boldsymbol{j = 2\ ;\ k = 0 \quad l = 2}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_0 \partial_2 - \partial_2 \partial_0] e_2 = R^i_{002} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_0 \partial_2 e_2 - \partial_2 \partial_0 e_2 = R^i_{202} e_i$$

Volvemos a tratar por separado.

14.a. El término marcado en rojo: $\partial_0 \partial_2 e_2$

$$\partial_0 (\partial_2 e_2)$$

$$\partial_0 (\Gamma^0_{22} e_0 + \Gamma^1_{22} e_1 + \Gamma^2_{22} e_2 + \Gamma^3_{22} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_0 \Gamma^1_{22} e_1$$

Desarrollemos la derivada del producto:

$$(\partial_0 \Gamma^1_{22}) e_1 + \Gamma^1_{22} (\partial_0 e_1)$$

$$(\partial_0 \Gamma^1_{22}) e_1 + \Gamma^1_{22} (\Gamma^0_{01} e_0 + \Gamma^1_{01} e_1 + \Gamma^2_{01} e_2 + \Gamma^3_{01} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$(\partial_0 \Gamma^1_{22}) e_1 + \Gamma^1_{22} \Gamma^0_{01} e_0$$

$$(\partial_t \Gamma^1_{22}) e_1 + (a - r) \left(\frac{a}{2r(r-a)} \right) e_0$$

Luego 14.a es: $\left(\frac{(a-r)a}{2r(r-a)} \right) e_0$

14.b. El término marcado en azul: $\partial_2 \partial_0 e_2$

$$\partial_2 (\partial_0 e_2)$$

$$\partial_2 (\Gamma^0_{02} e_0 + \Gamma^1_{02} e_1 + \Gamma^2_{02} e_2 + \Gamma^3_{02} e_3)$$

Nada sobrevive:

$$\partial_2 (0)$$

Luego 14.b es: 0.

Agrupemos ahora los términos iniciales 14.a y 14.b :

$$\left[\left(\frac{a(a-r)}{2r(r-a)} \right) e_0 - 0 \right] = R^i_{202} e_i$$

Si cambiamos el signo al numerador:

$$\left[\left(\frac{-a(r-a)}{2r(r-a)}\right)e_0 - 0\right] = R^i_{202}e_i$$

$$\left(\frac{-a}{2r}\right)e_0 = R^i_{202}e_i$$

Es decir que:

$$R^i_{202}e_i = \left(\frac{-a}{2r}\right)e_0 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

$$R^0_{202} = \frac{-a}{2r}$$

$$R^1_{202} = 0$$

$$R^2_{202} = 0$$

$$R^3_{202} = 0$$

Cálculo 15. $\boldsymbol{j = 2\ ;\ k = 0\quad l = 3}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_0 \partial_3 - \partial_3 \partial_0] e_2 = R^i_{203} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_0 \partial_3 e_2 - \partial_3 \partial_0 e_2 = R^i_{203} e_i$$

Volvemos a tratar por separado.

15.a. El término marcado en rojo: $\partial_0 \partial_3 e_2$

$$\partial_0 (\partial_3 e_2)$$

$$\partial_0 (\Gamma^0_{32} e_0 + \Gamma^1_{32} e_1 + \Gamma^2_{32} e_2 + \Gamma^3_{32} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_0 \Gamma^3_{32} e_3$$

Desarrollemos la derivada del producto:

$$(\partial_0 \Gamma^3_{32}) e_3 + \Gamma^3_{32} (\partial_0 e_3)$$

$$(\partial_t \Gamma^3_{32}) e_3 + \Gamma^3_{32} (\Gamma^0_{03} e_0 + \Gamma^1_{03} e_1 + \Gamma^2_{03} e_2 + \Gamma^3_{03} e_3)$$

De aquí no sobrevive nada en ningún miembro luego 15.a es: 0.

15.b. El término marcado en azul: $\partial_3 \partial_0 e_2$

$$\partial_3 (\partial_0 e_2)$$

$$\partial_3 (\Gamma^0_{02} e_0 + \Gamma^1_{02} e_1 + \Gamma^2_{02} e_2 + \Gamma^3_{02} e_3)$$

Nada sobrevive, luego 15.b es: 0.

Agrupando 15.a y 15.b:

$$[0 - 0] = R^i_{203} e_i$$

O lo que es lo mismo:

$$R^i_{003} e_i = 0 e_0 + 0 e_1 + 0 e_2 + 0 e_3$$

Por lo que:

$$R^0_{203} = 0$$

$$R^1_{203} = 0$$

$$R^2_{203} = 0$$

$$R^3_{203} = 0$$

Cálculo 16. $\boldsymbol{j = 2;\ k = 1 \quad l = 2}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_1 \partial_2 - \partial_2 \partial_1] e_2 = R^i_{212} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_1 \partial_2 e_2 - \partial_2 \partial_1 e_2 = R^i_{212} e_i$$

Volvemos a tratar por separado.

16.a. El término marcado en rojo: $\partial_1 \partial_2 e_2$

$$\partial_1 (\partial_2 e_2)$$

$$\partial_1 (\Gamma^0_{22} e_0 + \Gamma^1_{22} e_1 + \Gamma^2_{22} e_2 + \Gamma^3_{22} e_3)$$

Aquí sólo sobrevive:

$$\partial_1 \Gamma^1_{22} e_1$$

Desarrollemos la derivada del producto:

$$(\partial_1 \Gamma^1_{22}) e_1 + \Gamma^1_{22} (\partial_1 e_1)$$

$$(\partial_r \Gamma^1_{22}) e_1 + \Gamma^1_{22} (\Gamma^0_{11} e_0 + \Gamma^1_{11} e_1 + \Gamma^2_{11} e_2 + \Gamma^3_{11} e_3)$$

$$(\partial_r (a - r)) e_1 + \Gamma^1_{22} \Gamma^1_{11} e_1$$

$$(-1) e_1 + (a - r) \left(\frac{a}{2r(a - r)} \right) e_1$$

Luego el término 16.a es: $\left[-1 + (a - r) \left(\frac{a}{2r(a-r)} \right) \right] e_1$

16.b. El término marcado en azul: $\partial_2 \partial_1 e_2$

$$\partial_2 (\partial_1 e_2)$$

$$\partial_2 (\Gamma^0_{12} e_0 + \Gamma^1_{12} e_1 + \Gamma^2_{12} e_2 + \Gamma^3_{12} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_2 \Gamma^2_{12} e_2$$

Desarrollemos la derivada del producto:

$$(\partial_2 \Gamma^2_{12}) e_2 + \Gamma^2_{12} (\partial_2 e_2)$$

$$(\partial_\theta \Gamma^2_{12}) e_2 + \Gamma^2_{12} (\Gamma^0_{22} e_0 + \Gamma^1_{22} e_1 + \Gamma^2_{22} e_2 + \Gamma^3_{22} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$(\partial_\theta \Gamma^2_{12})e_2 + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22}e_1$$

$$(0)e_2 + \left(\frac{1}{r}\right)(a-r)e_1$$

$$\left(\frac{a}{r} - \frac{r}{r}\right)e_1$$

$$\left(\frac{a}{r} - 1\right)e_1$$

Luego 16.b es: $\left(\frac{a}{r} - 1\right)e_1$

Agrupemos ahora 16.a y 16.b:

$$\left[\left[-1 + \frac{a(a-r)}{2r(a-r)}\right]e_1\right] - \left[\left(\frac{a}{r} - 1\right)e_1\right] = R^i_{212}e_i$$

$$\left[-1 + \frac{a}{2r} - \frac{a}{r} + 1\right]e_1 = R^i_{212}e_i$$

$$\left[\frac{a}{2r} - \frac{a}{r}\right]e_1 = R^i_{212}e_i$$

$$\left[\frac{a}{2r} - \frac{2a}{2r}\right]e_1 = R^i_{212}e_i$$

$$\left[\frac{a}{2r} - \frac{2a}{2r}\right]e_1 = R^i_{212}e_i$$

$$\frac{-a}{2r}e_1 = R^i_{212}e_i$$

O lo que es lo mismo:

$$R^i_{212}e_i = 0e_0 + \frac{-a}{2r}e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

Por lo que:

$$R^0_{212} = 0$$

$$R^1_{212} = \frac{-a}{2r}$$

$$R^2_{212} = 0$$

$$R^3_{212} = 0$$

Cálculo 17. $\boldsymbol{j = 2\ ;\ k = 1 \quad l = 3}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_1 \partial_3 - \partial_3 \partial_1] e_2 = R^i_{213} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_1 \partial_3 e_2 - \partial_3 \partial_1 e_2 = R^i_{213} e_i$$

Volvemos a tratar por separado.

17.a. El término marcado en rojo: $\partial_1 \partial_3 e_2$

$$\partial_1 (\partial_3 e_2)$$

$$\partial_1 (\Gamma^0_{32} e_0 + \Gamma^1_{32} e_1 + \Gamma^2_{32} e_2 + \Gamma^3_{32} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_1 (\Gamma^3_{32} e_3)$$

Desarrollemos la derivada del producto:

$$(\partial_1 \Gamma^3_{32}) e_3 + \Gamma^3_{32} (\partial_1 e_3)$$

$$(\partial_1 \Gamma^3_{32}) e_3 + \Gamma^3_{32} (\Gamma^0_{13} e_0 + \Gamma^1_{13} e_1 + \Gamma^2_{13} e_2 + \Gamma^3_{13} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$(\partial_1 \Gamma^3_{32}) e_3 + \Gamma^3_{32} \Gamma^3_{13} e_3$$

Desarrollemos:

$$(\partial_r \cot\theta) e_3 + \left(\cot\theta \cdot \frac{1}{r}\right) e_3$$

$$(0) e_3 + \left(\frac{\cot\theta}{r}\right) e_3$$

Luego el elemento 17.a es $= \left(\frac{\cot\theta}{r}\right) e_3$

17.b. El término marcado en azul: $\partial_3 \partial_1 e_2$

$$\partial_3 (\partial_1 e_2)$$

$$\partial_3 (\Gamma^0_{12} e_0 + \Gamma^1_{12} e_1 + \Gamma^2_{12} e_2 + \Gamma^3_{12} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_3 \Gamma^2_{12} e_2$$

Desarrollemos la derivada del producto:

$$(\partial_3 \Gamma^2_{12})e_2 + \Gamma^2_{12}(\partial_3 e_2)$$

$$(\partial_3 \Gamma^2_{12})e_2 + \Gamma^2_{12}(\Gamma^0_{32}e_0 + \Gamma^1_{32}e_1 + \Gamma^2_{32}e_2 + \Gamma^3_{32}e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$(\partial_3 \Gamma^2_{12})e_2 + \Gamma^2_{12}\Gamma^3_{32}e_3$$

Desarrollamos:

$$\left(\partial_\varphi \Gamma^2_{12}\right)e_2 + \Gamma^2_{12}\Gamma^3_{32}e_3$$

$$(0)e_2 + \left(\frac{1}{r}\right)(cot\,\theta)e_3$$

Es decir, 17.b $=\left(\frac{cot\,\theta}{r}\right)e_3$

Agrupando 17.a y 17.b:

$$\left[\left(\frac{cot\,\theta}{r}\right)e_3 - \left(\frac{cot\,\theta}{r}\right)e_3\right]e_0 = R^i_{213}e_i$$

$$\left[\left(\frac{cot\,\theta}{r}\right) - \left(\frac{cot\,\theta}{r}\right)\right]e_3 = R^i_{213}e_i$$

$$[0]e_3 = R^i_{213}e_i$$

O lo que es lo mismo:

$$R^i_{213}e_i = 0e_0 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

Por lo que:

$$R^0_{213} = 0$$

$$R^1_{213} = 0$$

$$R^2_{213} = 0$$

$$R^3_{213} = 0$$

Cálculo 18. $\boldsymbol{j = 2\ ;\ k = 2\quad l = 3}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_2 \partial_3 - \partial_3 \partial_2] e_2 = R^i_{223} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_2 \partial_3 e_2 - \partial_3 \partial_2 e_2 = R^i_{223} e_i$$

Volvemos a tratar por separado.

18.a. El término marcado en rojo: $\partial_2 \partial_3 e_2$

$$\partial_2 (\partial_3 e_2)$$

$$\partial_2 (\Gamma^0_{32} e_0 + \Gamma^1_{32} e_1 + \Gamma^2_{32} e_2 + \Gamma^3_{32} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_2 \Gamma^3_{32} e_3$$

Desarrollamos la derivada del producto:

$$(\partial_2 \Gamma^3_{32}) e_3 + \Gamma^3_{32} (\partial_2 e_3)$$

$$(\partial_2 \cot\theta) e_3 + \Gamma^3_{32} (\Gamma^0_{23} e_0 + \Gamma^1_{23} e_1 + \Gamma^2_{23} e_2 + \Gamma^3_{23} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$(\partial_\theta \cot\theta) e_3 + \Gamma^3_{32} \Gamma^3_{23} e_3$$

$$(\partial_\theta \cot\theta) e_3 + (\cot\theta)(\cot\theta) e_3$$

$$(\partial_\theta \cot\theta) e_3 + (\cot^2\theta) e_3$$

$$\left(\frac{-1}{\sin^2\theta}\right) e_3 + (\cot^2\theta) e_3$$

$$\left(\frac{-1}{\sin^2\theta}\right) e_3 + \left(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right) e_3$$

$$\left(\frac{-1 + \cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right) e_3$$

$$\left(\frac{-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\right) e_3$$

$$(-1) e_3$$

Luego 18.a es: $[-1] e_3$

18.b. El término marcado en azul: $\partial_3 \partial_2 e_2$

$$\partial_3(\partial_2 e_2)$$

$$\partial_3(\Gamma^0_{22}e_0 + \Gamma^1_{22}e_1 + \Gamma^2_{22}e_2 + \Gamma^3_{22}e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_3\Gamma^1_{22}e_1$$

Desarrollemos la derivada del producto:

$$(\partial_3\Gamma^1_{22})e_1 + \Gamma^1_{22}(\partial_3 e_1)$$

$$\left(\partial_\varphi\Gamma^1_{22}\right)e_1 + \Gamma^1_{22}(\Gamma^0_{31}e_0 + \Gamma^1_{31}e_1 + \Gamma^2_{31}e_2 + \Gamma^3_{31}e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$(0)e_1 + \Gamma^1_{22}\Gamma^3_{31}e_3$$

$$(a-r)\cdot\left(\frac{1}{r}\right)e_3$$

$$(a-r)\cdot\left(\frac{1}{r}\right)e_3$$

$$\left(\frac{a}{r}-\frac{r}{r}\right)e_3$$

$$\left(\frac{a}{r}-1\right)e_3$$

Por lo que 18.b es: $\left(\frac{a}{r}-1\right)e_3$

Agrupando 18.a y 18.b:

$$\left[(-1)e_3 - \left(\frac{a}{r}-1\right)e_3\right] = R^i_{223}e_i$$

$$\left[-1-\frac{a}{r}+1\right]e_3 = R^i_{223}e_i$$

$$\frac{-a}{r}e_3 = R^i_{223}e_i$$

O lo que es lo mismo:

$$R^i_{223}e_i = 0e_0 + 0e_1 + 0e_2 + \frac{-a}{r}e_3$$

Por lo que:

$$R^0_{223} = 0 \quad // \quad R^1_{223} = 0 \quad // \quad R^2_{223} = 0 \quad // \quad R^3_{223} = \frac{-a}{r}$$

Terminamos con las $j = 2$

Cálculo 19. $\boldsymbol{j = 3\ ;\ k = 0\quad l = 1}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_0 \partial_1 - \partial_1 \partial_0] e_3 = R^i_{301} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_0 \partial_1 e_3 - \partial_1 \partial_0 e_3 = R^i_{301} e_i$$

Tenemos dos elementos que vamos a tratar por separado.

19.a. El término marcado en rojo: $\partial_0 \partial_1 e_3$

$$\partial_0 (\partial_1 e_3)$$

$$\partial_0 (\Gamma^0_{13} e_0 + \Gamma^1_{13} e_1 + \Gamma^2_{13} e_2 + \Gamma^3_{13} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_0 \Gamma^3_{13} e_3$$

Ahora hacemos la derivada del producto:

$$(\partial_0 \Gamma^3_{13}) e_3 + \Gamma^3_{13} (\partial_0 e_3)$$

$$(\partial_t \Gamma^3_{13}) e_3 + \Gamma^3_{13} (\Gamma^0_{03} e_0 + \Gamma^1_{03} e_1 + \Gamma^2_{03} e_2 + \Gamma^3_{03} e_3)$$

Nada sobrevive:

$$(0) e_3 + \Gamma^3_{13} (0)$$

Luego 19.a es: 0.

19.b. El término marcado en azul: $\partial_1 \partial_0 e_3$

$$\partial_1 (\partial_0 e_3)$$

$$\partial_1 (\Gamma^0_{03} e_0 + \Gamma^1_{03} e_1 + \Gamma^2_{03} e_2 + \Gamma^3_{03} e_3)$$

Luego 19.b es: 0.

Agrupamos 19.a y 19.b:

$$[0 - 0] = R^i_{301} e_i$$

Luego podemos decir que:

$$R^i_{301} e_i = 0 e_0 + 0 e_1 + 0 e_2 + 0 e_3$$

Es decir que:

$$R^0_{301} = 0 \quad // \quad R^1_{301} = 0 \quad // \quad R^2_{301} = 0 \quad // \quad R^3_{301} = 0$$

Cálculo 20. $\boldsymbol{j = 3\ ;\ k = 0\quad l = 2}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_0 \partial_2 - \partial_2 \partial_0] e_3 = R^i_{302} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_0 \partial_2 e_3 - \partial_2 \partial_0 e_3 = R^i_{302} e_i$$

Volvemos a tratar por separado.

20.a. El término marcado en rojo: $\partial_0 \partial_2 e_3$

$$\partial_0 (\partial_2 e_3)$$

$$\partial_0 (\Gamma^0_{23} e_0 + \Gamma^1_{23} e_1 + \Gamma^2_{23} e_2 + \Gamma^3_{23} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_0 \Gamma^3_{23} e_3$$

Desarrollemos la derivada del producto:

$$\partial_0 \Gamma^3_{23} e_3 + \partial_0 \Gamma^3_{23} e_3$$

$$(\partial_0 \Gamma^3_{23}) e_3 + \Gamma^3_{23} (\partial_0 e_3)$$

$$(\partial_t \Gamma^3_{23}) e_3 + \Gamma^3_{23} (\Gamma^0_{03} e_0 + \Gamma^1_{03} e_1 + \Gamma^2_{03} e_2 + \Gamma^3_{03} e_3)$$

De donde no sobrevive nada:

$$(0) e_3 + \Gamma^3_{23} (0)$$

Luego el término 20.a $= 0$.

20.b. El término marcado en azul: $\partial_2 \partial_0 e_3$

$$\partial_2 (\partial_0 e_3)$$

$$\partial_2 (\Gamma^0_{03} e_0 + \Gamma^1_{03} e_1 + \Gamma^2_{03} e_2 + \Gamma^3_{03} e_3)$$

Nada sobrevive:

Luego el término 20.b $= 0$.

Agrupemos ahora los términos iniciales 8.a y 8.b :

$$[0 - 0] = R^i_{302} e_i$$

O lo que es lo mismo:

$$R^i_{302} e_i = 0 e_0 + 0 e_1 + 0 e_2 + 0 e_3$$

Por lo que:

$$R^0_{302} = 0 \quad // \quad R^1_{302} = 0 \quad // \quad R^2_{302} = 0 \quad // \quad R^3_{302} = 0$$

Cálculo 21. $\boldsymbol{j = 3\ ;\ k = 0 \quad l = 3}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_0 \partial_3 - \partial_3 \partial_0] e_3 = R^i_{303} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_0 \partial_3 e_3 - \partial_3 \partial_0 e_3 = R^i_{303} e_i$$

Volvemos a tratar por separado.

21.a. El término marcado en rojo: $\partial_0 \partial_3 e_3$

$$\partial_0 (\partial_3 e_3)$$

$$\partial_0 (\Gamma^0_{33} e_0 + \Gamma^1_{33} e_1 + \Gamma^2_{33} e_2 + \Gamma^3_{33} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_0 (\Gamma^1_{33} e_1 + \Gamma^2_{33} e_2)$$

Desarrollamos las derivadas de los productos en dos partes:

$$(\partial_0 \Gamma^1_{33}) e_1 + \Gamma^1_{33} (\partial_0 e_1)$$

$$(\partial_t \Gamma^1_{33}) e_1 + \Gamma^1_{33} (\Gamma^0_{01} e_0 + \Gamma^1_{01} e_1 + \Gamma^2_{01} e_2 + \Gamma^3_{01} e_3)$$

$$(\partial_t \Gamma^1_{33}) e_1 + \Gamma^1_{33} \Gamma^0_{01} e_0$$

$$(0) e_1 + \left((a - r) sin^{\,2}\theta\right) \cdot \left(\frac{a}{2r(r-a)}\right) e_0$$

$$\left(\frac{a(a-r) sin^{\,2}\theta}{2r(r-a)}\right) e_0$$

$$\left(\frac{-a(r-a) sin^{\,2}\theta}{2r(r-a)}\right) e_0$$

$$\left(\frac{-a sin^{\,2}\theta}{2r}\right) e_0$$

$$(\partial_0 \Gamma^2_{33}) e_2 + \Gamma^2_{33} (\partial_0 e_2)$$

$$(\partial_t \Gamma^2_{33}) e_2 + \Gamma^2_{33} (\Gamma^0_{02} e_0 + \Gamma^1_{02} e_1 + \Gamma^2_{02} e_2 + \Gamma^3_{02} e_3)$$

$$(0) e_2 + \Gamma^2_{33} (0)$$

Luego el término 21.a $= \left(\frac{-asin^2\theta}{2r}\right)e_0$

21.b. El término marcado en azul: $\partial_3\partial_0 e_3$

$$\partial_3(\partial_0 e_3)$$

$$\partial_3(\Gamma^0_{03}e_0 + \Gamma^1_{03}e_1 + \Gamma^2_{03}e_2 + \Gamma^3_{03}e_3)$$

Nada sobrevive:

$$\partial_3(0)$$

Luego el término 21.b $= 0$.

Agrupemos ahora los términos iniciales 21.a y 21.b :

$$\left[\left(\frac{-asin^2\theta}{2r}\right)e_0 - 0\right] = R^i_{303}e_i$$

O lo que es lo mismo:

$$R^i_{303}e_i = \left(\frac{-asin^2\theta}{2r}\right)e_0 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

Por lo que:

$$R^0_{303} = \frac{-asin^2\theta}{2r}$$

$$R^1_{303} = 0$$

$$R^2_{303} = 0$$

$$R^3_{303} = 0$$

Cálculo 22. $\boldsymbol{j = 3\ ;\ k = 1 \quad l = 2}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_1 \partial_2 - \partial_2 \partial_1] e_3 = R^i_{312} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_1 \partial_2 e_3 - \partial_2 \partial_1 e_3 = R^i_{312} e_i$$

Volvemos a tratar por separado.

22.a. El término marcado en rojo: $\partial_1 \partial_2 e_3$

$$\partial_1 (\partial_2 e_3)$$

$$\partial_1 (\Gamma^0_{23} e_0 + \Gamma^1_{23} e_1 + \Gamma^2_{23} e_2 + \Gamma^3_{23} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_1 \Gamma^3_{23} e_3$$

Desarrollamos la derivada del producto:

$$(\partial_1 \Gamma^3_{23}) e_3 + \Gamma^3_{23} (\partial_1 e_3)$$

$$(\partial_1 \Gamma^3_{23}) e_3 + \Gamma^3_{23} (\Gamma^0_{13} e_0 + \Gamma^1_{13} e_1 + \Gamma^2_{13} e_2 + \Gamma^3_{13} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$(\partial_1 \Gamma^3_{23}) e_3 + \Gamma^3_{23} \Gamma^3_{13} e_3$$

$$(\partial_r \cot\theta) e_3 + (\cot\theta) \left(\frac{1}{r}\right) e_3$$

$$(0) e_3 + \left(\frac{\cot\theta}{r}\right) e_3$$

Luego el término 22.a $= \left(\frac{\cot\theta}{r}\right) e_3$.

22.b. El término marcado en azul: $\partial_2 \partial_1 e_3$

$$\partial_2 (\partial_1 e_3)$$

$$\partial_2 (\Gamma^0_{13} e_0 + \Gamma^1_{13} e_1 + \Gamma^2_{13} e_2 + \Gamma^3_{13} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_2 \Gamma^3_{13} e_3$$

Desarrollemos la derivada del producto:

$$(\partial_2 \Gamma^3_{13}) e_3 + \Gamma^3_{13} (\partial_2 e_3)$$

$$(\partial_2 \Gamma^3_{13}) e_3 + \Gamma^3_{13} (\Gamma^0_{23} e_0 + \Gamma^1_{23} e_1 + \Gamma^2_{23} e_2 + \Gamma^3_{23} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$(\partial_2 \Gamma^3_{13})e_3 + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{23}e_3$$

$$\left(\partial_\theta \frac{1}{r}\right)e_3 + \left(\frac{1}{r}\right)(cot\,\theta)e_3$$

$$(0)e_3 + \left(\frac{cot\,\theta}{r}\right)e_3$$

Luego el término 22.b $= \left(\frac{cot\,\theta}{r}\right)e_3$

Agrupemos ahora los términos iniciales 22.a y 22.b :

$$\left[\left(\frac{cot\,\theta}{r}\right)e_3 - \left(\frac{cot\,\theta}{r}\right)e_3\right] = R^i_{312}e_i$$

$$[0 - 0]e_3 = R^i_{312}e_i$$

O lo que es lo mismo:

$$R^i_{312}e_i = 0e_0 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

Por lo que:

$$R^0_{312} = 0$$

$$R^1_{312} = 0$$

$$R^2_{312} = 0$$

$$R^3_{312} = 0$$

Cálculo 23. $\boldsymbol{j = 3\ ;\ k = 1 \quad l = 3}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_1 \partial_3 - \partial_3 \partial_1] e_3 = R^i_{313} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_1 \partial_3 e_3 - \partial_3 \partial_1 e_3 = R^i_{313} e_i$$

Volvemos a tratar por separado.

23.a. El término marcado en rojo: $\partial_1 \partial_3 e_3$

$$\partial_1 (\partial_3 e_3)$$

$$\partial_1 (\Gamma^0_{33} e_0 + \Gamma^1_{33} e_1 + \Gamma^2_{33} e_2 + \Gamma^3_{33} e_3)$$

Sólo sobreviven:

$$\partial_1 (\Gamma^1_{33} e_1 + \Gamma^2_{33} e_2)$$

$$\partial_1 (\Gamma^1_{33}) e_1 + \partial_1 (\Gamma^2_{33} e_2)$$

Desarrollemos las derivadas de los productos:

$$(\partial_1 \Gamma^1_{33}) e_1 + \Gamma^1_{33} (\partial_1 e_1)$$

$$(\partial_r \Gamma^1_{33}) e_1 + \Gamma^1_{33} (\Gamma^0_{11} e_0 + \Gamma^1_{11} e_1 + \Gamma^2_{11} e_2 + \Gamma^3_{11} e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$(\partial_r \Gamma^1_{33}) e_1 + \Gamma^1_{33} \Gamma^1_{11} e_1$$

$$(\partial_r \big((a-r) sin^{\,2}\theta\big)) e_1 + \big((a-r) sin^{\,2}\theta\big) \left(\frac{a}{2r(a-r)}\right) e_1$$

$$(-sin^{\,2}\theta) e_1 + \left(\frac{a(a-r) sin^{\,2}\theta}{2r(a-r)}\right) e_1$$

$$(\partial_1 \Gamma^2_{33}) e_2 + \Gamma^2_{33} (\partial_1 e_2)$$

Sólo sobrevive:

$$(\partial_1 \Gamma^2_{33}) e_2 + \Gamma^2_{33} (\partial_1 e_2)$$

$$(\partial_r \Gamma^2_{33}) e_2 + \Gamma^2_{33} (\Gamma^0_{12} e_0 + \Gamma^1_{12} e_1 + \Gamma^2_{12} e_2 + \Gamma^3_{12} e_3)$$

$$(\partial_r \Gamma^2_{33})e_2 + \Gamma^2_{33}\Gamma^2_{12}e_2$$

$$(0)e_2 + (-\cos\theta \sin\theta)\left(\frac{1}{r}\right)e_2$$

$$\left(\frac{-\cos\theta \sin\theta}{r}\right)e_2$$

Luego 23.a es: $\left[(-sin^2\theta) + \left(\frac{a(a-r)sin^2\theta}{2r(a-r)}\right)\right]e_1 - \frac{\cos\theta \sin\theta}{r}e_2$

23.b. El término marcado en azul: $\partial_3\partial_1 e_3$

$$\partial_3(\partial_1 e_3)$$

$$\partial_3(\Gamma^0_{13}e_0 + \Gamma^1_{13}e_1 + \Gamma^2_{13}e_2 + \Gamma^3_{13}e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_3\Gamma^3_{13}e_3$$

Desarrollemos la derivada del producto:

$$(\partial_3\Gamma^3_{13})e_3 + \Gamma^3_{13}(\partial_3 e_3)$$

$$(\partial_3\Gamma^3_{13})e_3 + \Gamma^3_{13}[(\Gamma^0_{33}e_0 + \Gamma^1_{33}e_1 + \Gamma^2_{33}e_2 + \Gamma^3_{33}e_3) + (\Gamma^0_{33}e_0 + \Gamma^1_{33}e_1 + \Gamma^2_{33}e_2 + \Gamma^3_{33}e_3)]$$

Sobrevive:

$$(\partial_3\Gamma^3_{13})e_3 + \Gamma^3_{13}[\Gamma^1_{33}e_1 + \Gamma^2_{33}e_2]$$

Desarrollamos:

$$\left(\partial_\varphi\Gamma^3_{13}\right)e_3 + \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{33}e_1 + \Gamma^3_{13}\Gamma^2_{33}e_2$$

$$(0)e_3 + \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{33}e_1 + \Gamma^3_{13}\Gamma^2_{33}e_2$$

$$\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{33}e_1 + \Gamma^3_{13}\Gamma^2_{33}e_2$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)\left((a-r)sin^2\theta\right)e_1 + \left(\frac{1}{r}\right)(-\cos\theta \sin\theta)e_2$$

$$\left(\frac{(a-r)sin^2\theta}{r}\right)e_1 - \left(\frac{\cos\theta \sin\theta}{r}\right)e_2$$

Luego 23.b es: $\left(\frac{(a-r)sin^2\theta}{r}\right)e_1 - \left(\frac{\cos\theta \sin\theta}{r}\right)e_2$

Agrupando 23.a y 23.b:

$$\left\{\left[\left[(-sin^2\theta)+\left(\frac{a(a-r)sin^2\theta}{2r(a-r)}\right)\right]e_1-\frac{cos\,\theta\,sin\,\theta}{r}e_2\right]-\left[\left(\frac{(a-r)sin^2\theta}{r}\right)e_1-\left(\frac{cos\,\theta\,sin\,\theta}{r}\right)e_2\right]\right\}=R^i_{313}e_i$$

$$\left\{\left[\left[(-sin^2\theta)+\left(\frac{a(a-r)sin^2\theta}{2r(a-r)}\right)\right]e_1-\frac{cos\,\theta\,sin\,\theta}{r}e_2\right]-\left(\frac{(a-r)sin^2\theta}{r}\right)e_1+\left(\frac{cos\,\theta\,sin\,\theta}{r}\right)e_2\right\}=R^i_{313}e_i$$

$$\left[(-sin^2\theta)+\left(\frac{a(a-r)sin^2\theta}{2r(a-r)}\right)-\left(\frac{(a-r)sin^2\theta}{r}\right)\right]e_1=R^i_{313}e_i$$

$$\left[(-sin^2\theta)+\left(\frac{a(a-r)sin^2\theta}{2r(a-r)}\right)-\left(\frac{2(a-r)(a-r)sin^2\theta}{2r(a-r)}\right)\right]e_1=R^i_{313}e_i$$

$$\left[(-sin^2\theta)+\left(\frac{a(a-r)sin^2\theta-2(a-r)(a-r)sin^2\theta}{2r(a-r)}\right)\right]e_1=R^i_{313}e_i$$

$$\left[(-sin^2\theta)+\left(\frac{asin^2\theta-2(a-r)sin^2\theta}{2r}\right)\right]e_1=R^i_{313}e_i$$

$$\left[(-sin^2\theta)+\left(\frac{asin^2\theta-2asin^2\theta+2rsin^2\theta}{2r}\right)\right]e_1=R^i_{313}e_i$$

$$\left[(-sin^2\theta)+\left(\frac{-asin^2\theta+2rsin^2\theta}{2r}\right)\right]e_1=R^i_{313}e_i$$

$$\left[\left(\frac{-2rsin^2\theta}{2r}\right)+\left(\frac{-asin^2\theta+2rsin^2\theta}{2r}\right)\right]e_1=R^i_{313}e_i$$

$$\left[\left(\frac{-asin^2\theta+2rsin^2\theta-2rsin^2\theta}{2r}\right)\right]e_1=R^i_{313}e_i$$

$$\left(\frac{-asin^2\theta}{2r}\right)e_1=R^i_{313}e_i$$

O lo que es lo mismo:

$$R^i_{113}e_i=0e_0+\left(\frac{-asin^2\theta}{2r}\right)e_1+0e_2+0e_3$$

Por lo que:

$$R^0_{113}=0$$

$$R^1_{113}=\frac{-asin^2\theta}{2r}$$

$$R^2_{113}=0$$

$$R^3_{113}=0$$

Cálculo 24. $\boldsymbol{j = 3\ ;\ k = 2 \quad l = 3}$

$$[\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k] e_j = R^i_{jkl} e_i$$

$$[\partial_2 \partial_3 - \partial_3 \partial_2] e_3 = R^i_{323} e_i$$

Desplegamos el producto con la base:

$$\partial_2 \partial_3 e_3 - \partial_3 \partial_2 e_3 = R^i_{323} e_i$$

Volvemos a tratar por separado.

24.a. El término marcado en rojo: $\partial_2 \partial_3 e_3$

$$\partial_2 (\partial_3 e_3)$$

$$\partial_2 (\Gamma^0_{33} e_0 + \Gamma^1_{33} e_1 + \Gamma^2_{33} e_2 + \Gamma^3_{33} e_3)$$

Sobrevive:

$$\partial_2 (\Gamma^1_{33} e_1 + \Gamma^2_{33} e_2)$$

$$\partial_2 (\Gamma^1_{33} e_1) + \partial_2 (\Gamma^2_{33} e_2)$$

Desarrollamos las derivadas de los productos:

$$\partial_2 \Gamma^1_{33} e_1$$

$$(\partial_2 \Gamma^1_{33}) e_1 + \Gamma^1_{33} (\partial_2 e_1)$$

$$(\partial_2 \Gamma^1_{33}) e_1 + \Gamma^1_{33} (\Gamma^0_{21} e_0 + \Gamma^1_{21} e_1 + \Gamma^2_{21} e_2 + \Gamma^3_{21} e_3)$$

$$(\partial_2 \Gamma^1_{33}) e_1 + \Gamma^1_{33} \Gamma^2_{21} e_2$$

$$(\partial_\theta \Gamma^1_{33}) e_1 + \Gamma^1_{33} \Gamma^2_{21} e_2$$

$$(2(a - r)\, sin\, \theta\, cos\, \theta) e_1 + \left((a - r) sin^{\,2}\, \theta\right) \cdot \left(\frac{1}{r}\right) e_2$$

$$(2\,(a - r) sin\, \theta\, cos\, \theta) e_1 + \left(\frac{(a - r) sin^{\,2}\, \theta}{r}\right) e_2$$

$$\partial_2 (\Gamma^2_{33} e_2)$$

$$(\partial_2 \Gamma^2_{33}) e_2 + \Gamma^2_{33} (\partial_2 e_2)$$

$$(\partial_\theta \Gamma^2_{33}) e_2 + \Gamma^2_{33} (\Gamma^0_{22} e_0 + \Gamma^1_{22} e_1 + \Gamma^2_{22} e_2 + \Gamma^3_{22} e_3)$$

$$(\partial_\theta \Gamma^2_{33}) e_2 + \Gamma^2_{33} \Gamma^1_{22} e_1$$

$$(\partial_\theta (-\cos\theta \sin\theta)) e_2 + (-\cos\theta \sin\theta)(a - r) e_1$$

$$(-\partial_\theta (-\sin^2\theta + \cos^2\theta)) e_2 + (-\cos\theta \sin\theta)(a - r) e_1$$

$$(\sin^2\theta - \cos^2\theta) e_2 + (-\cos\theta \sin\theta)(a - r) e_1$$

Luego 24.a es:

$$(2\,(a-r)sin\,\theta\,cos\,\theta)e_1+\left(\frac{(a-r)sin^{\,2}\,\theta}{r}\right)e_2$$

$$+(sin^2\,\theta-cos^2\,\theta)e_2+(-cos\,\theta\,sin\,\theta)(a-r)e_1$$

$$(2\,(a-r)sin\,\theta\,cos\,\theta)e_1+(-cos\,\theta\,sin\,\theta)(a-r)e_1$$

$$+(sin^2\,\theta-cos^2\,\theta)e_2+\left(\frac{(a-r)sin^{\,2}\,\theta}{r}\right)e_2$$

$$[(a-r)\,sin\,\theta\,cos\,\theta]e_1+\left[(sin^2\,\theta-cos^2\,\theta)+\left(\frac{(a-r)sin^{\,2}\,\theta}{r}\right)\right]e_2$$

24.b. El término marcado en azul: $\partial_3\partial_2 e_3$

$$\partial_3(\partial_2 e_3)$$

$$\partial_3(\Gamma^0_{23}e_0+\Gamma^1_{23}e_1+\Gamma^2_{23}e_2+\Gamma^3_{23}e_3)$$

Sólo sobrevive:

$$\partial_3\Gamma^3_{23}e_3$$

Desarrollemos la derivada del producto:

$$(\partial_3\Gamma^3_{23})e_3+\Gamma^3_{23}(\partial_3 e_3)$$

$$\left(\partial_\varphi\Gamma^3_{23}\right)e_3+\Gamma^3_{23}(\Gamma^0_{33}e_0+\Gamma^1_{33}e_1+\Gamma^2_{33}e_2+\Gamma^3_{33}e_3)$$

Sobrevive:

$$(0)e_3+\Gamma^3_{23}(\Gamma^1_{33}e_1+\Gamma^2_{33}e_2)$$

$$\Gamma^3_{23}\Gamma^1_{33}e_1+\Gamma^3_{23}\Gamma^2_{33}e_2$$

$$[(cot\,\theta)(a-r)sin^{\,2}\,\theta]e_1+[(cot\,\theta)(-cos\,\theta\,sin\,\theta)]e_2$$

$$\left[\frac{(cos\,\theta)(a-r)sin^{\,2}\theta}{sin\,\theta}\right]e_1+\left[\left(-\frac{cos^{\,2}\theta\,sin\,\theta}{sin\,\theta}\right)\right]e_2$$

$$[(a-r)\,(sin\,\theta\,cos\,\theta)]e_1-cos^{\,2}\theta\,e_2$$

Agrupando 24.a y 24.b:

$$\left[[(a-r)\,sin\,\theta\,cos\,\theta]e_1+\left[(sin^2\,\theta-cos^2\,\theta)+\left(\frac{(a-r)sin^{\,2}\,\theta}{r}\right)\right]e_2-([(a-r)\,(sin\,\theta\,cos\,\theta)]e_1-cos^{\,2}\theta\,e_2)\right]=R^i_{323}e_i$$

$$\left[[(a-r)\sin\theta\cos\theta-(a-r)\sin\theta\cos\theta]e_1+\left[(\sin^2\theta-\cos^2\theta)+\left(\frac{(a-r)\sin^2\theta}{r}\right)+\cos^2\theta\right]e_2\right]=R^i_{323}e_i$$

$$\left[[0]e_1+\left[(\sin^2\theta)+\left(\frac{(a-r)\sin^2\theta}{r}\right)\right]e_2\right]=R^i_{323}e_i$$

$$\left[\sin^2\theta+\frac{(a-r)}{r}\sin^2\theta\right]e_2=R^i_{323}e_i$$

$$\left[\sin^2\theta\,(1+\frac{(a-r)}{r})\right]e_2=R^i_{323}e_i$$

$$\left[\sin^2\theta\,(1+\frac{a}{r}-\frac{r}{r})\right]e_2=R^i_{323}e_i$$

$$\left[\sin^2\theta\,(1+\frac{a}{r}-1)\right]e_2=R^i_{323}e_i$$

$$\left[\sin^2\theta\,(\frac{a}{r})\right]e_2=R^i_{323}e_i$$

$$\left(\frac{\sin^2\theta\,a}{r}\right)e_2=R^i_{323}e_i$$

O lo que es lo mismo:

$$R^i_{323}e_i=0e_0+0e_1+\left(\frac{\sin^2\theta\,a}{r}\right)e_2+0e_3$$

Por lo que:

$$R^0_{323}=0$$

$$R^1_{323}=0$$

$$R^2_{323}=\left(\frac{\sin^2\theta\,a}{r}\right)$$

$$R^3_{323}=0$$

Con lo que terminamos con las $j=3$

Con esto hemos terminado de hacer los cálculos de las $24 \times 4 = 96$ componentes que nos habíamos propuesto[348].

Tal y como dijimos hay otras 96 componentes que se obtienen cambiando el orden de los índices k y l y qu enos aportan la misma componente pero cambiada de signo, pues:

$$R^i_{jkl} = -R^i_{jlk}$$

También tenemos las 24 componentes en los que $k = l$ y que son $4 \times 4 \times 4 = 64$ componentes, es decir:

$k=0 \quad l=0$	$k=1 \quad l=0$	$k=2 \quad l=0$	$k=3 \quad l=0$
$k=0 \quad l=1$	$k=1 \quad l=1$	$k=2 \quad l=1$	$k=3 \quad l=1$
$k=0 \quad l=2$	$k=1 \quad l=2$	$k=2 \quad l=2$	$k=3 \quad l=2$
$k=0 \quad l=3$	$k=1 \quad l=3$	$k=2 \quad l=3$	$k=3 \quad l=3$

La 4 combinaciones marcadas en rojo multiplicada por los cuatro valores posibles de j y, no lo olvidemos, los 4 valores posibles de i.

Por lo tanto, ya hemos terminado de calcular todas las componentes de este pequeño monstruo:

$$96 + 96 + 64 = 256$$

Que corresponden, efectivamente a las componentes del tensor de Riemann para 4 dimensiones:

$$4^4 = 256$$

Adjuntamos una tabla con las componentes con valores diferentes a cero, que son, efectivamente, minoría.

[348] 24 cálculos por 4 componentes que surgen de cada cálculo: $¿?\,e_0 + ¿?\,e_1 + ¿?\,e_2 + ¿?\,e_3$

Cálculo 7	Cálculo 14	Cálculo 21
$R^0_{101} = \frac{a}{r^2(r-a)}$ $R^0_{110} = \frac{-a}{r^2(r-a)}$	$R^0_{202} = \frac{-a}{2r}$ $R^0_{220} = \frac{a}{2r}$	$R^0_{303} = \frac{-asin^2\theta}{2r}$ $R^0_{330} = \frac{asin^2\theta}{2r}$
Cálculo 1	**Cálculo 23**	**Cálculo 16**
$R^1_{001} = \frac{a(r-a)}{r^4}$ $R^1_{010} = \frac{-a(r-a)}{r^4}$	$R^1_{113} = \frac{-asin^2\theta}{2r}$ $R^1_{131} = \frac{asin^2\theta}{2r}$	$R^1_{212} = \frac{-a}{2r}$ $R^1_{221} = \frac{a}{2r}$
Cálculo 2	**Cálculo 10**	**Cálculo 24**
$R^2_{002} = \frac{a(a-r)}{2r^4}$ $R^2_{020} = \frac{-a(a-r)}{2r^4}$	$R^2_{112} = \frac{a}{2r^2(a-r)}$ $R^2_{121} = \frac{-a}{2r^2(a-r)}$	$R^2_{323} = \frac{sin^2\theta\, a}{r}$ $R^2_{332} = \frac{-sin^2\theta\, a}{r}$
Cálculo 3	**Cálculo 11**	**Cálculo 18**
$R^3_{003} = \frac{a(a-r)}{2r^4}$ $R^3_{030} = \frac{-a(a-r)}{2r^4}$	$R^3_{113} = \frac{-a}{2r^2(a-r)}$ $R^3_{131} = \frac{a}{2r^2(a-r)}$	$R^3_{223} = \frac{-a}{r}$ $R^3_{232} = \frac{a}{r}$

Para terminar vamos a calcular las componentes que no son nulas pero con todos los índices abajo. Para ello recordemos que:

$$R_{ijkl} = g_{ih} h R^{ih}_{jkl}$$

Aplicamos.

R_{0101}	$g_{00} \cdot R^0_{101}$	$\frac{a-r}{r} \cdot \frac{a}{r^2(r-a)}$	$\frac{-a}{r^3}$	$= -R_{0110}$
R_{0202}	$g_{00} \cdot R^0_{202}$	$\frac{a-r}{r} \cdot \frac{-a}{2r}$	$\frac{a(r-a)}{2r^2}$	$= -R_{0220}$
R_{0303}	$g_{00} \cdot R^0_{303}$	$\frac{a-r}{r} \cdot \frac{-a sin^2\theta}{2r}$	$\frac{a(r-a) sin^2\theta}{2r^2}$	$= -R_{0330}$
R_{1001}	$g_{11} \cdot R^1_{001}$	$\frac{r}{r-a} \cdot \frac{a(r-a)}{r^4}$	$\frac{a}{r^3}$	$= -R_{1010}$
R_{1113}	$g_{11} \cdot R^1_{113}$	$\frac{r}{r-a} \cdot \frac{-a sin^2\theta}{2r}$	$\frac{a\, sin^2\theta}{2(a-r)}$	$= -R_{1131}$
R_{1212}	$g_{11} \cdot R^1_{212}$	$\frac{r}{r-a} \cdot \frac{-a}{2r}$	$\frac{a}{2(a-r)}$	$= -R_{1221}$
R_{2002}	$g_{22} \cdot R^2_{002}$	$r^2 \cdot \frac{a(a-r)}{2r^4}$	$\frac{a(a-r)}{2r^2}$	$= -R_{2020}$
R_{2112}	$g_{22} \cdot R^2_{112}$	$r^2 \cdot \frac{a}{2r^2(a-r)}$	$\frac{a}{2(a-r)}$	$= -R_{2121}$
R_{2323}	$g_{22} \cdot R^2_{323}$	$r^2 \cdot \frac{sin^2\theta\, a}{r}$	$r\, sin^2\theta\, a$	$= -R_{2332}$
R_{3003}	$g_{33} \cdot R^3_{003}$	$r^2 sin^2\theta \cdot \frac{a(a-r)}{2r^4}$	$\frac{a(a-r) sin^2\theta}{2r^2}$	$= -R_{3030}$
R_{3113}	$g_{33} \cdot R^3_{113}$	$r^2 sin^2\theta \cdot \frac{-a}{2r^2(a-r)}$	$\frac{-a\, sin^2\theta}{2(a-r)}$	$= -R_{3131}$
R_{3223}	$g_{33} \cdot R^3_{223}$	$r^2 sin^2\theta \cdot \frac{-a}{r}$	$-a\, r\, sin^2\theta$	$= -R_{3232}$

Donde, para todos los cálculos hechos en las últimas 50 páginas:

$$a = \frac{2GM}{c^2}$$

-2.11-

El espaciotiempo de Schwarzschild y su interpretación realista

$\mathfrak{S}$

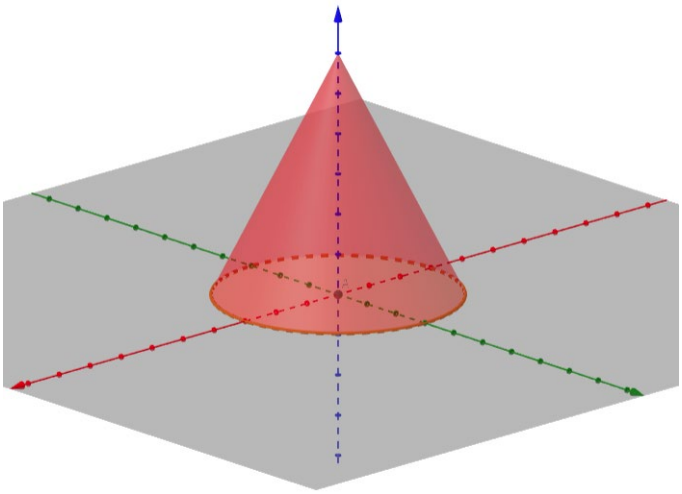
2.11.1. Métricas inducidas.

Introducimos este epígrafe porque nos va a ser necesario para elaborar la hipótesis que emitiremos en el siguiente epígrafe, a saber: ¿puede ser la métrica de Schwarzschild una métrica inducida por una métrica ambiente de Minkowski sobre una superficie determinada? En breve lo veremos.

Por ahora, sencillamente, supongamos un espacio euclídeo de 3 dimensiones en el que desplegamos una variedad curva (o plana) cualquiera. Y ahora tratemos de proyectar, imbuir, la métrica euclídea del entorno en la superficie de la variedad.

Para ello imaginemos un cono, inserto en un espacio tridimensional euclídeo $\mathbb{R}^3$, con sus ejes x, y, z, con métrica igual a la identidad ($g = I$) y, por lo tanto, con elemento de línea puramente pitagórico:

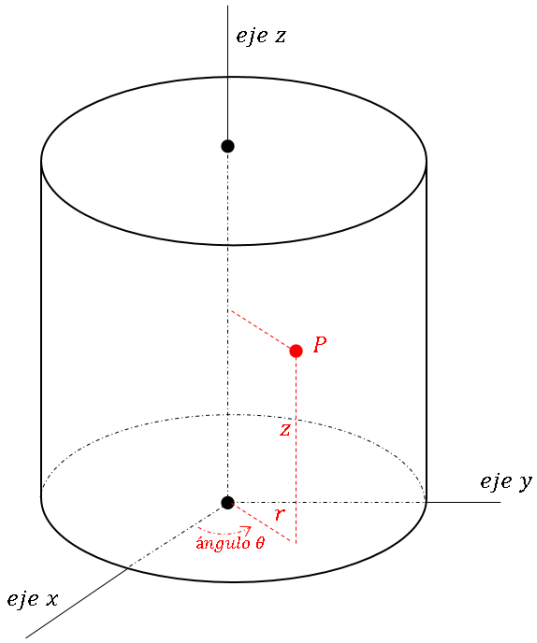
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$



Lo que vamos a hacer es construir la métrica que "perciben" unos supuestos habitantes de la superficie lateral del cono. Para ello, lo primero que vamos a hacer es acomodar nuestra métrica euclídea del entorno a unas coordenadas que sean más cómodas para trabajar con

superficies cónicas. Vamos a traducir nuestra métrica euclídea de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas.

Para ello recordemos el modelo de coordenadas cilíndricas.



Donde, para definir un punto P en este sistema de coordenadas, tán sólo necesitamos tres parámetros:

- Un radio r de alejamiento del eje z.
- Una altura z.
- Un ángulo θ que recorre el radio r respecto del eje x.

Comparando el sistema cartesiano y el cilíndrico es obvio que:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$z = z$$

Convirtamos, entonces, el elemento de línea que teníamos para Euclides a la nomenclatura de las coordenadas cilíndricas:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Para ello redefinamos lo diferenciales. Recordemos que un escalar (en este caso un diferencial), podemos expresarlo como (recordemos el operador Nabla):

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial x}{\partial z}dz$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial y}{\partial z}dz$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial z}{\partial z}dz$$ [349]

Procedamos a sustituir:

$$dx = \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r}dr + \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial z}dz$$

$$dx = \cos\theta\, dr + (-r\sin\theta)d\theta + 0dz$$

$$dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta$$

$$dy = \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r}dr + \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial z}dz$$

$$dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta + 0\, dz$$

$$dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$$

Ahora el elemento de línea nos quedará como:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$ds^2 = (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta)^2 + (\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta)^2 + dz^2$$

Desarrollemos:

$$ds^2 = [(\cos\theta\, dr)^2 + (r\sin\theta\, d\theta)^2 - 2\, r\cos\theta\sin\theta\, dr\, d\theta]$$
$$+[(\sin\theta\, dr)^2 + (r\cos\theta\, d\theta)^2 + 2\, r\sin\theta\cos\theta\, dr\, d\theta]$$
$$+dz^2$$

$$ds^2 = [(\cos\theta\, dr)^2 + (r\sin\theta\, d\theta)^2] + [(\sin\theta\, dr)^2 + (r\cos\theta\, d\theta)^2] + dz^2$$

$$ds^2 = [(\cos\theta\, dr)^2 + (\sin\theta\, dr)^2] + [(r\sin\theta\, d\theta)^2 + (r\cos\theta\, d\theta)^2] + dz^2$$

$$ds^2 = [\cos^2\theta + \sin^2\theta(dr)^2] + [\cos^2\theta + \sin^2\theta(r\, d\theta)^2] + dz^2$$

$$ds^2 = [(1)(dr)^2] + [(1)(r\, d\theta)^2] + dz^2$$

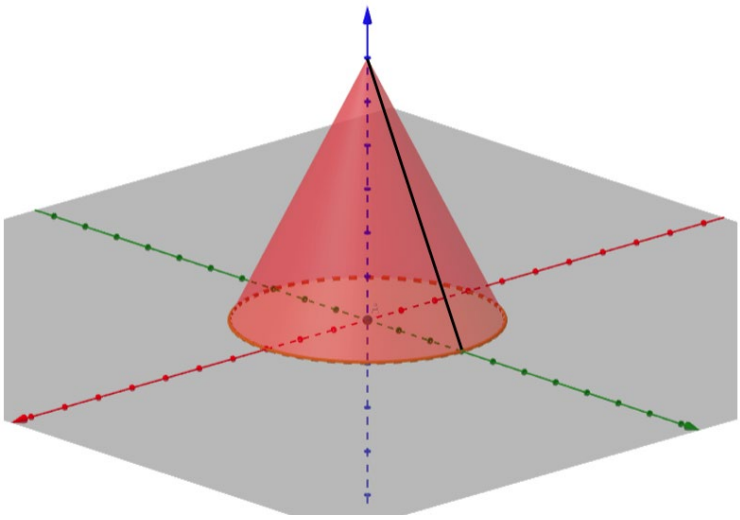
$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

Que es la métrica del espacio euclídeo pero expresado en coordenadas esféricas.

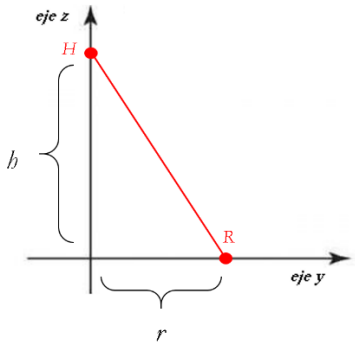
[349] Esta parte la vamos a dejar para más adelante. Ya veremos por qué.

Ahora vamos a trabajar sobre el eje z, más concretamente sobre el diferencial dz^2, que aún no hemos abordado. En cierto modo lo que vamos a hacer es definirlo en función del cono. Algo así como 'deformarlo', hacerlo coincidir con una línea de la superficie del cono para, de esa manera, transformar la métrica de entorno en una métrica imbuida en la superficie del cono mediante la transformación, 'el contagio cónico', al eje z.

Empecemos ahora, de verdad, a inducir la métrica entorno en la superficie del cono. Para ello imaginemos que trazamos una recta como la siguiente:



Si la estudiamos poniéndola de perfil, apuntando el eje x hacia nosotros, veríamos que el esquema resultante sería el siguiente:



Calculemos la ecuación que define a la recta que hemos marcado en rojo y que pasa por los puntos H y R. Sabemos que debe tener una forma del tipo:

$$z = my + n$$

La recta debe pasar por el punto $(y, z) \rightarrow (0, H)$ y el $(R, 0)$. Así, para el punto $(0, H)$:

$$H = m(0) + n$$

$$n = H$$

… puesto que es una altura, aunque sea por estética (manías), pongámoslo en minúsculas:

$$n = h$$

Por otro lado, puesto que ya tenemos el valor de n, sustituyamos ahora en el punto $(R, 0)$:

$$0 = mR + h$$

De donde despejamos m:

$$m = -\frac{h}{R}$$

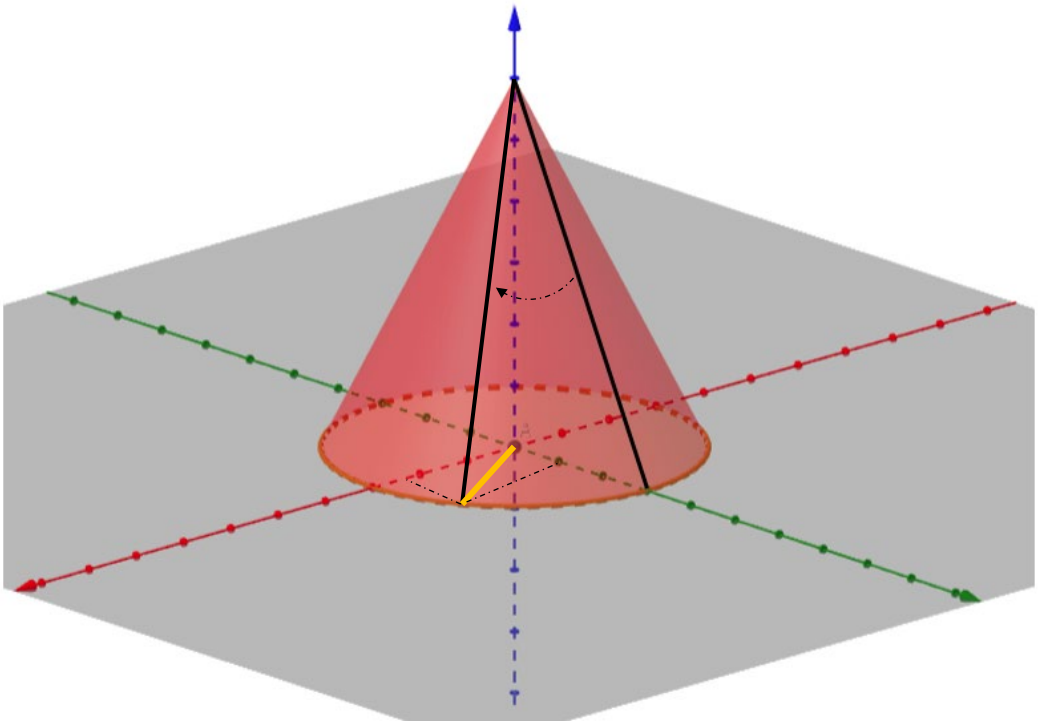
Luego la ecuación que define a nuestra recta (perfil de cono) es:

$$z = \left(-\frac{h}{R}\right) y + h$$

$$z = h - \frac{h}{R} y$$

Digamos que tenemos la naturaleza del nuevo eje z: un eje z que, de hecho, en el caso de estar nosotros inmersos en la superficie del cono percibiríamos más bien como una *distribución* superficial, una cierta naturaleza superficial, y no como una elevación sobre la superficie. Una cosa rara, vamos, pero perfectamente entendible.

Ahora, si hiciéramos rotar esa recta, generaríamos una superficie, barreríamos un área:



El radio definido que antes era justamente la distancia r desde $(0,0)$ hasta R en el eje y y que ahora hemos girado y marcado en naranja podremos definirla, por mera aplicación del Teorema de Pitágoras, como:

$$y = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Así, la ecuación que define ese movimiento y esa generación de área, superficie, sería:

$$z = h - \frac{h}{R} y$$

$$z = h - \frac{h}{R}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

Definida, efectivamente, según las coordenadas cartesianas. Antes de proceder a imbuir esta información en el dz^2 que aún tenemos pendiente, expresémosla, también, en coordenadas cilíndricas. Para ello recordemos que hemos dicho que:

$$x = r\,cos\,\theta$$

$$y = r\,sin\,\theta$$

Luego:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(r\,cos\,\theta)^2 + (r\,sin\,\theta)^2} = \sqrt{r^2 \cdot (1)} = \sqrt{r^2 \cdot (1)} = r$$

Es decir, que la ecuación del eje generatriz del área lateral del cono en coordenadas cilíndricas se expresa como:

$$z = h - \frac{h}{R}(r)$$

Procedamos, entonces, a incluir la información que ya tenemos acerca del modo en que se calcularía el área en la superficie de un cono mediante la rotación de una recta en la métrica euclídea de coordenadas cilíndricas. Mezclemos los dos mundos: imbuyamos la información de la naturaleza de la recta generatriz en la métrica del entorno euclídeo que ya teníamos y obtengamos la métrica inducida en la superficie del cono.

Para ello, tal y como hicimos antes para el resto de dimensiones, veamos cómo se manifiesta el cambio de la recta en las bases del sistema cilíndrico aplicando el operador Nabla a la ecuación de la recta generatriz z:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial z}{\partial z} dz$$

$$dz = \frac{\partial \left(h - \frac{h}{R} r\right)}{\partial r} dr + \frac{\partial \left(h - \frac{h}{R} r\right)}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \left(h - \frac{h}{R} r\right)}{\partial z} dz$$

$$dz = -\frac{h}{R} dr + 0\; d\theta + 0\; dz$$

Y ahora sustituyamos en nuestra métrica euclídea de entorno:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

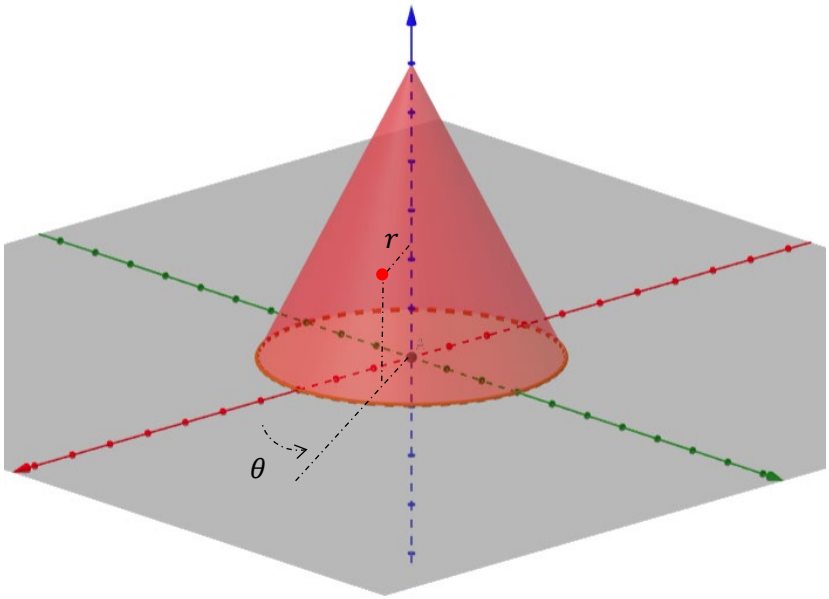
$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + \left(-\frac{h}{R} dr\right)^2$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + \frac{h^2}{R^2} dr^2$$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right) dr^2 + r^2 d\theta^2$$

Que, finalmente, es nuestra métrica inducida, pues hemos alcanzado el elemento de línea que emplearían los "habitantes del cono" (véase que ellos viven bidimensionalmente y, ciertamente, ha desaparecido una de las dimensiones).

Ellos definirían la posición de un punto mediante esos dos parámetros r y θ:



Es cierto que aquí nosotros les estamos obligando a ellos a usar medidas que dependen de una tercera dimensión pero, viviendo dentro, ellos hubieran desarrollado la magnitud r en relación al círculo máximo posible a una distancia fija del norte absoluto (de la cúspide del cono) y θ al grado de recorrido de ese círculo máximo.

Como decimos, la ***métrica inducida*** sería (usamos C de 'conilandia' aunque se suele expresar con 'h' pero para evitar confusiones con nuestra 'h' de altura, dejémoslo en este caso como C):

$$C = \begin{pmatrix} c_{rr} & c_{r\theta} \\ c_{\theta r} & c_{rr} \end{pmatrix}$$

Puesto que partimos de la premisa de que no hay elementos cruzados, es decir, que la métrica es ortogonal (de hecho, en nuestra métrica no hay elementos cruzados):

$$C = \begin{pmatrix} 1 + \frac{h^2}{R^2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

(esta información vendría muy bien al principio) Ahora, recordemos un por un momento qué es el determinante de una matriz. No cómo se calcula, que es trivialmente simple, sino ¿qué es el determinante de una matriz y para qué sirve? Recordemos que cuando multiplicamos algo por una matriz lo que estamos haciendo es someter ese algo a una transformación. Por ejemplo: imaginemos que tenemos un espacio bidimensional A en el que hemos dibujado y coloreado un área cualquiera. Si cambiamos, estiramos/contraemos, el espacio A para transformarlo en un espacio B, ¿se conservan las proporciones del área dibujada en A? ¿Crece el área, decrece o se queda como estaba? Veámoslo con un ejemplo. Imaginemos que tenemos un espacio cartesiano normal y corriente y le aplicamos una transformación, lo multiplicamos por una matriz como:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Lo que estamos haciendo es "estirar" la unidad horizontal del espacio cartesiano original desde 1 hasta 3 y estirar la unidad vertical del espacio cartesiano desde 1 hasta 2:

$$\begin{pmatrix} Plano \\ cartesiano \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Transform. \\ lineal \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1 \cdot 3) + (0 \cdot 0) & (0 \cdot 3) + (1 \cdot 0) \\ (1 \cdot 0) + (0 \cdot 2) & (0 \cdot 0) + (1 \cdot 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como resulta que el espacio cartesiano normal y corriente es la unidad, efectivamente, lo hemos transformado en algo más 'cuadrangular'. Es decir, hemos estirado el espacio unidad para transformarlo en un espacio más 'cuadrangular'. Antes, en el espacio cartesiano original un cuadrado de 1 unidad horizontal por 1 unidad vertical tenía un área de 1 unidad cuadrada. Ahora, en el nuevo espacio, aunque desde dentro, pues 'sus habitantes serán habitantes nacidos con una deformación cuadrangular' a los que todo lo cuadrangular les parezca normal y crean medir todo como 1x1, realmente, nosotros que sabemos lo que ha pasado, que miramos omniscientemente desde fuera, sabemos que un área de un cuadro de ellos, en realidad, vale por 6 de los nuestros: un 1 horizontal de ellos son 3 nuestros y un 1 vertical de ellos son 2 nuestros, por lo que el área que antes para nosotros era 1 unidad cuadrada, ahora, en su mundo (aunque ellos midan 1 unidad cuadrada de sus unidades) nosotros veremos que en realidad se ha estirado y vale por 6 de los nuestros. Justamente eso mide el determinante, pues:

$$det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (3 \cdot 2) - (0 \cdot 0) = 6$$

Que es la transformación a la que realmente se somete. El tamaño del nuevo área (ya que partíamos del mundo canónico cartesiano, la unidad: $1 \cdot 6$). Se ha escalado el área original 6 veces. El determinante nos está hablando de la transformación que se realiza y, en el caso de una matriz de 2x2 lo que nos está expresando es la naturaleza del área resultante en comparación con un espacio bidimensional euclídeo que es la unidad.

Así, mediante el cálculo del determinante de la métrica del cono que ya tenemos, lo que estaríamos viendo es la transformación que sufriría un área euclídea (la unidad) al imponerla, ***inducirla***, sobre la superficie del cono.

Calculemos el determinante de esta métrica de superficie del cono:

$$det\ C = (c_{rr} \cdot c_{\theta\theta}) - (c_{r\theta} \cdot c_{\theta r})$$

$$det\ C = \left(\left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right) \cdot r^2\right) - (0 \cdot 0)$$

$$det\ C = r^2\left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right)$$

Es decir, un área de 1 nos la transforma en un área de: $r^2\left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right)$

Puesto que para generar el área lateral total de nuestro cono lo que vamos a hacer es rotar una línea generatriz (no podríamos rotar un área, no nos serviría para nada, necesitamos la línea), lo que hacemos es, efectivamente, reducir el área bidimensional a línea unidimensional, es decir: calcular la raíz cuadrada del determinante. Así:

$$\sqrt{det\ C} = \sqrt{r^2\left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right)}$$

$$\sqrt{det\ C} = r\sqrt{\left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right)}$$

Y ahora, para calcular un área en el cono bastaría con que los 'conilanderos' procedieran a hacer girar esta línea generatriz. Para ello bastaría con realizar una integral doble (pues estamos calculando un área, por supuesto, en base a dos dimensiones r y θ) como:

$$\iint_{desde\ donde\ sea}^{hasta\ donde\ sea} \sqrt{det\ C}$$

$$\int_a^b \int_{a'}^{b'} r\sqrt{\left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right)}\, dx^i$$

Donde x^i son las coordenadas existentes en el mundo superficial del cono: r y θ.

Cuando inducimos una métrica ambiental en una superficie de menos dimensiones lo que se hace es algo así como proyectar la naturaleza de la métrica externa a la superficie de menos dimensiones. Por ello, siempre habrá una dimensión menos en la métrica resultante inducida. En este caso: como la métrica del espacio ambiental externo que 'proyectamos' tenía 3 dimensiones (el euclídeo, unidad, de 3 dimensiones), el supraíndice i tendrá un valor, en este caso de $3 - 1 = 2$ y cada coordenada corresponderá a las dos coordenadas 'internas' que hemos definido: r y θ. Es decir:

$$\int_a^b \int_{a'}^{b'} r\sqrt{\left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right)}\, d^i x^j$$

$$\int_a^b \int_{a'}^{b'} r \sqrt{\left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right)} \, dr \, d\theta$$

Donde los rangos de integración posibles para toda la cara lateral del cono son:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R r \sqrt{\left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right)} \, dr \, d\theta$$

Esto es una integral muy fácil.

Hagamos primero la externa. Como no hay nada en función de θ la primera integral queda como:

$$\int_0^{2\pi} d\theta = [\theta]_0^{2\pi} = [2\pi - 0] = 2\pi$$

En la siguiente, como la expresión sometida a la raíz no tiene nada en función de r o de θ y, por lo tanto, se commporta como una constante, puede salir de la segunda integral (la que es interna) y tenemos, entonces que:

$$= 2\pi \sqrt{\left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right)} \int_0^R r \, dr$$

Que obviamente es trivialmente simple:

$$= 2\pi \sqrt{\left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right)} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R$$

$$= 2\pi \sqrt{\left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right)} \left[\frac{R^2}{2} - \frac{0}{2}\right]$$

$$= 2\pi \sqrt{\left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right)} \frac{R^2}{2}$$

$$= \pi R^2 \sqrt{\left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right)}$$

Metemos una de las R^2 en la raíz:

$$= \pi R R \sqrt{\left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right)}$$

$$= \pi R \sqrt{R^2 \left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right)}$$

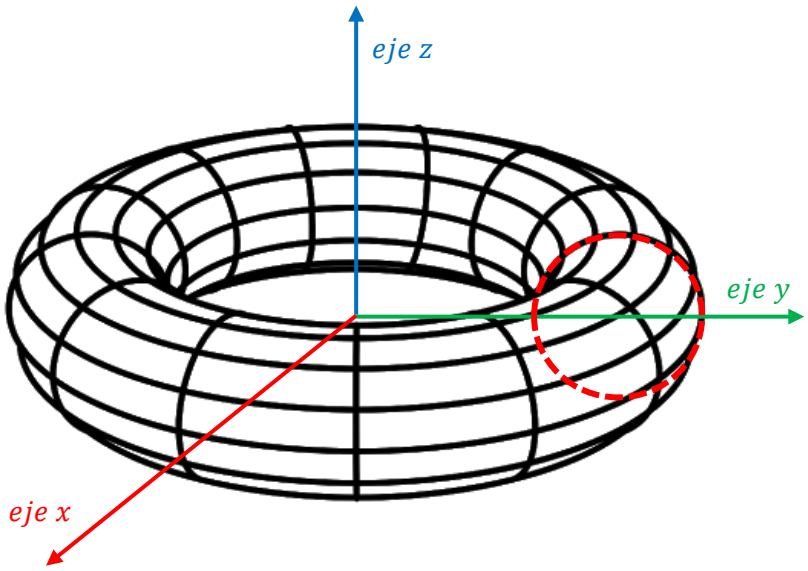
$$= \pi R \sqrt{\left(R^2 + \frac{R^2 h^2}{R^2}\right)}$$

$$= \pi R \sqrt{R^2 + h^2}$$

Es bello ver que, efectivamente, $\sqrt{R^2 + h^2}$ es, precisamente, la longitud del perfil del cono (la hipotenusa) que al multiplicar por πR nos da el área lateral completa del cono:

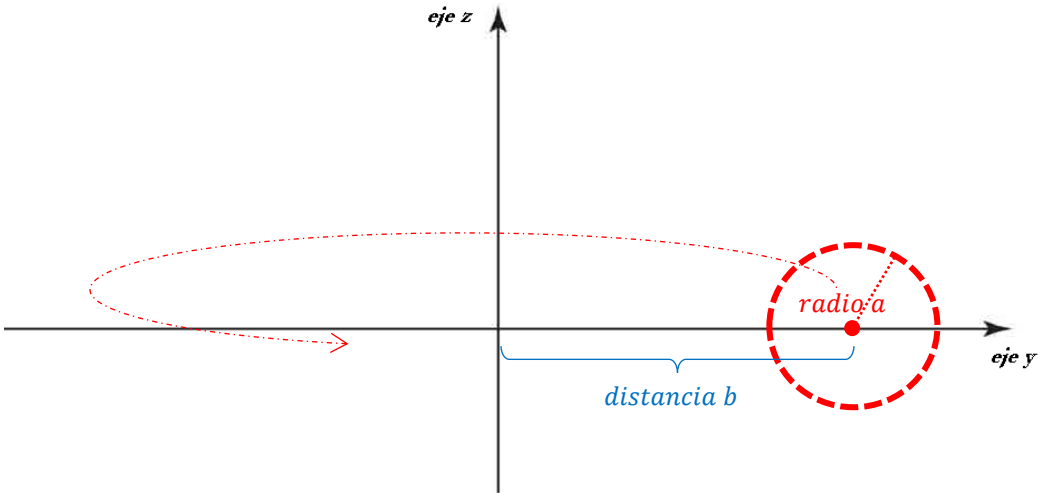
$$\pi \cdot R \cdot \textit{línea generatriz}$$

Hagamos lo mismo para la superficie de un toro. Induzcamos la métrica euclídea de entorno en la superficie de un toroide.



Es obvio que una superficie como ésta se genera haciendo girar la circunferencia generatriz que hemos marcado en rojo a una distancia determinada en torno al eje z.

Simplifiquemos el escenario y pongamos, de nuevo, el eje x mirando hacia nosotros:



Sabemos que la ecuación que define a una circunferencia esta:

$$z^2 + y^2 = a^2$$

Es obvio también que en este caso, las componentes son:

$$y = a\cos\alpha$$

$$z = a\sin\alpha$$

Y puesto que la circunferencia está desplazada una distancia b del origen de coordenadas, las ecuaciones que definen nuestra circunferencia son:

$$y = b + a\cos\alpha$$

$$z = a\sin\alpha$$

Cuando empecemos a rotar en torno al eje z la definición del radio a, proyectado sobre el plano x, y se definirá (como sucedió con el cono) como la hipotenusa de unas componentes x e y, es decir que a lo que hemos llamado y en las ecuaciones que definen la circunferencia, para que pueda rotar será:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = b + a\cos\alpha \rightarrow r = b + a\cos\alpha$$

$$z = a\sin\alpha$$

Puesto que de nuestras operaciones con el cono ya conocemos la métrica euclídea en coordenadas cilíndricas:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

Procedamos a combinar la información que tenemos del toro con la métrica del entorno y así imbuimos aquella de ésta. Para ello procedamos a calcular los diferenciales con Nabla (ojo, estudiamos su cambio en el entorno de la circunferencia generatriz r y α):

$$r = b + a\cos\alpha$$

$$dr = \frac{\partial r}{\partial r}dr + \frac{\partial r}{\partial \alpha}d\alpha$$

$$dr = \frac{\partial(b + a\cos\alpha)}{\partial r}dr + \frac{\partial(b + a\cos\alpha)}{\partial \alpha}d\alpha$$

$$dr = 0\ dr + (-a\sin\alpha)d\alpha$$

$$dr = -a\sin\alpha\ \ d\alpha$$

$$z = a\sin\alpha$$

$$dz = \frac{\partial(a\sin\alpha)}{\partial r}dr + \frac{\partial(a\sin\alpha)}{\partial \alpha}d\alpha$$

$$dz = 0dr + a\cos\alpha\, d\alpha$$

$$dz = a\cos\alpha\, d\alpha$$

Para poder despejar en nuestro elemento de línea elevemos ambos diferenciales al cuadrado:

$$dr^2 = (-a\sin\alpha\ \ d\alpha)^2$$

$$dz^2 = (a\cos\alpha\, d\alpha)^2$$

Ahora sustituimos en la métrica euclídea de entorno, es decir, justamente, procedemos a inducirla en la superficie del toro:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

$$ds^2 = (-a\sin\alpha\ \ d\alpha)^2 + r^2 d\theta^2 + (a\cos\alpha\, d\alpha)^2$$

$$ds^2 = a^2 d\alpha^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + r^2 d\theta^2$$

$$ds^2 = a^2 d\alpha^2 + r^2 d\theta^2$$

Ahora calculemos el área del toro.

Recordemos, calculemos el determinante de la métrica inducida en el toro:

$$det\, h = a^2 r^2$$

Ahora su raíz para obtener una curva (lineal y no área):

$$\sqrt{det\, h} = \sqrt{a^2 r^2} = a\, r$$

'a' era el radio de la circunferencia generatriz y recordemos que hemos definido r como:

$$r = b + a\cos\alpha$$

Es decir que la curva generatriz será:

$$a\,r$$

$$a(b + a\cos\alpha)$$

Ahora bastará con integrar dos veces en base a las dos variables: el giro α de generación de la propia circunferencia generatriz y el giro θ de giro de la circunferencia generatriz en torno al eje z.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a(b + a\cos\alpha)\,d\alpha\,d\theta$$

La integral externa, como la función no tiene nada en función de θ, es totalmente trivial:

$$2\pi\int_0^{2\pi} a(b + a\cos\alpha)\,d\alpha$$

$$2\pi a\int_0^{2\pi} (b + a\cos\alpha)\,d\alpha$$

$$2\pi a\ \ [b\alpha + a\sin\alpha]_0^{2\pi}$$

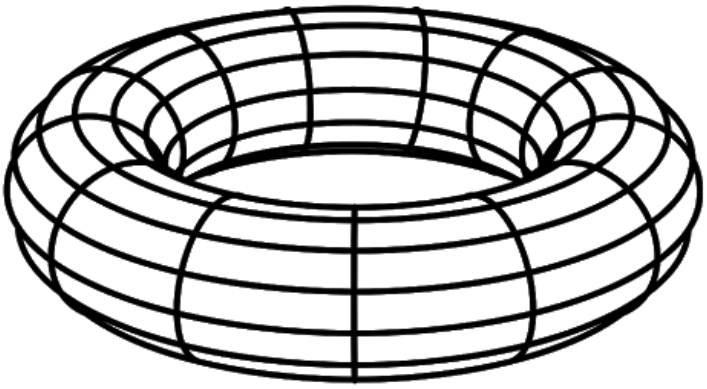
$$2\pi a\ \ [b2\pi + 0]$$

Luego el área del toro es:

$$4\pi^2 ab$$

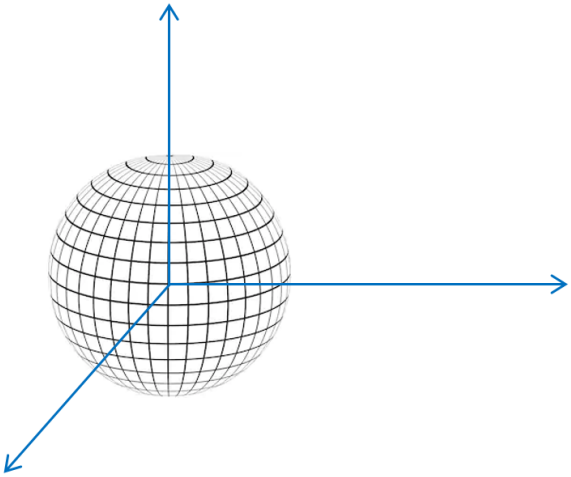
Donde:

- a= radio de la circunferencia generatriz
- b=radio del giro de la circunferencia generatriz en torno al eje z



2.11.2. Aplicación de Schwarzschild a la realidad.

Imaginemos un cuerpo celeste, por ejemplo, un planeta que centramos en un sistema de tres ejes (no decimos de momento si son temporales, espaciales, etc.. sencillamente tres ejes).



Simplifiquemos nuestro escenario. Para ello aislemos dicho planeta e imaginemos que no tiene interacción gravitatoria con ningún otro cuerpo celeste, además, dejémoslo estático, es decir, sin rotación (cosa altamente improbable de encontrar en astrofísica). Así, dicho planeta estará definido, exclusivamente por:

- No tener momento angular: $L = 0$.
- Su masa M.
- Su radio R que es un radio mayor que el Radio de Schwarzschild que está definido por:

$$\frac{2GM}{c^2}$$

Es decir que:

$$R > \frac{2GM}{c^2}$$

Pues si no fuera así, la masa colapsaría en un agujero negro. Esto se puede ver fácilmente analizando algebraicamente la métrica de Schwarzschild pue si el radio es igual o menor que esa magnitud crítica veremos que el espaciotiempo tendría unas propiedades muy pero que muy extrañas… pero, dejemos este asunto así por el momento.

Por motivos parecidos, todos los cálculos y escenarios que vamos a plantear son sólo válidos para el espacio que se encuentra más allá del límite de la superficie de la esfera, es decir, no sirven para el interior del cuerpo celeste.

Sabemos que el espaciotiempo de Schwarzschild tiene simetría esférica. Ello implica que vamos a poder rotar el sistema completo a nuestro antojo para simplificar aún más el escenario que queremos estudiar.

Puesto que vamos a analizar el comportamiento del espaciotiempo (deformado por la presencia de un cuerpo masivo) en torno a nuestro planeta vamos a suponer que tenemos un cuerpo cualquiera orbitando en torno a nuestro planeta y que giramos todo el sistema de referencia, gracias a la simetría esférica, de manera que la órbita que realiza el cuerpo orbitante en torno al planeta queda contenida en un mismo plano[350] y que dicho plano, por convención y conveniencia nuestra, está definido, en coordenadas esféricas, imponiendo que $\theta = \frac{\pi}{2}$. Así, la métrica de Schwarzschild:

$$a = \frac{2GM}{c^2}$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta d\varphi^2$$

… quedaría como:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + r^2sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)d\varphi^2$$

Donde:

---

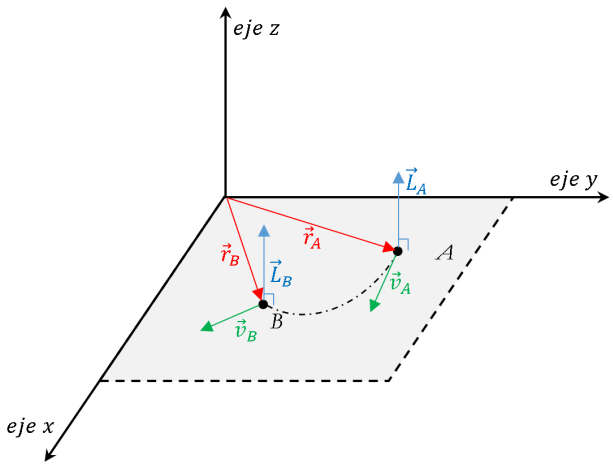
[350] El hecho de que la órbita quede contenida en un mismo plano es obvio y necesario si la traslación del cuerpo orbitante mantiene un momento angular constante. Si no fuera así el cuerpo que orbita en torno a nuestro planeta de referencia no estaría en un plano sino contenido en una variedad curva extraña… Veamos esto con más detalle.
Sabemos que, en la física clásica, el momento angular está definido como el producto vectorial de la posición por la cantidad de movimiento:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Es decir:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Como sabemos, el producto vectorial de dos vectores arroja como resultado otro vector que es perpendicular al plano en que están contenidos los vectores, en este caso, $\vec{r} \times \vec{v}$ (la constante escalar la podemos sacar perfectamente). Imaginemos una partícula que se desplaza desde un punto A a un punto B:



Si imponemos, como es el caso de nuestro esquema gráfico, que el momento angular $\vec{L}$ sea constante y, por ello, apunte siempre al mismo sitio, es necesario, obviamente, que los vectores posición y velocidad de la partícula en los diferente puntos sean coplanares. Si sacáramos alguno de estos vectores $\vec{r}$ o $\vec{v}$ del plano (x, y), la orientació del vector producto escalar cambiaria su orientación. Por ello, la constancia del momento angular implica que la órbita de un objeto se produce contenida en un plano.

- $d\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 0$ ya que, naturalmente, $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ es constante, no cambia y, por lo tanto, su diferencial es igual a cero. No es ni pequeño, es cero: no cambia.
- $sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

De manera que podemos trabajar, para estudiar el espaciotiempo por el que discurre la órbita de un cuerpo en torno a nuestro planeta, con nuestro favorable y acondicionado escenario: una métrica de Schwarzschild muy simplificada:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\varphi^2$$

Recordemos que sabemos que la métrica de Schwarzschild es diagonal (en el mismo elemento de línea vemos que no hay productos cruzados de bases). En dicho sentido, esta simplificación también lo es, es decir:

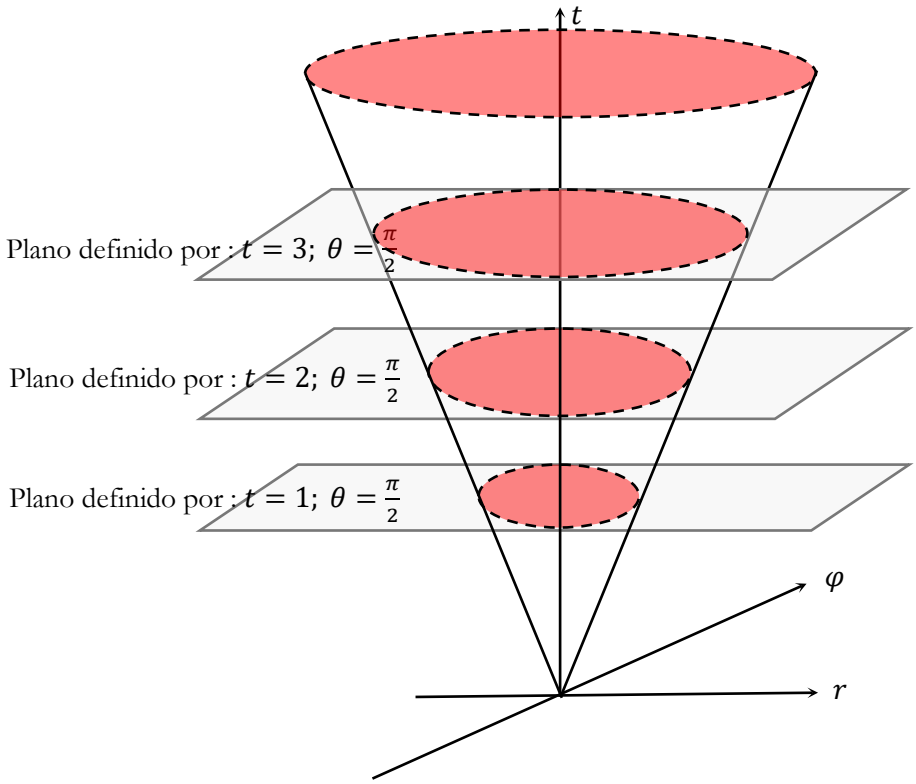
$$g = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{a}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Y esto implica una propiedad muy interesante: que las dimensiones no se 'entremezclan' entre sí, es decir, son totalmente independientes. De hecho, son linealmente independientes. Algo así como que podemos 'congelar' una (dejar, por ejemplo, el tiempo fijo) y observar cómo se desarrollarían las otras dos dimensiones.

Efectivamente, en nuestro caso, vemos que el tiempo es independiente de las otras dos dimensiones (y, de hecho, también dichas dimensiones espaciales entre sí):

$$g = \left(\begin{array}{c|cc} -\left(1 - \frac{a}{r}\right) & 0 & 0 \\ \hline 0 & \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{array}\right)$$

Esto nos va a permitir centrar nuestra atención en la parte espacial (marcada en color azul) sin miedo a que trabajar en ella pueda estar haciendo que nos perdamos algún posible cambio en el tiempo ya que éste no se verá afectado por lo que hagamos en la parte espacial. En definitiva, podremos congelar el tiempo y analizar el comportamiento de las configuraciones espaciales. Es decir, podremos hacer algo similar a esto: imaginar un cono de luz, un cono de posibilidades espaciales:



En esos planos, para medir una distancia entre dos puntos, la métrica simplificada que tendríamos que usar se limitaría a la parte espacial de nuestra ya simplificada métrica de Schwarzschild, es decir:

$$g = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

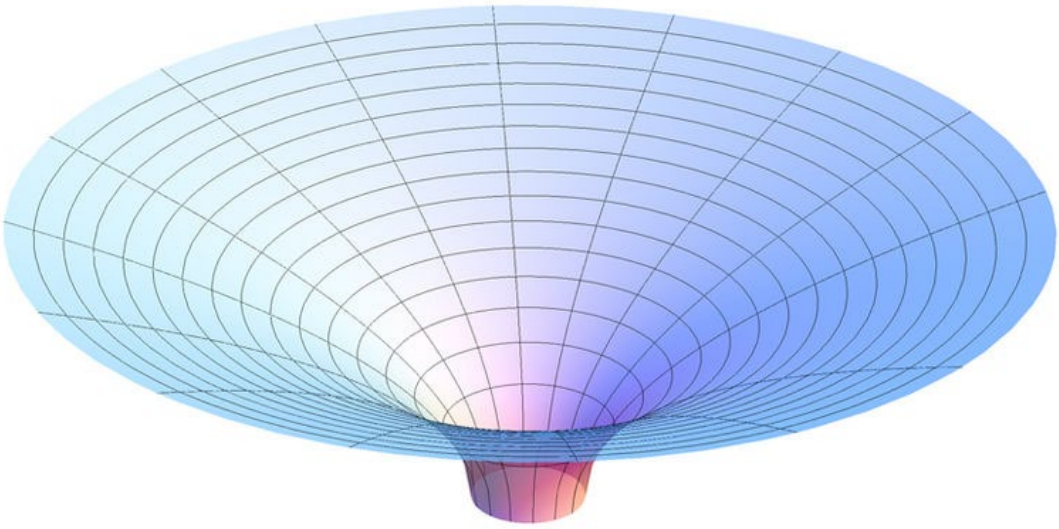
Y ahora viene la pregunta genial que anticipábamos en el inicio del epígrafe anterior: ¿y si esta métrica es una métrica inducida por el ambiente de Minkowski? Es decir, ¿qué clase de superficie 'se deja inducir' una métrica de Minkowski adoptando esta expresión?

Si esto es así, ¿qué clase de superficie sería?

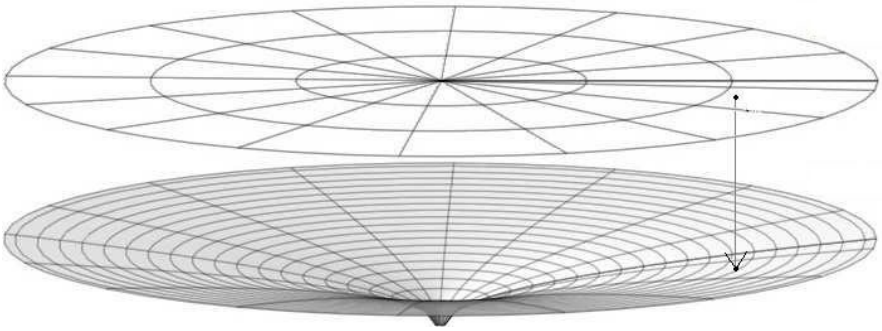
Pues resulta que existe una superficie que se dejaría inducir una métrica ambiente de Minkowski (en este caso sencillamente la parte espacial) aportando exactamente esta nueva forma espacial que tenemos:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

El paraboloide de Flamm.



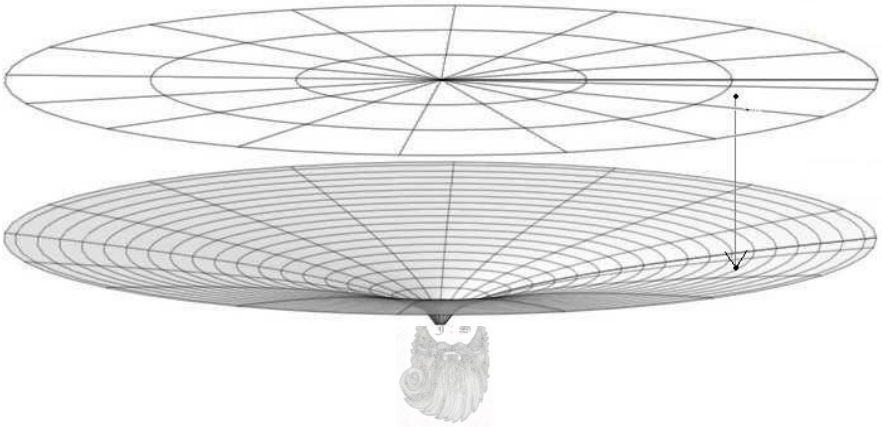
Es decir, dicha métrica ($ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2$) surge de inducir la métrica del espacio euclídeo ambiente sobre una superficie con dicha forma:



Y mediante esa métrica inducida en esa superficie es el modo en que medirían internamente las distancias propias los 'habitantes' que vivieran en esa superficie.

Veamos esto con algo más de detalle. Analicemos qué es un Paraboloide de Flamm y cómo medirían distancias (mediante su propia métrica, inducida por el ambiente) unos supuestos habitantes de su superficie.

Para ello, vamos a inducir una métrica ambiente euclídeo en un Paraboloide de Flamm.



En un espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con métrica $g = I$ y con elemento de línea (en coordenadas cilíndricas):

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$$

El Paraboloide de Flamm (expresada en coordenadas cartesianas) se define como:

$$x^2 + y^2 = \left(a + \frac{z^2}{4a}\right)^2$$

Vamos a inducir la métrica euclídea en la superficie del paraboloide, como ya sabemos, 'deformando' el eje z de la métrica euclídea en coordendas cilíndricas para, así, inducirla. Para ello, en primer lugar, convirtámos la definición del paraboloide a coordenadas cilíndricas. Obviamente, el radio r sería el resultado de sumar las componentes cartesianas cuadráticas x e y (vamos, Pitágoras), por lo que:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Luego podemos empezar a reformular el paraboloide en coordenadas cilíndricas como:

$$r^2 = \left(a + \frac{z^2}{4a}\right)^2$$

$$\sqrt{r^2} = \sqrt{\left(a + \frac{z^2}{4a}\right)^2}$$

$$r = \pm\left(a + \frac{z^2}{4a}\right)$$

Nos quedamos con el signo positivo pues estanmos hablando de una distancia que, por definición, siempre será positiva.

$$r = a + \frac{z^2}{4a}$$

Vamos ahora a hallar un dz para poder imbuirlo en la métrica euclídea:

$$dr = d\left(a + \frac{z^2}{4a}\right)$$

Obviamente, la única variable en el lado derecho es z, por lo que sólo podemos derivar por z, es decir:

$$dr = \frac{2z}{4a}dz = \frac{z}{2a}dz$$

$$dz = \frac{2a}{z}dr$$

Pero recordemos: ¿qué es z? Despejémoslo de nuestra expresión:

$$r = a + \frac{z^2}{4a}$$

$$= z^2$$

$$z = \sqrt{4a(r-a)}$$

$$z = 2\sqrt{a}\sqrt{r-a}$$

Y ahora sustituyamos en nuestro diferencial dz para dejarlo todo en función de r (o φ si fuera el caso…). Lo que estamos haciendo es eliminar una dimensión (la z) y dejarla en función de las dos existentes en la superficie del paraboloide (r, φ):

$$dz = \frac{2a}{z} dr$$

$$dz = \frac{2a}{2\sqrt{a}\sqrt{r-a}} dr$$

Elevemos al cuadrado para poder imbuirla en la métrica euclídea ambiente:

$$dz^2 = \left(\frac{2a}{2\sqrt{a}\sqrt{r-a}} dr\right)^2$$

$$dz^2 = \frac{4a^2}{4a(r-a)} dr^2$$

$$dz^2 = \frac{a}{r-a} dr^2$$

Sustituyamos ahora en la métrica euclídea. Ahora sí, induzcamos:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + \frac{a}{r-a} dr^2$$

Sacamos dr^2 factor común:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{a}{r-a}\right) dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

Vamos a jugar un poco con el término marcado en color rojo:

$$ds^2 = \left(\frac{r-a}{r-a} + \frac{a}{r-a}\right) dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

$$ds^2 = \left(\frac{r-a+a}{r-a}\right) dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

$$ds^2 = \left(\frac{r}{r-a}\right) dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

$$ds^2 = \left(\frac{\left(\frac{1}{r}\right) r}{\left(\frac{1}{r}\right) \cdot (r-a)}\right) dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

$$ds^2 = \left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

Y, ojo…. ¿qué es esto? ¡Maravilla! ¡Justo la métrica reducida de Schwarzschild que planteábamos como, hipotéticamente, una métrica inducida! Es decir: que el Paraboloide de Flamm se deja inducir la métrica de Minkowski arrojando, para la medición en su superficie, la forma de la métrica reducida de Schwarzschild.

Siendo esto así, ¿cómo usan sus habitantes la métrica para medir la distancia 'propia', interna, de un punto A a un punto B?

Imaginemos que entre dichos puntos sólo hay diferencia en la dimensión radial, es decir, que φ no cambia, es decir, que $d\varphi = 0$. Su métrica, para medir esta distancia se les quedaría como:

$$ds^2 = \left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

$$ds^2 = \left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)dr^2 + r^2(0)^2$$

$$ds^2 = \left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)dr^2$$

Por lo que para medir la distancia desde A hasta B sólo tendrían que hacer lo siguiente:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)dr^2}$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)}dr$$

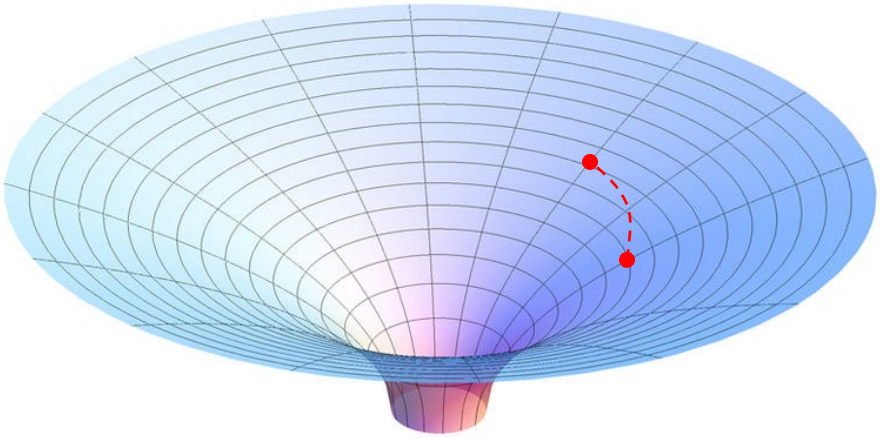
$$\int ds = \int_{r=A}^{r=B} \sqrt{\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)}dr$$

$$s = \int_{r=A}^{r=B} \sqrt{\left(\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)}dr$$

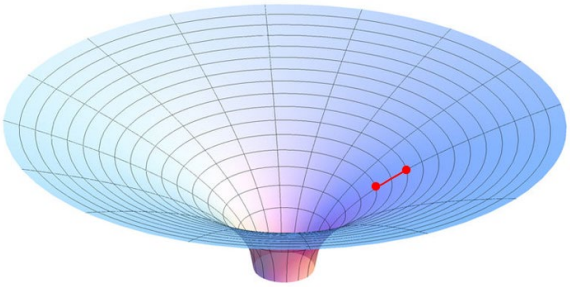
Que nos daría el escalar al que corresponde la distancia propia que miden los habitantes de la superficie del Paraboloide de Flamm.

Nosotros, naturalmente, desde fuera, haciendo uso de nuestra métrica euclídea iguala la I, la hubiéramos calculado, sencillamente, restado las magnitudes de r en los dos puntos. Sin embargo, un habitante del paraboloide, como sabemos, debe hacer uso de su métrica, que está 'modificada'[351].

Pongamos un ejemplo un poco más realista: dos puntos A y B que están en dos posiciones totalmente arbitrarias en la superficie del paraboloide. La distancia no sólo discurre en la dimensión r, sino que también lo hace en la dimensión φ y, además, no tiene por qué ser recta (imaginemos que es una distancia que recorre un habitante de la superficie del paraboloide a su antojo), por ejemplo:



[351] Efectivamente, si nos fijamos en la forma del Paraboloide de Flamm, observamos que un cambio de radio implica un cambio de 'altura', al menos en la parte más cónica del paraboloide:



Ciertamente, si estuviéramos muy alejados del vértice central, el espacio sería de facto plano y un cambio en r no implicaría 'cambio vertical' y, por lo tanto, para nuestra intuición no habría ningún problema para que la distancia radial estuviera contenida en un plano de corte como antes dijimos . Sin embargo, en este caso, se aprecia claramente que un cambio en r sí que implica cierto cambio vertical. ¿Cómo es esto posible si antes hemos dicho que vamos a estudiar 'cortes' planos en el cono de luz? La respuesta la tenemos, justamente, en la naturaleza misma de la relatividad y su compleja relación con nuestra intuición visual. Según nos acercamos al vértice central, los planos de corte son más 'gordos'. Siguen siendo planos, de dimensión $z = 0$, de tiempo constante, dónde sólo cambian r y φ pero, claro, a nuestra intuición, eso de 'plano gordo' le suena a chino… Sin embargo, matemática y 'realmente' es perfectamente posible pues recordemos que hemos 'deformado la dimensión z' para que coincida con la superficie del paraboloide. Los planos se deforman, se engrosan, porque, de hecho, el tiempo se deforma según nos acercamos al centro del paraboloide. En breve lo vamos a desarrollar.

Para calcular esta distancia, simplemente, como ya hemos hecho tantas otras veces, parametricemos la trayectoria, por ejemplo (una cualquiera, inventada sobre la marcha):

$$r_{(\lambda)} = \lambda^3 + 2$$

$$\varphi_{(\lambda)} = \lambda^2 + 1$$

Esto hace que para diferentes valores de λ, tendremos diferentes valores de las dimensiones r y φ. Lambda es la variable que define el tipo de cambio de la función. Por ejemplo:

$$\lambda = 0 \rightarrow r = 2 \rightarrow \varphi = 1$$

$$\lambda = 1 \rightarrow r = 3 \rightarrow \varphi = 2$$

$$\lambda = 2 \rightarrow r = 10 \rightarrow \varphi = 5$$

...

Ahora recordemos, para el paraboloide, tenemos este elemento de línea:

$$ds^2 = \left(\frac{1}{1 - \frac{a}{r}}\right) dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

'Enchufemos' la descripción funcional que tenemos de r y φ en nuestro elemento de línea. Para ello calculemos los diferenciales:

$$r = \lambda^3 + 2$$

$$dr = 3\lambda^2 d\lambda$$

$$\varphi = \lambda^2 + 1$$

$$d\varphi = 2\lambda \, d\lambda$$

Procedamos a conectar las expresiones con el elemento de línea:

$$ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

$$ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{a}{(\lambda^3 + 2)}} (3\lambda^2 d\lambda)^2 + (\lambda^3 + 2)^2 (2\lambda \, d\lambda)^2$$

$$ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{a}{(\lambda^3 + 2)}} 9\lambda^4 d\lambda^2 + (\lambda^3 + 2)^2 4\lambda^2 d\lambda^2$$

Saquemos $d\lambda^2$ como factor común:

$$ds^2 = \left[\frac{1}{1 - \frac{a}{(\lambda^3 + 2)}} 9\lambda^4 + (\lambda^3 + 2)^2 4\lambda^2\right] d\lambda^2$$

Despejemos el cuadrado:

$$ds = \sqrt{\left[\frac{1}{1-\frac{a}{(\lambda^3+2)}}9\lambda^4 + (\lambda^3+2)^2 4\lambda^2\right] d\lambda^2}$$

$$ds = \sqrt{\left[\frac{1}{1-\frac{a}{(\lambda^3+2)}}9\lambda^4 + (\lambda^3+2)^2 4\lambda^2\right]} d\lambda$$

Y finalmente, despejemos el diferencial:

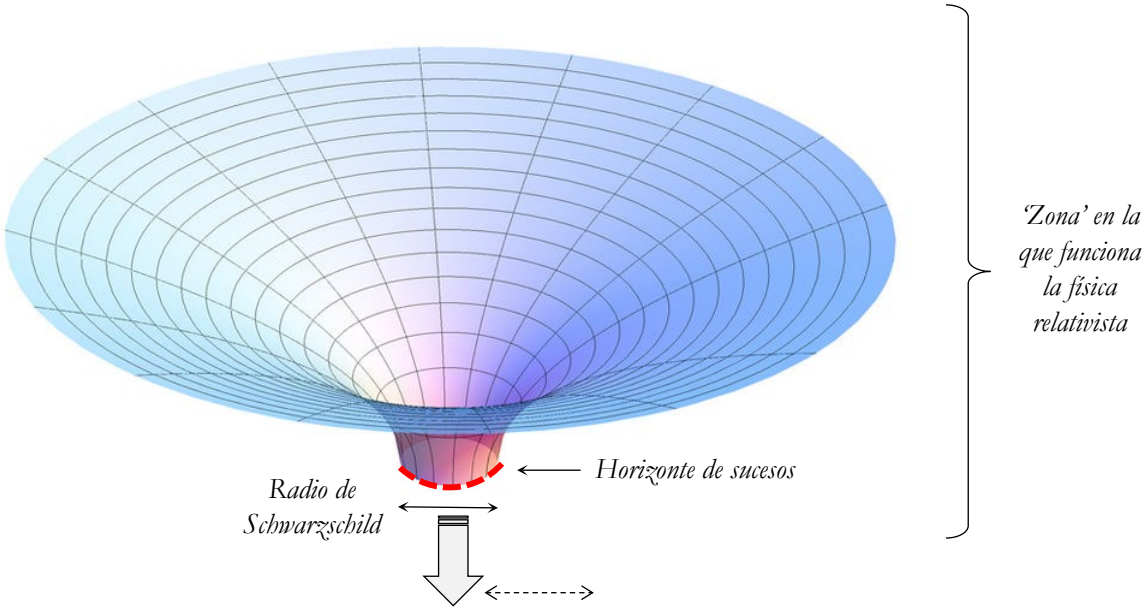
$$\int ds = \int \sqrt{\left[\frac{1}{1-\frac{a}{(\lambda^3+2)}}9\lambda^4 + (\lambda^3+2)^2 4\lambda^2\right]} d\lambda$$

En definitiva, desde el punto A hasta el punto B:

$$s = \int_{valor\ de\ \lambda\ en\ A}^{valor\ de\ \lambda\ en\ B} \sqrt{\left[\frac{1}{1-\frac{a}{(\lambda^3+2)}}9\lambda^4 + (\lambda^3+2)^2 4\lambda^2\right]} d\lambda$$

Y así se calcularía la distancia propia un habitante de la superficie del paraboloide.

Y, recordemos, todo esto se emplea para el espacio que queda fuera de la esfera de nuestro planeta que origina la deformación paraboloide de todo el entorno espaciotemporal. Y, por supuesto, para cuerpos celestes cuyo radio sea mayor que el radio de Schwarzschild ya que, si no, el objeto celeste hubiera colapsado en un agujero negro:

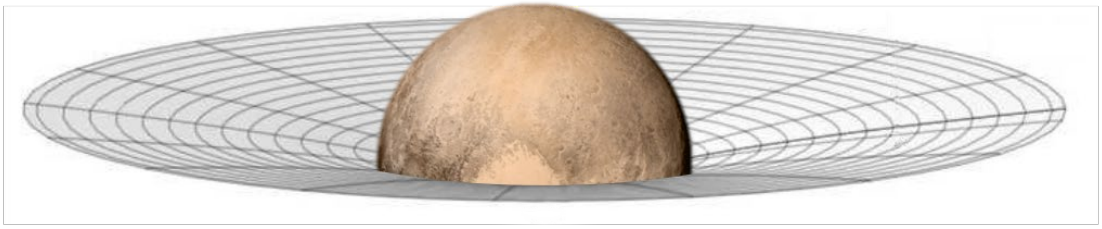


…

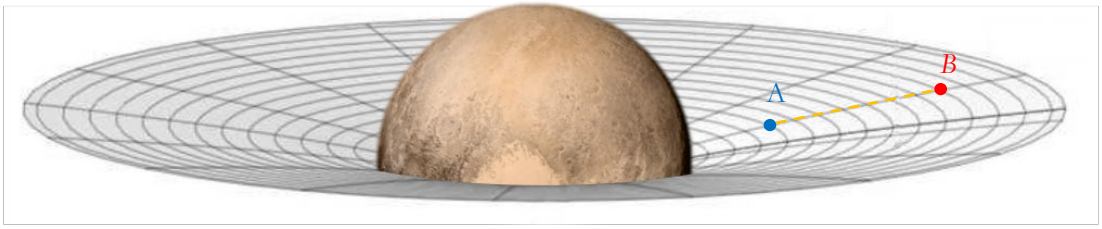
Más allá del horizonte de sucesos… es terreno desconocido o, como mucho, para investigaciones acerca de la gravedad cuántica. Una gravedad tan intensa que es capaz de hacer frente a las fuerzas que rigen el mundo subatómico.

Analicemos ahora el comportamiento del tiempo según nos vamos acercando al centro del paraboloide. Ya en la nota 351 hemos adelantado algo acerca del comportamiento del tiempo así que ahora toca desarrollarlo y darle forma matemática.

Sabemos que estando muy alejados del centro del paraboloide el espacio es perfectamente plano (siempre que no consideremos algunas otras fuentes gravitatorias de distorsión espaciotemporal). Imaginemos, para nuestras pesquisas, un planeta (por supuesto de radio mayor al radio de Schwarzschild) centrado en un paraboloide:



Y ahora imaginemos dos observadores A y B situados, de manera fija (es decir no *caen* hacia el planeta ni se trasladan en phi), en dos puntos diferentes que, de nuevo, para simplificar el asunto, sólo están separados por una distancia radial:



Recordemos la métrica de Schwarzschild otra vez:

$$a = \frac{2GM}{c^2}$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta d\varphi^2$$

Que para un $\theta = \frac{\pi}{2}$ nos queda como:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\varphi^2$$

Y como hemos dicho que están totalmente fijos, es decir, que no cambia ni r ni φ, es obio que:

$$d\varphi = 0$$
$$dr = 0$$

Por lo que la métrica, que se usará para estudiar el tiempo, para ambos observadores, quedará como:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2dt^2$$

Ahora, recordemos que siempre podíamos definir el tiempo propio como[352]:

$$ds^2 = -c^2d\tau^2$$

Así, para cada observador (marcamos dt en verde porque ése es externo, es el tiempo que medimos nosotros, los observadores externos y que, por lo tanto, es el mismo en ambos casos….es una referencia nuestra que no se ve afectada por la situación de los observadores en el paraboloide):

- A: $ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2dt^2 = -c^2d\tau^2$
- B: $ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2dt^2 = -c^2d\tau^2$

Desarrollemos cada uno por separado. Para el observador :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2dt^2 = -c^2d\tau^2$$

$$-\left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2dt^2 = -c^2d\tau^2$$

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right)dt^2 = d\tau^2$$

$$d\tau = \pm\sqrt{\left(1 - \frac{a}{r}\right)dt^2}$$

Nos quedamos sólo con la solución positiva (convenimos que el tiempo transcurre 'hacia adelante'):

$$d\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{a}{r}\right)}dt$$

Integramos:

$$\int d\tau = \int \sqrt{\left(1 - \frac{a}{r}\right)}dt$$

Como $\left(1 - \frac{a}{r}\right)$ es claramente constante, podemos sacarlo de integral que, finalmente, nos queda como:

$$\int d\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{a}{r}\right)}\int dt$$

[352] Decir dónde.

$$\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{a}{r}\right)}\, t$$

Y esta ecuación nos relaciona el tiempo propio del observador A con el tiempo que medimos nosotros como observadores externos al sistema.

Veamos ahora el caso del observador B.

Sabemos que:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 = -c^2 d\tau^2$$

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^2 = d\tau^2$$

Pero pensemos ahora en algo muy interesante. Supongamos que el radio en esta caso es elevadísimo, es decir, está muy alejado del planeta… tanto, tanto que podríamos decir que:

$$\frac{a}{r} \approx 0$$

De manera que pudiéramos decir que:

$$(1 - 0) dt^2 = d\tau^2$$

$$(1) dt^2 = d\tau^2$$

Es decir:

$$dt^2 = d\tau^2$$

O lo que es lo mismo:

$$dt = d\tau$$

Esto tiene todo el sentido del mundo pues, ciertamente, si la distancia al planeta es tan grande, el espacio es prácticamente plano y, por lo tanto, el tiempo propio del observador B debe ser prácticamente igual al tiempo externo omnisciente que nosotros medimos.

Así ya estamos viendo que, efectivamente, el tiempo que percibe cada observador es diferente. El tiempo se deforma en virtud de su distancia a la masa que deforma el tejido espaciotemporal.

Es decir que tenemos que si, por ejemplo, nosotros, desde fuera, medimos un evento que dura 10 segundos los observadores internos medirán:

- B: medirá aproximadamente lo mismo que nosotros: 10 segundos.
- A: medirá 10 segundos multiplicados por el factor corrector $\left(1 - \frac{a}{r}\right)$ que, si por ejemplo es 0.5, finalmente resultaría que, desde dentro, mediría 5 segundos.

Observamos que, de hecho, mientras más cerca estemos de la masa, más lentamente pasará el tiempo.

Para ver las implicaciones relativistas que experimentalmente arroja este modelo supongamos lo siguiente: el observador A emite hacia B dos fotones separados por 1 segundo de

diferencia. Obviamente, A emite dos fotones separados por 1 segundo 'propio' ¿qué separación temporal entre fotones observará B?

Planteemos el escenario desde el punto de vista de A y, gracias a que B está muy lejos de la masa y $dt = d\tau$, finalmente podremos relacionar y comparar el escenario de ambos observadores. Como decíamos, planteemos la situación desde el punto de vista de A:

$$\Delta\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{a}{r}\right)}\,\Delta t$$

$$1\ seg = \sqrt{\left(1 - \frac{a}{r}\right)}\,\Delta t$$

Como sabemos que:

$$dt = d\tau$$

Podemos decir que:

$$1 = \sqrt{\left(1 - \frac{a}{r}\right)}\,\Delta\tau$$

Luego, el tiempo que percibe B será:

$$\Delta\tau = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{a}{r}\right)}}$$

Que, naturalmente, será diferente a 1 segundo.

Esto, si lo mezclamos con las ecuaciones de Maxwell nos puede dar, además, una información interesantísima: las frecuencias lumínicas que percibirían diferentes observadores según su cercanía o no a una masa gravitatoria

Hemos dicho que el intervalo de tiempo entre la emisión de fotones desde A era de un segundo. Es decir, el periodo (T) de emisión es de 1 segundo. Sustituyamos el segundo por el periodo:

$$T = \frac{T}{\sqrt{\left(1 - \frac{a}{r}\right)}}$$

Es decir, el observador B va a percibir un periodo diferente.

Pero, aún más interesante, tirando de ecuaciones de Maxwell, podemos ir más allá y analizar la longitud de onda que percibiría cada observador. Sabemos que la velocidad de la luz es igual a la longitud de onda dividida por el periodo:

$$c = \frac{\lambda}{T}$$

De donde:

$$T = \frac{\lambda}{c}$$

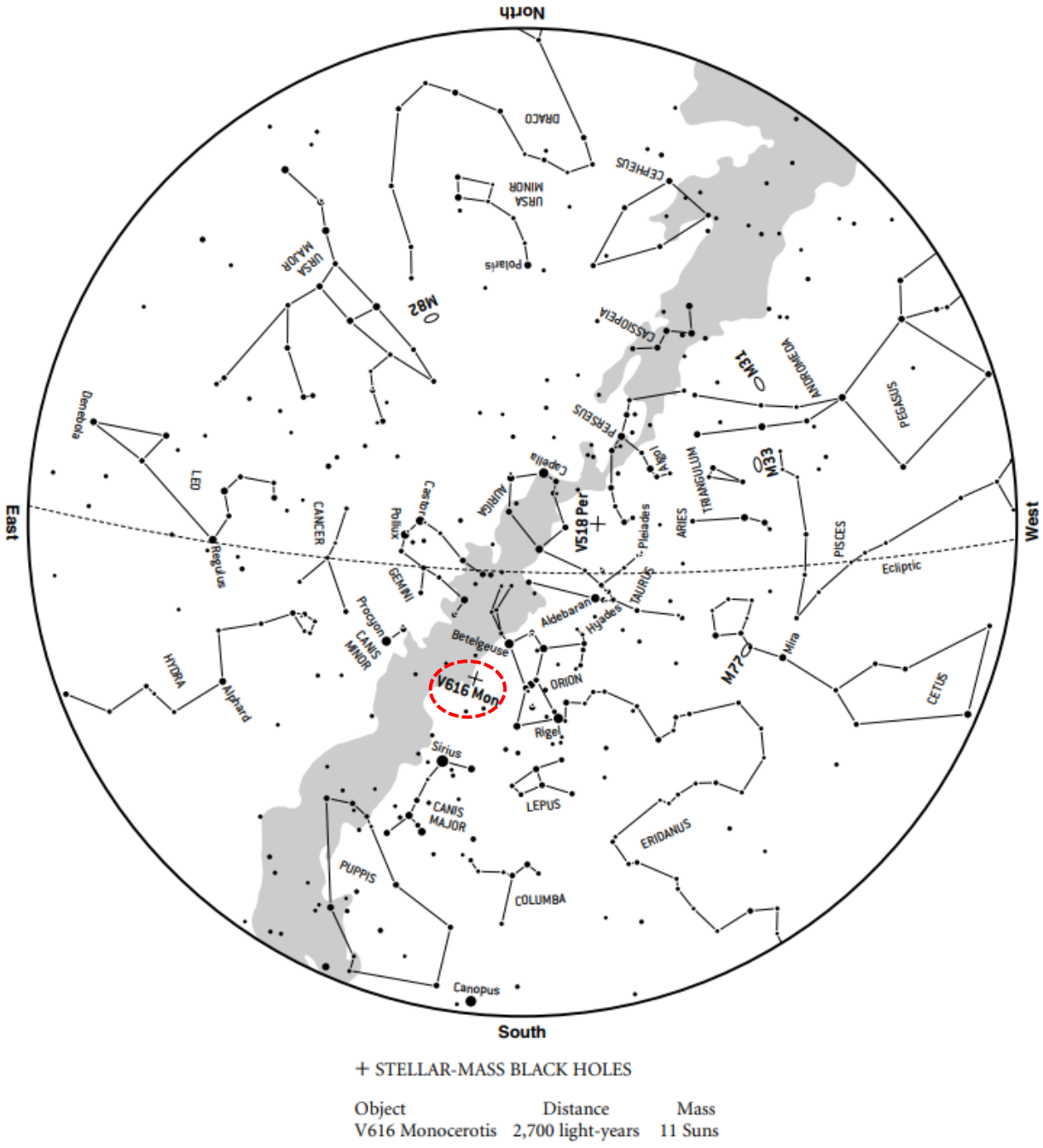
De manera que, sustituyendo:

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{\frac{\lambda}{c}}{\sqrt{\left(1 - \frac{a}{r}\right)}}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{a}{r}\right)}}\,\lambda$$

Es decir, que llegamos a una expresión que nos relaciona las longitudes de onda que perciben los diferentes observadores. Vemos, en definitiva, el fundamento relativista del famoso 'corrimiento al rojo' de la luz. Éste no se produce porque los cuerpos se alejen… ¡se produce porque el espaciotiempo se deforma! ¡Se estira y se contrae!

Por verlo con datos concretos nos vamos a centrar en un caso real. Vamos a imaginar que A está muy cerca de un agujero negro real (en vez de planeta, usaremos un agujero negro para intensificar los efectos): A0620-00[353] que está ubicado en la constelación del Unicornio (Monoceros) a una distancia aproximada de 3.000 años luz y sea posiblemente el sistema binario con agujero negro conocido más cercano al Sistema Solar:



Fuente: Astronomical Society of the Pacific

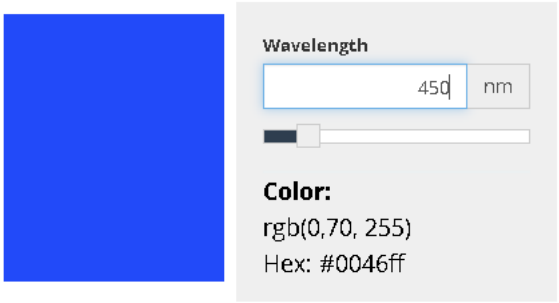
[353] A0620-00 (V616 Monocerotis, V616 Mon) es una estrella binaria de rayos X de baja masa y candidata a agujero negro en la constelación de Monoceros. Uno de los componentes del sistema binario es conocido por ser un objeto estelar compacto y oscuro, que tiene una masa entre 6,3 y 6,9 veces la masa del Sol. El otro componente es una estrella de tipo K (enana naranja), de aproximadamente 0,5 masas solares.

Los datos que tenemos de este agujero negro son:

- Masa. $M = 1.7901 \times 10^{31}\ Kg$
- $a = \frac{2GM}{c^2} \approx 26549\ m$

Su suponemos que nuestro observador A, el que emite los fotones, está a una distancia del centro del agujero negro de $46549\ m$ (por supuesto más allá del horizonte de sucesos, que está en $26549\ m$), podríamos calcular que:

> Si A emite fotones con una longitud de onda de luz visible azul de 450 nm (nanómetros):

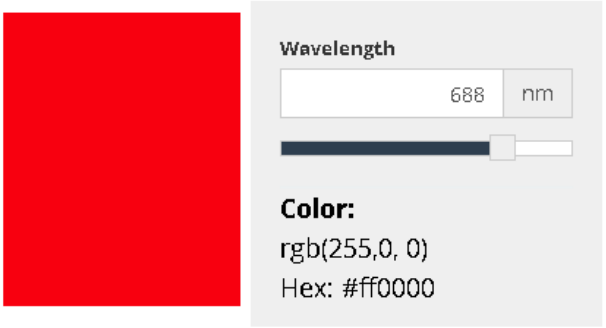


> El observador B percibiría esos fotones con una longitud de onda de:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{26549}{46549}\right)}}\ 450$$

$$\lambda \approx 1.53 \cdot\ 450$$

$$\lambda \approx 688\ nm$$



> Es decir, las cosas, que suceden en A, desde B se ven como rojizas.

Es más, desde el punto de vista del observador B, las cosas en A suceden muy lentamente, mientras que el observador A, naturalmente, no observa nada raro en su propio tiempo.

$$\Delta\tau = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{a}{r}\right)}}\Delta\tau$$

$$\Delta\tau = 1.53 \cdot \Delta\tau$$

Es decir, que B percibe como 1.53 segundos lo que para A es 1 segundo. Percibe el tiempo de A como más lento. Esto a veces es lioso pues parece justo lo contrario pero, para aclararnos, pensemos en los pulsos de luz emitidos por A. Mientras A los está emitiendo a 1 de *sus* segundos, B percibe que lo está haciendo más lentamente: a 1.53 de sus segundos.

-2.12-

Newton y Einstein

Realmente, el cambio que supuso la superación del paradigma Clásico-Newtoniano por la Teoría de la Relatividad fue más un cambio de carácter cosmogónico que una revolución del cálculo. La Teoría de la Relatividad, es cierto, explica con más precisión fenómenos astronómicos pero, fundamentalmente, lo que nos aporta es una comprensión más profunda de la ontología de aquello que pueda ser el espacio y el tiempo y el modo en que están relacionados. De hecho, para la mayoría de fenómenos que estudiamos actualmente, lo que se emplea es la Mecánica Newtoniana. Incluso los viajes a la luna, marte, asteroides, etc… se calculan y desarrollan mediante las ecuaciones de Newton, eso sí, algo corregidas por elementos relativistas que afinan el cálculo *varios decimales*.

Recordemos algunas constantes básicas de la Mecánica Newtoniana.

Sabemos, por la segunda ley de Newton, que:

$$F = m\,a$$

Expresemos la fuerza, de carácter gravitatorio, mediante la ley de gravitación universal, por supuesto, también de la bestia parda que es Newton:

$$-\frac{GMm}{r^2} = m\,a$$

Y ahora juguemos un poco con la expresión para llegar a una serie de importantes resultados que nos llevarán a la definición de Energía en el paradigma clásico. Veamos:

$$m\,a = -\frac{GMm}{r^2}$$

La aceleración la podemos expresar como la derivada de la velocidad por el tiempo:

$$m\,\frac{dv}{dt} = -\frac{GMm}{r^2}$$

Ahora, por la regla de la cadena, podemos re expresar $\frac{dv}{dt}$ como:

$$\frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

De manera que:

$$m \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = -\frac{GMm}{r^2}$$

Donde observamos que:

$$\frac{dr}{dt} = v$$

Por lo que, podemos expresar:

$$m \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = -\frac{GMm}{r^2}$$

Como:

$$m \frac{dv}{dr} v = -\frac{GMm}{r^2}$$

Pasemos el diferencial de r (dr)al lado derecho:

$$m\, v\, dv = -\frac{GMm}{r^2} dr$$

Ahora integremos en ambos lados:

$$\int m\, v\, dv = \int -\frac{GMm}{r^2} dr$$

Podemos sacar las constantes del integrando:

$$m \int v\, dv = -GMm \int \frac{1}{r^2} dr$$

Resolvemos:

$$\frac{1}{2}mv^2 = -GMm\left(\frac{-1}{r}\right) + C$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{r} + C$$

Y despejamos C:

$$C = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

Donde podemos apreciar que tanto por las unidades de $\frac{1}{2}mv^2$ (joules) como por la pinta general de la expresión, todo apunta a que C es una forma de Energía y que además sabemos

que es una constante (recordemos que ha surgido como una constante de integración). Reescribamos, entonces, así:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

Pensemos ahora en el Momento Angular tal y como se define en el mundo clásico: el producto vectorial de la posición con la cantidad de movimiento.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Vamos a imponer que el Momento Angular $\vec{L}$ permanece constante[354]. Para ello, la derivada respecto al tiempo de $\vec{L}$ debería ser igual a cero:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

Veamos si esto es así. Por la regla de Leibniz (la derivada de un producto):

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\, m\vec{v}}{dt}$$

Esto es:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a}$$

Veamos el término izquierdo:

- $\vec{v} \times m\vec{v}$

  Sabemos que el producto vectorial de un vector por sí mismo es igual a cero (la constante escalar m, es obvio, podemos olvidarla para estos cálculos). Por ejemplo, un vector:

  $$\vec{v} = 1\hat{\imath} + 1\hat{\jmath} + 3\hat{k}$$

  Multiplicado por sí mismo, es obvio que es cero, pues recordemos:

$$\vec{v} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (2 \cdot 3 - 3 \cdot 2)\hat{\imath} - (1 \cdot 3 - 3 \cdot 1)\hat{\jmath} + (1 \cdot 2 - 2 \cdot 1)\hat{z} = 0$$

Veamos ahora el término derecho:

[354] Véase nota 350.

- $\vec{r} \times m\vec{a}$

Esto lo podemos reescribir como:

$$\vec{r} \times \vec{F}$$

Una fuerza gravitatoria cuyo módulo conocemos:

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

Y, para aplicarla vectorialmente en una dirección determinada, tan sólo tendríamos que multiplicarla por un vector unitario en la dirección r, es decir:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

Y, así, estamos de nuevo ante un vector que se multiplica vectorialmente por sí mismo que, por tanto, nos vuelve a dar cero:

$$\vec{r} \times \vec{F} \rightarrow \vec{r} \times \left(-\frac{GMm}{r^2}\right)\hat{r} = 0$$

Es decir que:

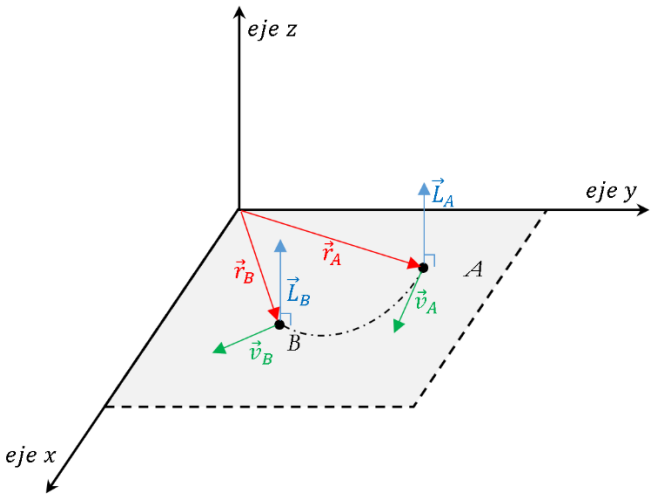
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

Y, por lo tanto, podemos afirmar que:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \rightarrow \text{Es constante}$$

Al ser el Momento Angular constante, podremos afirmar que la órbita de un supuesto cuerpo en torno a un punto está contenida en un plano tal y como vimos en la nota 350. Así, para un sistema en que, por ejemplo, un planeta gira en torno a una estrella, podemos elegir un sistema de referencia feliz en que la órbita está contenida en el plano (x, y) y el momento angular apunta perpendicularmente a dicho plano y, por ello, es un vector paralelo al eje z.

Así, en un sistema como éste:



Podremos definir:

$\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$ como $\vec{r} = (r_x, r_y, 0)$, ya que no tiene componente en el eje z

$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ como $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$, ya que no tiene componente en el eje z

Donde, el resultado de su producto vectorial, justamente, sólo tendrá componente, precisamente, z, pues es perpendicular al plano (x, y) en que están $\vec{r}$ y $\vec{v}$ (bueno, en realidad $\vec{p}$, que no es otra cosa que $\vec{v}$ por una constante escalar (masa)).

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) \rightarrow \vec{L} = (\,0\,, 0\,, L_z)$$

Que es, precisamente:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ r_x & r_y & r_z \\ p_x & p_y & p_z \end{pmatrix}$$

Donde, como decimos, lo único que sobrevive es L_z que es:

$$\vec{L} = L_z = r_x p_y - r_y p_x$$

Como vemos, para el caso de $\vec{r}$ y $\vec{p}$ nos bastará con trabajar en un sistema de dos dimensiones, pues hemos elegido el sistema de referencia 'feliz'. De hecho, para hacer converger todo esto con el paradigma de la Teoría de la Relatividad sería muy útil pasar esta información que tenemos a coordenadas polares. Es muy simple. Recordemos que en coordenadas polares (hay dos variables radio r y ángulo φ). Así:

$$x = r\cos\varphi \rightarrow r_x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi \rightarrow r_y = r\sin\varphi$$

Con ello tendríamos ya la posición en coordenadas polares.

Para el caso de la velocidad:

$$\frac{d}{dt}x = \frac{dr}{dt}\cos\varphi + r\frac{d\cos\varphi}{dt} \rightarrow v_x = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}y \rightarrow v_y = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

Puesto que más delante, para comparar expresiones del mundo clásico con el mundo relativista necesitaremos la velocidad al cuadrado en coordenadas polares, calculémosla ahora.

$$v^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2$$

Luego:

$$v^2 = (\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot{\varphi})^2 + (\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot{\varphi})^2$$

$$v^2 = (\dot{r}\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi\,\dot{\varphi})^2 - 2\dot{r}\cos\varphi\, r\sin\varphi\,\dot{\varphi} + (\dot{r}\sin\varphi)^2 + (r\cos\varphi\,\dot{\varphi})^2 + 2\dot{r}\cos\varphi\, r\sin\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$v^2 = (\dot{r}\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi\,\dot{\varphi})^2 + (\dot{r}\sin\varphi)^2 + (r\cos\varphi\,\dot{\varphi})^2$$

Reordenamos:

$$v^2 = (\dot{r}\cos\varphi)^2 + (\dot{r}\sin\varphi)^2 + (r\cos\varphi\,\dot{\varphi})^2 + (r\sin\varphi\,\dot{\varphi})^2$$

$$v^2 = \dot{r}^2[(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2] + r^2\dot{\varphi}^2[(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2]$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

Por otro lado, ya sabíamos que podíamos expresar el módulo del Momento Angular como:

$$L_z = r_x p_y - r_y p_x$$

$$L_z = r_x m v_y - r_y m v_x$$

$$L_z = m[r_x v_y - r_y v_x]$$

Puesto que conocemos las componentes de la posición y de la velocidad en coordenadas polares, procedemos a sustituir:

$$L_z = m[r\cos\varphi\,(\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot{\varphi}) - r\sin\varphi\,(\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot{\varphi})]$$

$$L_z = m[r\cos\varphi\,\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\,r\cos\varphi\,\dot{\varphi} - r\sin\varphi\,\dot{r}\cos\varphi + r\sin\varphi\,r\sin\varphi\,\dot{\varphi}]$$

$$L_z = m[r\cos\varphi\,r\cos\varphi\,\dot{\varphi} + r\sin\varphi\,r\sin\varphi\,\dot{\varphi}]$$

$$L_z = m[r^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi} + r^2\sin^2\varphi\dot{\varphi}]$$

$$L_z = mr^2\dot{\varphi}[\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]$$

$$L_z = mr^2\dot{\varphi}[1]$$

$$L_z = mr^2\dot{\varphi}$$

Es decir, que en coordenadas polares el Momento Angular es[355]:

$$L_z = L = mr^2\dot{\varphi}$$

Ahora sustituyamos toda esta información que tenemos en expresión que habíamos encontrado para la Energía (ahora, claro, al sustituir tendremos lo mismo pero en coordenadas polares que, como hemos dicho, nos va a servir mucho para poder comparar con el mundo relativista):

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{GMm}{r}$$

Es decir, que ya tenemos expresiones para nuestras dos constantes, expresadas en coordenadas polares:

[355] Recordemos que en coordenadas cartesianas $L = (0, 0, L_z)$.

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{GMm}{r}$$

$$L = mr^2\dot{\varphi}$$

Ahora procedamos a analizar gráficamente qué implicaciones tienen estos resultados. Para ello, antes, simplifiquemos aún más nuestro escenario, que por el momento se desarrollaba en un plano tabulado en coordenadas polares (r, φ). Imaginemos que giramos el plano de manera que lo vemos como contenido en una línea, es decir, forcemos el sistema a que el estudio se reduzca al análisis de una partícula que se mueve en una sola dimensión (r), en una línea. Para ello despejemos $\dot{\varphi}$ de nuestra expresión de Momento Angular y dejémoslo todo función de r, es decir:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$$

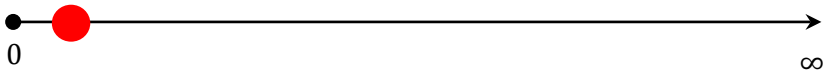
Y ahora sustituyamos en la expresión de la Energía para que nos quede todo en función de r:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2\right) - \frac{GMm}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}m\,\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\,r^2\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}m\,\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Ahora, estando todo en función de r, podemos continuar nuestro desarrollo de las conclusiones de Newton pensando, sólo, en una partícula que puede moverse desde un origen cero hasta el infinito a lo largo de una línea que es, justamente, la dimensión r:



Vamos a suponer que la partícula y su desplazamiento conforman un sistema conservativo y, por lo tanto, su Energía puede ser definida como:

$$E = E_{cinética} + E_{potencial} = E_c + V_{(r)}$$ [356]

Que en nuestra expresión (unidimensional) está recogida como:

$$E = \frac{1}{2}m\,\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

[356] Es la nomenclatura con que en los manuales de Relatividad se suelen referir a la Energía Potencial.

Es decir que:

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$$

$$V_{(r)} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

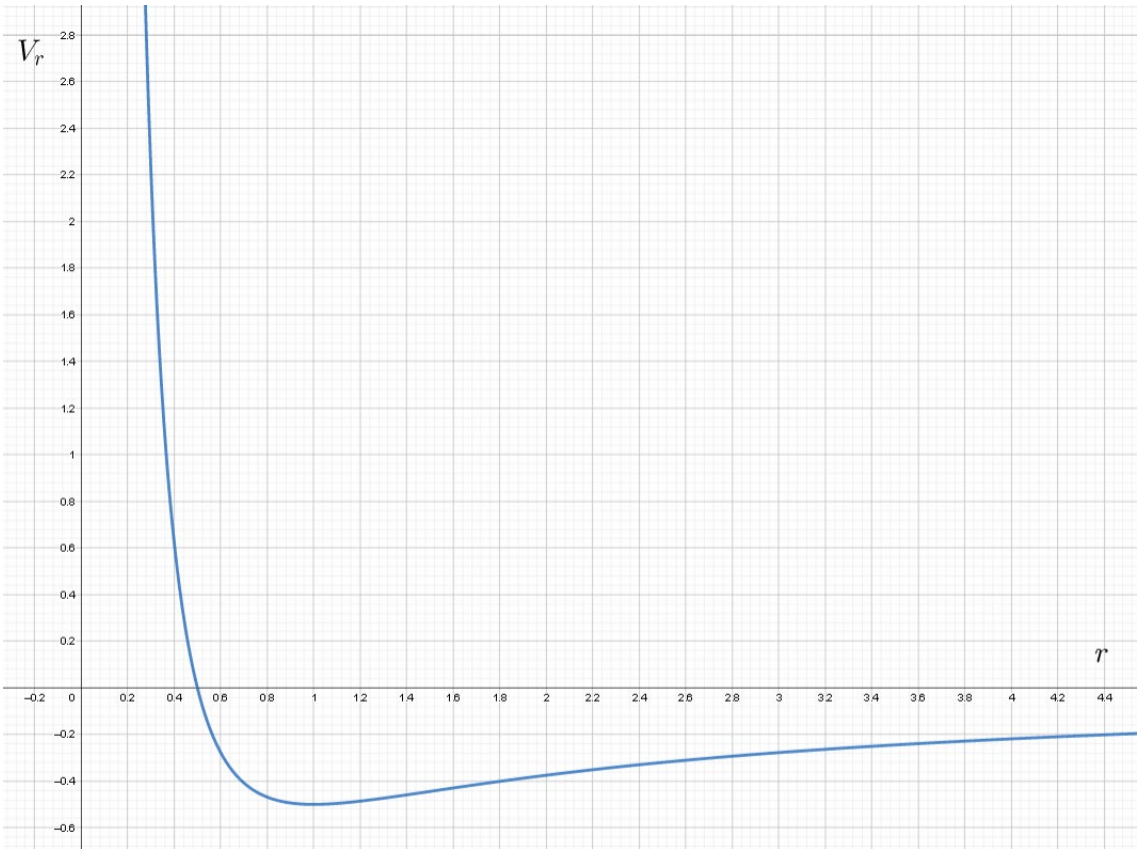
Donde, recordemos, L es constante.

Veamos gráficamente las consecuencias que tienen estos resultados que estamos exponiendo. Para ello empecemos por analizar qué aspecto tiene la representación gráfica de esta función de r. Para simplificar las cosas supongamos un valor de 1 para todas las constantes del sistema:

$$L, G, M, m = 1$$

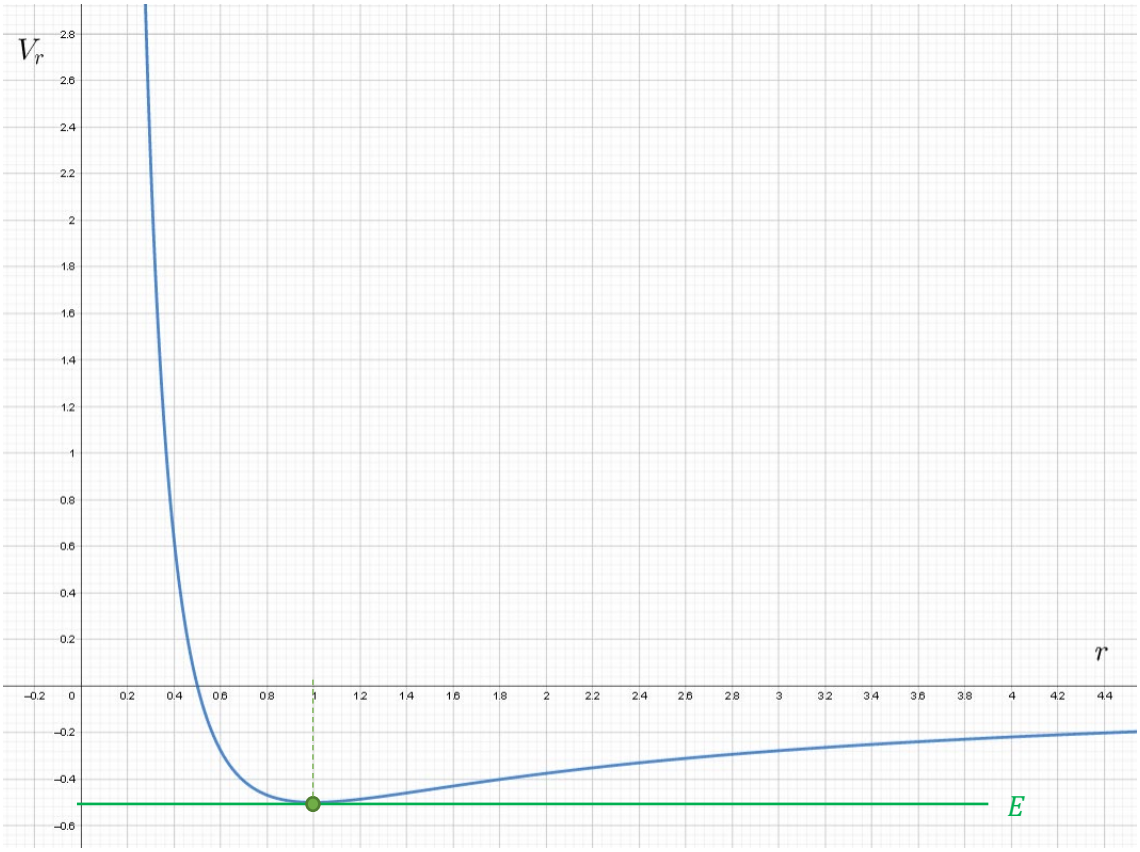
Así:

$$V_{(r)} = \frac{1^2}{2r^2} - \frac{1}{r}$$



Analicemos esta curva y con ello podremos conocer el modo en que la fuerza de la gravedad afecta a una partícula que discurre por la dimensión r. Estamos viendo cómo se comporta la Energía Potencial ($V_{(r)}$) según cambia la posición (r). Y, después, extrapolemos a la realidad del escenario de tres dimensiones (que como sabemos, en realidad se reducirían a dos por el hecho de que la órbita de una partícula se contiene en un plano).

Supongamos que nuestra partícula tiene una energía de $E = -0.5\, joules$. Dibujemos esa energía, que decimos que es constante en la gráfica:



Observamos que para la recta de esa energía la curva de la energía potencial sólo coincide en un punto. Un punto en que la energía es $= -0.5\, j$ y el radio $r = 1\, m$. En este estado, en nuestro escenario unidimensional, si la Energía es constante, fija, la partícula permanecería estable, quieta, en el punto $r = 1\, m$[357]. En ese punto, justo, en que coinciden la E y la $V_{(r)}$, necesariamente, debe cumplirse que:

[357] Recordemos, que la función de esta gráfica concreta era:

$$V_{(r)} = \frac{1^2}{2r^2} - \frac{1}{r}$$

Así:

$$-0.5 = \frac{1^2}{2r^2} - \frac{1}{r} \quad \rightarrow \quad -0.5 = \frac{1}{2r^2} - \frac{2r}{2r^2}$$

$$-0.5 = \frac{1-2r}{2r^2} \quad \rightarrow \quad -0.5(2r^2) = 1 - 2r$$

$$-r^2 = 1 - 2r \quad \rightarrow \quad -r^2 + 2r - 1 = 0$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(-1)(-1)}}{2(-1)}$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Es decir que en nuestra expresión total:

$$E = \frac{1}{2} m\,\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Para que se cumpla lo que decimos, necesariamente debe darse que:

$$E = (0) + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Es decir que:

$$\frac{1}{2} m\,\dot{r}^2 = 0$$

Condición que sólo se cumple cuando $\dot{r} = 0$, ya que, hemos de suponer que la partícula, al menos, tiene masa. Es decir, que la velocidad ($\dot{r}$) debe ser igual a cero en este escenario unidimensional simplificado. No hay velocidad, no hay cambio, es decir, el valor en r debe permanecer constante.

Demos el salto, ahora, al mundo real. Volvamos con la información que tenemos, al mundo tridimensional en el que una posible órbita está contenida en el plano (x, y) tabulado en coordenadas polares. En ese escenario 'real' teníamos la expresión:

$$E = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{GMm}{r}$$

(OBSERVACIÓN. Volvemos a ver φ y r, es decir, ya no esta todo en función de r. Ya estamos en el plano de la órbita, en el mundo 3d)

Sabemos que:

- $E = -0.5\ j$
- $r = 1\ m$
- Tal y como decíamos, por simplificar: $L, G, M, m = 1$

Luego:

$$E = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{GMm}{r}$$

$$-0.5 = \frac{1}{2}(1)\left((\dot{1})^2 + (1)^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{(1)(1)(1)}{(1)}$$

Donde podemos despejar $\dot{\varphi}$, es decir, la velocidad angular:

$$-0.5 = \frac{1}{2}(1)(0^2 + 1\dot{\varphi}^2) - 1$$

$$-0.5 = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - 1$$

$$1 - 0.5 = \frac{\dot{\varphi}^2}{2}$$

$$0.5 = \frac{\dot{\varphi}^2}{2}$$

$$2 \cdot 0.5 = \dot{\varphi}^2$$

$$1 = \dot{\varphi}^2$$

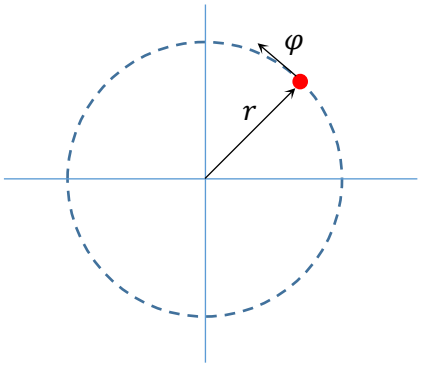
$$\dot{\varphi} = \sqrt{1} = 1 \ {}^{rad}/_{s}$$

Que es la velocidad angular. ¿Esto qué quiere decir? Que estamos ante una partícula que tiene una velocidad angular constante que orbita en torno a un cuerpo a una distancia de radio constante. Es decir, estamos hablando de una partícula que describe una órbita circular en torno a un centro. De hecho, tenemos que:

$$r = 1$$

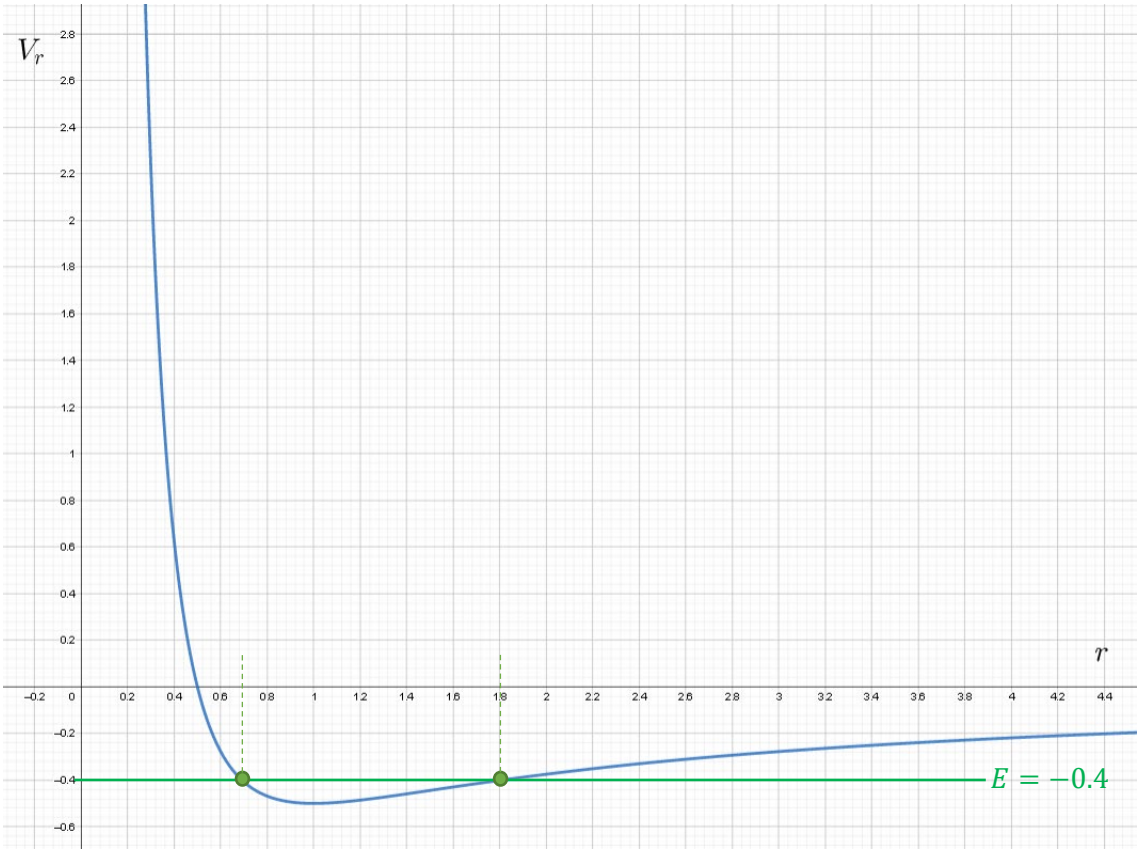
$$\dot{\varphi} = 1 \rightarrow \int \dot{\varphi}\, dt = \int 1\, dt \rightarrow \varphi_{(t)} = 1t$$

Que describe perfectamente, una trayectoria circular según pasa el tiempo:



Volvamos al escenario simplificado unidimensional e imaginemos ahora una Energía diferente. Por ejemplo:

$$E = -0.4$$



Retomemos nuestra ecuación para la Energía en términos, sólo, de r:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

En los puntos de corte, de nuevo, necesariamente, debe darse que $\dot{r} = 0$ para que:

$$-0.4 = (0) + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Que para nuestra función ultrasimplificada en que $L, G, M, m = 1$, tenemos que:

$$-0.4 = (0) + \frac{1^2}{2 \cdot 1r^2} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{r}$$

Que, si despejamos, tenemos que:

$$-0.4 = \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{r}$$

$$-0.4 = \frac{1}{2r^2} - \frac{2r}{2r^2}$$

$$-0.4 = \frac{1 - 2r}{2r^2}$$

$$-0.4(2r^2) = 1 - 2r$$

$$-0.8r^2 = 1 - 2r$$

$$-0.8r^2 + 2r - 1 = 0$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(-0.8)(-1)}}{2(-0.8)}$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 3.2}}{-1.6} = \frac{-2 \pm \sqrt{0.8}}{-1.6} = \frac{-2 \pm 0.9}{-1.6} = \begin{cases} r_1 \approx 1.8 \\ r_2 \approx 0.7 \end{cases}$$

Y sabemos que en esos dos puntos la velocidad $\dot{r} = 0$. Sin embargo ¿qué sucede entre esos dos puntos? Por ejemplo, en $r = 1$. En primer lugar recordemos que la energía del sistema, de la partícula, la hemos definido como -0.4 y es constante.

También sabemos que en ese punto ($r = 1$), aprovechamos el caso que vimos antes, la energía potencial era de -0.5. Luego en nuestra expresión unidimensional tendremos que:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

$$-0.4 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + (-0.5)$$

$$-0.4 + 0.5 = \frac{1}{2}(1)\dot{r}^2$$

$$2 \cdot (0.1) = \dot{r}^2$$

$$0.2 = \dot{r}^2$$

$$\sqrt{0.2} = \dot{r}$$

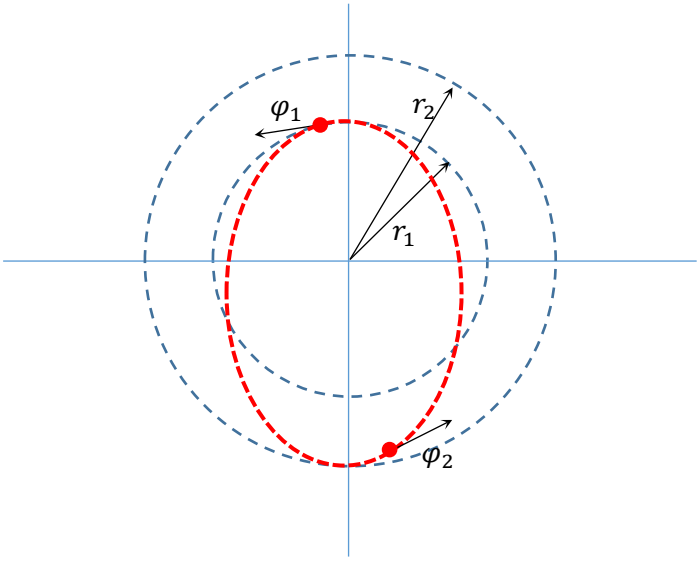
$$\dot{r} \approx 0.4$$

Es decir, que entre los dos puntos r_1 y r_2 tendria, ciertamente, como era de esperar, una cierta velocidad diferente de cero.

Saltemos ahora al escenario 3d. Retomemos la expresión, de nuevo, en función de r y φ:

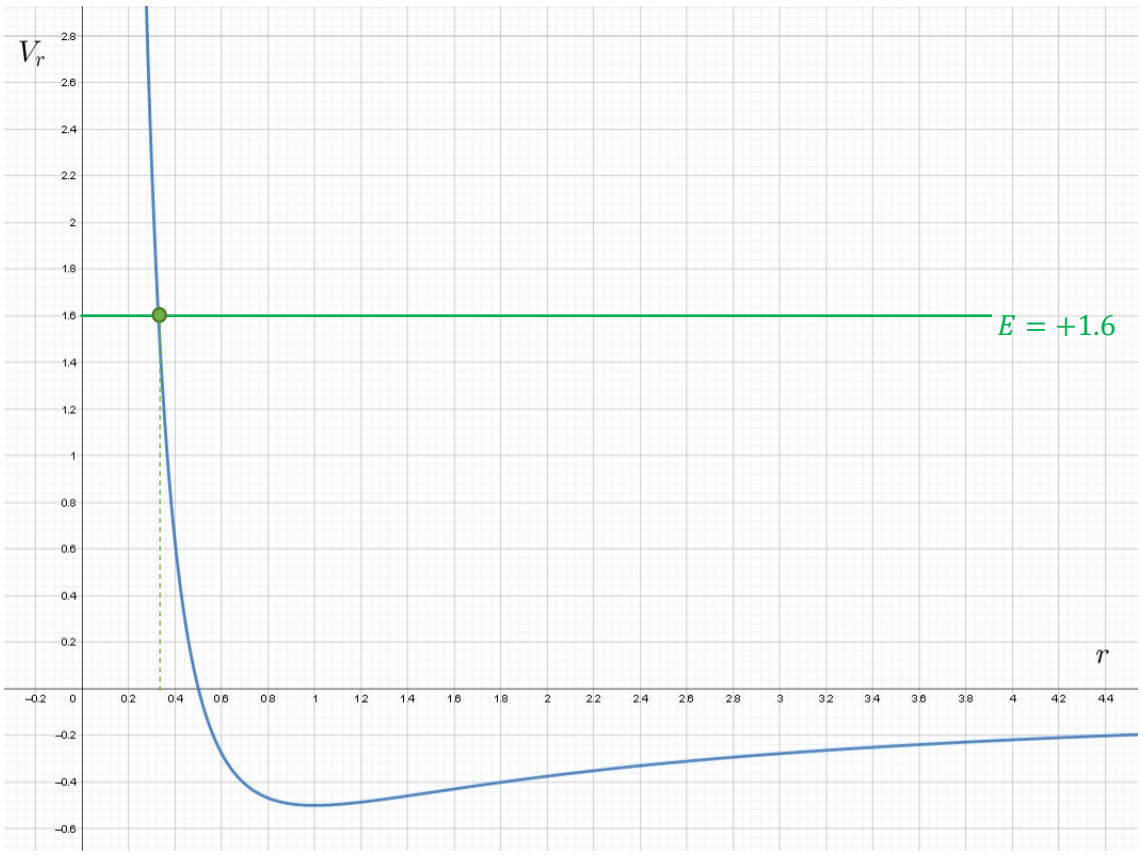
$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{GMm}{r}$$

Aquí, puesto que podremos sustituir con dos valores de r diferentes, tendremos velocidades angulares diferentes en un escenario como el siguiente:



Que, efectivamente, coindice perfectamente con la una órbita elíptica excéntrica como la que tienen los planetas en nuestro sistema solar (y cualquier otro) en la que la velocidad angular de los cuerpos que orbitan es diferente según la distancia a la que esté del foco: más cerca/más rápido y más lejos/más lento, tal y como predecían las leyes de Kepler.

Volvamos al escenario unidimensional para plantear una tercera y última posibilidad. Supongamos que la partícula tiene una Energía de +1.6 joules.



Vemos que la Energía de la partícula corta a la curva de la Energía Potencial sólo en un punto:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

$$1.6 = (0) + \frac{1^2}{2 \cdot 1 \cdot r^2} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{r}$$

$$1.6 = \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{r}$$

$$1.6 = \frac{1}{2r^2} - \frac{2r}{2r^2}$$

$$1.6 = \frac{1 - 2r}{2r^2}$$

$$1.6(2r^2) = 1 - 2r$$

$$3.2r^2 = 1 - 2r$$

$$3.2r^2 + 2r - 1 = 0$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(3.2)(-1)}}{2(3.2)} =$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12.8}}{6.4} = \; r = \frac{-2 \pm 4.1}{6.4} \begin{cases} r_1 \approx 0.95 \\ r_2 \approx 0.31 \end{cases}$$

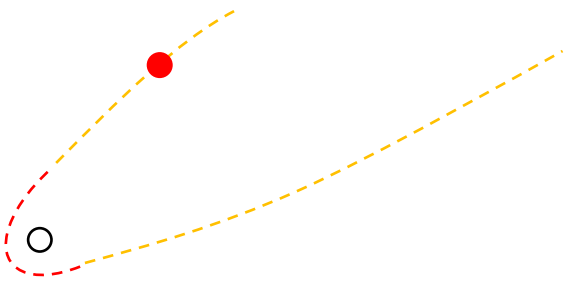
De aquí la solución que nos interesa es $r_2 \approx 0.31$. Podríamos extrañarnos de que haya otra solución $r_1 \approx 0.95$ pero, realmente, es que no hemos dibujado la gráfica en su totalidad. Sólo hemos dibujado la parte en que $r > 0$ pero en el lado 'izquierdo' del eje de coordenadas hay otra parte de gráfica que no nos interesa pero que, ciertamente, se ve cortada por nuestra línea de energía constante=1.6 joules.

Por el lado derecho es obvio que no vuelve a cortar a la curva de la energía potencial pues si estudiamos el límite cuando $r \to \infty$ de nuestra función vemos que nunca superará $V_{(r)} = 0$:

$$V_{(r\to\infty)} = \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{r} = \frac{1}{2\infty^2} - \frac{1}{\infty} \approx 0$$

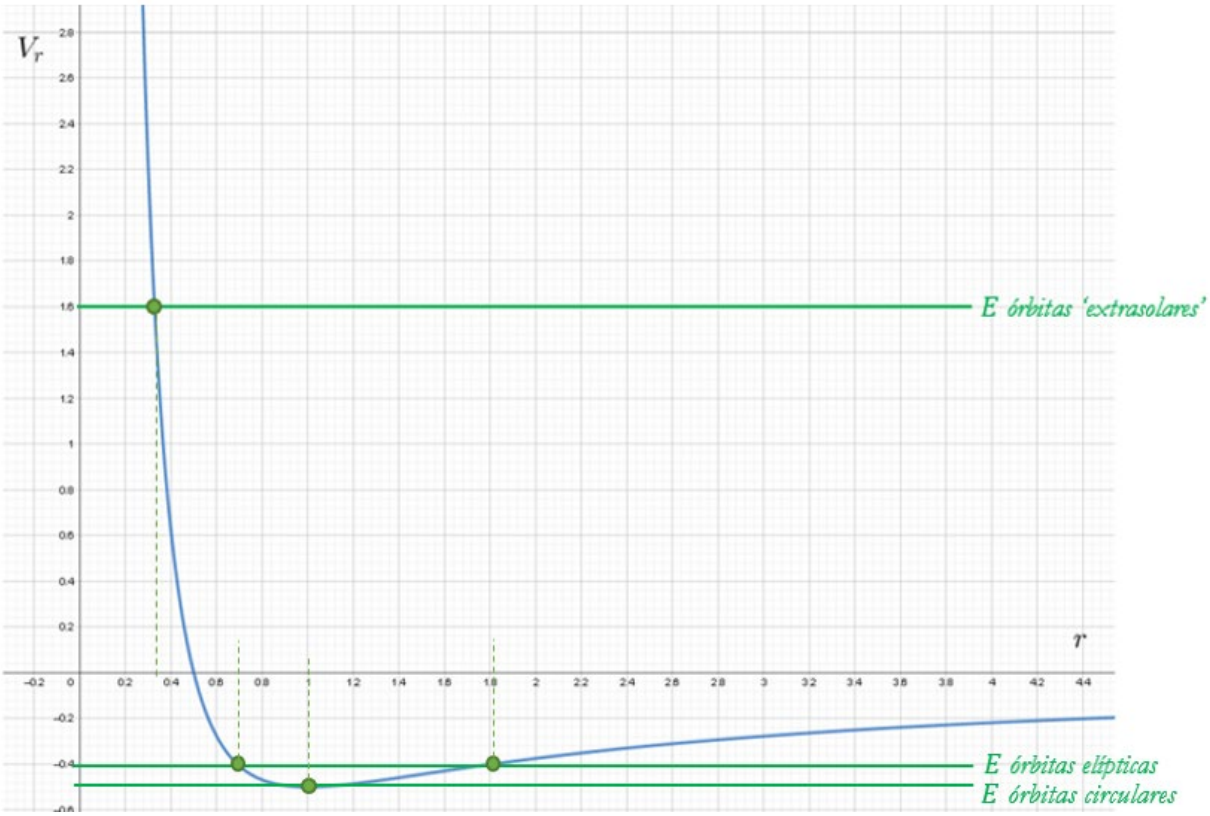
Supongamos que nuestra partícula, en nuestro escenario súper-reducido, unidimensional, 'viene de la derecha'. Mientras la línea de la energía constante 1.6 j de la partícula no se cruza con la línea de la curva de la energía potencial podemos afirmar que la partícula tiene velocidad. Como decimos: imaginemos que 'viene de la derecha', del infinito. Según se acerca al punto $r_2 \approx 0.31$, como vemos en la gráfica, al descender la energía potencial, necesariamente, para mantener constante la Energía total del sistema, la energía cinética deberá incrementarse y, como la masa es constante, esto implica que su velocidad crecerá, llegará al punto $r_2 \approx 0.31$, y 'rebotará hacia la izquierda' rápidamente volviendo a reducir paulatinamente su velocidad hasta equipararla a la velocidad con la que 'venía de la derecha'.

Esto traducido al espacio tridimensional implaría una órbita no estable típica de cuerpos celestes que vienen de fuera del sistema solar como, por ejemplo, un cometa:



Donde el cuerpo que orbita (el punto rojo: por ejemplo, un cometa) viene del 'infinito' (o sencillamente muy lejos) a una velocidad determinada (marcada con la línea discontinua naranja). Se acerca al foco de la órbita acelerando (línea descontinua roja) y vuelve a alejarse hacia 'el infinito' aproximando su velocidad, de nuevo, a la misma que traía.

Es decir, en el modelo definido por Newton tenemos ecuaciones que permiten conocer con muchísima precisión órbitas gravitacionales de todo tipo:



En ocasiones se puede caer en la tentación de hablar de la física clásica como un paradigma muy inferior al de la física relativista. Lo cierto es que Newton, como vemos, dio verdaderos pasos de gigante. Es cierto que, como ya hemos dicho, el paradigma relativista aporta una comprensión ontológica mucho más precisa de la naturaleza de conceptos como espacio, tiempo o gravedad. Sin embargo, en términos de cálculo, aunque la Teoría de la Relatividad también es más poderosa, no se debe menospreciar la física newtoniana pues como vemos (y veremos) la propia física relativista necesita en gran medida de los desarrollos elaborados por Isaac Newton. La física Relativista aporta, ciertamente, una mayor precisión de cálculo, pero, sobre todo, como decimos, una mayor comprensión ontológica, filosófica.

Hasta el momento, en el presente epígrafe, hemos hecho un acercamiento 'visual' a las propiedades de las órbitas de cuerpos celestes en torno a otros cuerpos de mayor masa empleando el paradigma newtoniano. Procedamos ahora a aportar una solución analítica de dichas ecuaciones clásicas. Vamos a realizar un cálculo exacto de las soluciones a las mismas y podremos ver la increíble precisión que ya alcanzó Isaac Newton y veremos cómo, de hecho, la física relativista se apoya en dichas soluciones analíticas para añadir algún 'matiz corrector' que las dota de mayor precisión.

Procedamos a dar una solución analítica a las ecuaciones de Newton que tenemos ya en coordenadas polares.

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{GMm}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}m\,\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$ (en función sólo de r)

$$L = mr^2\dot{\varphi}$$

Lo que vamos a hacer es calcular con total precisión el radio r que tendrá una órbita (la distancia del cuerpo que orbita al foco) según sea el ángulo φ que lleva recorrido en dicha órbita. En definitiva, conocer perfectamente las propiedades de la órbita. Es decir, vamos a encontrar una expresión del radio en función de φ: $r_{(\varphi)}$.

Nuestro objetivo va a ser, pues conocer cómo cambia el radio r según cambia $\varphi \rightarrow \frac{dr}{d\varphi}$

Para proceder, vamos a emplear algunos trucos matemáticos. En primer lugar, expresemos nuestras ecuaciones:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

$$L = mr^2 \dot{\varphi}$$

… del siguiente modo:

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

$$L = mr^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$$

Ahora, por otro lado, para arrimar el ascua a nuestra sardina, usando la regla de la cadena podemos expresar $\frac{dr}{d\varphi}$ como:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\varphi} \rightarrow \frac{dr}{dt}\ \frac{1}{d\varphi/dt}$$

Y si nos fijamos, podemos empezar a hacer cruces interesantes:

$$L = mr^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \rightarrow \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{L}{mr^2}$$

Luego podremos decir que:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{dt}\ \frac{1}{d\varphi/dt} \rightarrow \frac{dr}{dt}\ \frac{1}{\frac{L}{mr^2}} \rightarrow \frac{dr}{dt}\ \frac{mr^2}{L}$$

Y, ojo, porque aquí ya tenemos un resultado muy interesante:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{dt}\ \frac{mr^2}{L}$$

… ya que podemos expresar $\frac{dr}{dt}$, una expresión que está en nuestras ecuaciones, en función de $\frac{dr}{d\varphi}$, que es algo que queremos conocer. Así:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{L}{mr^2}\ \frac{dr}{d\varphi}$$

Entonces podemos sustituir en nuestras ecuaciones y tendremos que:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Y ahora podremos empezar a operar para tratar de despejar de alguna manera (adelantamos que va a ser mediante una ecuación diferencial) $\frac{dr}{d\varphi}$.

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}m\frac{L^2}{m^2r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

$$E = \frac{L^2}{2mr^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Seguimos con los truquitos matemáticos. Vemos que el radio r está siempre abajo dividiendo, cosa que s un poco incómoda. Para facilitarnos las cosas, podemos decir que:

$$u = \frac{1}{r} \qquad // \qquad r = \frac{1}{u}$$

Y, por lo tanto, si derivamos en base a u en ambos lados:

$$\frac{dr}{du} = \frac{-1}{u^2}$$

Y entonces podemos hacer:

$$E = \frac{L^2}{2mr^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

$$E = \frac{L^2}{2m}u^4\left(\frac{dr}{du}\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \frac{L^2}{2m}u^2 - GMm\,u$$

(OBSERVACIÓN. En color azul marcamos la aplicación de la regla de la cadena)

$$E = \frac{L^2}{2m}u^4\left(\frac{-1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \frac{L^2}{2m}u^2 - GMm\,u$$

$$E = \frac{L^2}{2m}u^4\left(\frac{1}{u^4}\frac{du^2}{d\varphi^2}\right) + \frac{L^2}{2m}u^2 - GMm\,u$$

$$E = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{du^2}{d\varphi^2}\right) + \frac{L^2}{2m}u^2 - GMm\,u$$

$$E = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \frac{L^2}{2m}u^2 - GMm\,u$$

Que empieza, efectivamente, una forma que permite ser resuelta mediante operaciones con Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, que es el camino que vamos a tomar[358]. Para ello vamos a hacer lo siguiente (otro truquito… nada como tener los manuales por delante): derivar toda la ecuación en función de φ:

$$\frac{d}{d\varphi}\left[E = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \frac{L^2}{2m}u^2 - GMm\,u\right]$$

Como sabemos que E es constante tenemos que:

[358] También se podría proceder así:

$$E = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \frac{L^2}{2m}u^2 - GMm\,u$$

$$E - \frac{L^2}{2m}u^2 + GMm\,u = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2$$

$$\frac{2m}{L^2}\left(E - \frac{L^2}{2m}u^2 + GMm\,u\right) = \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2$$

$$\frac{du}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2m}{L^2}\left(E - \frac{L^2}{2m}u^2 + GMm\,u\right)}$$

$$\frac{du}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2m}{L^2}\left(E - \frac{L^2}{2m}u^2 + GMm\,u\right)}$$

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2m}{L^2}\left(E - \frac{L^2}{2m}u^2 + GMm\,u\right)}}$$

$$d\varphi = \frac{1}{\sqrt{\frac{2m}{L^2}\left(E - \frac{L^2}{2m}u^2 + GMm\,u\right)}}du$$

E integramos en ambos lados:

$$\int d\varphi = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2m}{L^2}\left(E - \frac{L^2}{2m}u^2 + GMm\,u\right)}}du$$

$$\varphi = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2m}{L^2}\left(E - \frac{L^2}{2m}u^2 + GMm\,u\right)}}du$$

Pero vamos, a mí, ahora mismo, que hace ya un año o así que hice el Apéndice de Cálculo y que tengo las integrales un poco oxidadas, esta integral me da hasta miedo, así que vamos a tirar por el otro lado: el de la ecuación diferencial.

$$0 = \frac{d}{d\varphi}\left[\frac{L^2}{2m}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \frac{L^2}{2m}u^2 - GMm\,u\right]$$

Y si seguimos derivando y aplicando la regla de la cadena obtenemos que[359]:

$$0 = \frac{L^2}{2m}2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \frac{L^2}{2m}2u\frac{du}{d\varphi} - GMm\,1\frac{du}{d\varphi}$$

$$0 = \frac{L^2}{m}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \frac{L^2}{m}u\left(\frac{du}{d\varphi}\right) - GMm\left(\frac{du}{d\varphi}\right)$$

Podemos sacar $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)$ como factor común:

$$0 = \left[\frac{L^2}{m}\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \frac{L^2}{m}u - GMm\right]\left(\frac{du}{d\varphi}\right)$$

Y esto es muy interesante puesto que como estamos postulando que el radio φ cambia según cambia φ, podemos afirmar que:

$$\frac{du}{d\varphi} \neq 0$$

(OBSERVACIÓN. Recordemos que $u = \frac{1}{r}$*)*

Luego para que la igualdad propuesta se cumpla:

$$0 = \left[\frac{L^2}{m}\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \frac{L^2}{m}u - GMm\right]\left(\frac{du}{d\varphi}\right)$$

Es necesario que:

$$\left[\frac{L^2}{m}\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \frac{L^2}{m}u - GMm\right] = 0$$

Y ya tenemos nuestra ecuación diferencial con la forma:

$$\frac{L^2}{m}\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \frac{L^2}{m}u = GMm$$

---

[359] Hemos marcado en rojo todas las reglas de la cadena. Observemos la primera:

- $\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2$ es la derivada de 'la función global' (lo que hay en el paréntesis) por la derivada de lo que hay dentro del paréntesis que, en este caso, al ser una derivada, se convierte en una derivada segunda:

$$2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)\frac{d^2u}{d\varphi^2}$$

- $\frac{d}{d\varphi}u^2$ hacemos lo mismo, la 'derivada externa' por la 'derivada interna':

$$2u\frac{du}{d\varphi}$$

- $\frac{d}{d\varphi}$ hacemos lo mismo, la 'derivada externa' por la 'derivada interna':

$$1\frac{du}{d\varphi}$$

$$\frac{L^2}{m}\left[\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u\right]=GMm$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{GMm^2}{L^2}$$

Es decir:

$$f_{(\varphi)}{}'' + f_{(\varphi)} = K$$

Que es una ecuación diferencial muy fácil. Para resolverla, recordemos[360], bastaría con resolver la Ecuación Homogénea:

$$f_{(\varphi)}{}'' + f_{(\varphi)} = 0$$

Y, después, sumarle la constante K que, en nuestro caso, es: $\frac{GMm^2}{L^2}$

Si nos fijamos, ciertamente, tiene muy fácil solución a simple vista:

$$f_{(\varphi)}{}'' + f_{(\varphi)} = 0$$

$$f_{(\varphi)}{}'' = -f_{(\varphi)}$$

Es decir, una función $f_{(\varphi)}$ que, tras ser derivada dos veces (por supuesto, en base a φ), arroja como resultado la misma función $f_{(\varphi)}$ pero cambiada de signo… esto suena a coseno…

Supongamos que:

$$f_{(\varphi)} = A\,cos(B\varphi)$$

$$f_{(\varphi)}{}' = -AB\,cos(B\varphi)$$ [361]

$$f_{(\varphi)}{}'' = -AB^2\,cos(B\varphi)$$

Si sustituimos en $f_{(\varphi)}{}'' = -f_{(\varphi)}$:

$$-AB^2\,cos(B\varphi) = -[A\,cos(B\varphi)]$$

Vemos que esta igualdad sólo se cumple cuando:

$$B^2 = \frac{-A\,cos(B\varphi)}{-A\,cos(B\varphi)}$$

$$B^2 = 1$$

$$B = \pm 1$$

Nos quedaremos sólo con la solución positiva ya que lo único que implica el cambio de signo es un cambio de sentido en la trayectoria de la órbita.

---

[360] Véase Apéndice I. Acerca del Cálculo Diferencia e Integral o, en este mismo texto, la nota xxx.

[361] La B marcada en color rojo es el resultado de aplicar la regla de la cadena al 'interior' de la función $cos(B\varphi)$.

Así, ya tenemos la solución a nuestra Ecuación Diferencial Homogénea: una función:

$$f_{(\varphi)} = A\,cos(\varphi)$$

… a la que, como dijimos, para terminar, habremos de sumarle la constante inicial que teníamos:

$$K = \frac{GMm^2}{L^2}$$

Es decir, que ya hemos terminado de despejar nuestra Ecuación Diferencial: $\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2}$ y, por lo tanto, ya tenemos nuestra función $f_{(\varphi)}$ (realmente, en nuestro caso la habíamos llamado: u):

$$f_{(\varphi)} = K + A\,cos(\varphi)$$

Recordemos también que habíamos definido:

$$u = \frac{1}{r}$$

Luego:

$$r = \frac{1}{u}$$

Es decir, que:

$$r_{(\varphi)} = \frac{1}{K + A\,cos(\varphi)}$$

$$r_{(\varphi)} = \frac{1}{\frac{GMm^2}{L^2} + A\,cos(\varphi)}$$

En esta expresión, tanto $\frac{GMm^2}{L^2}$ como A, son constantes… hagamos un apaño matemático que nos va a simplificar las cosas: saquemos, en el denominador, $\frac{GMm^2}{L^2}$ como factor común:

$$r_{(\varphi)} = \frac{1}{\frac{GMm^2}{L^2}\left[1 + \frac{A}{\frac{GMm^2}{L^2}}cos(\varphi)\right]}$$

Donde, naturalmente, $\frac{A}{\frac{GMm^2}{L^2}}$ es, también, una constante (constante dividida por constante) a la que, para simplificar, llamaremos ε y corresponde a la excentricidad de la órbita:

$$r_{(\varphi)} = \frac{1}{\frac{GMm^2}{L^2}[1 + \varepsilon\,cos(\varphi)]}$$

$$r_{(\varphi)} = \frac{L^2}{GMm^2[1 + \varepsilon\,cos(\varphi)]}$$

Si, para facilitar las cosas, igualásemos todas las constates a 1 (como ya hemos en anteriores ocasiones) observaremos que se describen órbitas, según vayamos cambiando los valores, circulares (excentricidad igual a cero) y elípticas (excentricidades $0 < \varepsilon > 1$) cada vez más alargadas hasta, incluso, llegar a 'romper' el modelo y presentar órbitas hiperbólicas (cuando la excentricidad supera a 1) (se puede probar con cualquier software de representación de funciones).

Y esto es una solución exacta, diferencial (Newton ya trabajaba con diferenciales), para la relación entre el radio y el ángulo phi que nos caracteriza con exactitud la órbita de 'casi' cualquier cuerpo celeste.

¿Por qué decimos 'casi'? Porque es válida para cualquier cuerpo celeste que orbite a una distancia no demasiado cercana a, por ejemplo, nuestro sol. Como sabemos, con las leyes de Newton, se podían (y aún se pueden) caracterizar (con una precisión prácticamente exacta) las órbitas de todos los planetas de nuestro sistema solar… excepto la de Mercurio, cuya precesión presentaba algunas distorsiones no explicables por las leyes de Newton. Justamente, como sabemos, la Teoría de la Relatividad da solución a dicho problema.

¿Por qué hemos desarrollado esta exposición de las ecuaciones de Newton? Porque con las ecuaciones Relativistas nos vamos a encontrar con un problema: no existe solución analítica. Así, lo que actualmente se hace para poner cuerpos en órbita, es usar, de hecho, las soluciones de Newton y añadirle unas pequeñas 'correcciones' de carácter Relativista. Es decir, las ecuaciones de Newton podemos 'despejarlas' hasta encontrar una relación exacta entre el radio y el ángulo phi de la órbita. Pero en el caso relativista dicha solución analítica no existe, sino que, como decimos, para poner un objeto en órbitas precisas se usará Newton y se le añadirán pequeñas correcciones que acoplen el modelo al paradigma relativista.

-2.13-

Órbitas de Schwarzschild

Previamente, y con el fin, por un lado, de hacer converger este texto con la mayoría de los manuales de Física Relativista y, por otro, de facilitar los cálculos vamos a proceder una realizar una serie de ajustes en las unidades de los cálculos que venimos realizando para trabajar con expresiones adimensionales y en las que la velocidad de la luz es igual a 1. Esto, puesto que vamos a usar mucho la métrica de Schwarzschild, nos va a facilitar enormemente las cosas.

Recordemos la expresión de la Métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1-\frac{a}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta d\varphi^2$$

$$a = \frac{2GM}{c^2}$$

¿Qué unidades tiene a?

- 2: es un simple escalar y es adimensional.
- G: es la constante de gravitación universal y tiene las siguientes unidades:

$$G = 6.674\ \frac{N\cdot m^2}{Kg^2}$$

Donde un newton (N) es la unidad de fuerza en el Sistema Internacional de Unidades. Se define como la fuerza necesaria para proporcionar una aceleración de $1\,\frac{m}{s^2}$ a un objeto cuya masa es $1\,kg$. Es decir, es una unidad derivada del SI, que se compone de las unidades básicas:

$$N = \frac{Kg\cdot m}{s^2}$$

Luego:

$$G = \left(\frac{Kg \cdot m}{s^2}\right)\frac{m^2}{Kg^2}$$

Es decir que:

$$G = \frac{m^3}{Kg \cdot s^2}$$

Así, si:

$$a = \frac{2GM}{c^2}$$

¿Qué unidades tiene? Veámoslo:

$$a = \frac{m^3}{Kg \cdot s^2} \cdot \frac{M}{c^2} = \frac{m^3}{Kg \cdot s^2} \cdot \frac{Kg}{m^2/_{s^2}} = \frac{m^3}{Kg \cdot s^2} \cdot \frac{s^2 \cdot Kg}{m^2}$$

$$a = \frac{m^3 \cdot s^2 \cdot Kg}{m^2 \cdot s^2 \cdot Kg} = m$$

Es decir que a tiene unidades de metro, de distancia.

Sabiendo esto, podemos 'calibrar' nuestro modelo para obtener una métrica adimensional que facilitará las cosas (si bien, al final de nuestros cálculos, habrá que 'ponderar' los resultados para volver a dotarlos de dimensionalidad) y, además, nos permitirá trabajar con una velocidad de la luz igual a 1. Veamos cómo.

Recordemos que estamos trabajando, generalmente, con coordenadas esféricas. Así:

- El radio r lo medimos en metros. Pero si lo expresamos de la siguiente manera:

  $$\hat{r} = \frac{r}{a}$$

  Implica, si miramos las unidades, que:

  $$\hat{r} = \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}}$$

  es decir, $\hat{r}$ es adimensional, cosa que nos va a ser muy útil para ahorrar cálculos.

- El tiempo t, recordemos, también lo tenemos en metros pues lo medimos como ct:

  $$ct = \frac{m}{s} \cdot s = m$$

  Luego si llamamos:

  $$\hat{t} = \frac{ct}{a} \rightarrow \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}}$$

  Es decir, tenemos también un tiempo adimensional.

- Lo mismo sucede con el tiempo propio:

$$\hat{t} = \frac{c\tau}{a} \rightarrow \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}}$$

Ahora echemos, de nuevo, un vistazo a la Métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta d\varphi^2$$

Recordemos que el tiempo propio se podía expresar como:

$$ds^2 = -c^2d\tau^2$$

Así, la métrica puede expresarse como:

$$-c^2d\tau^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta d\varphi^2$$

Y ahora, para poder usar las transformaciones adimensionales que hemos hecho, si dividimos todo por a^2:

$$\frac{-c^2d\tau^2}{a^2} = \frac{-\left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta d\varphi^2}{a^2}$$

Nos queda una métrica como la siguiente:

$$-d\hat{\tau}^2 = -\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)d\hat{t}^2 + \left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1}d\hat{r}^2 + \hat{r}^2d\theta^2 + \hat{r}^2sin^2\theta d\varphi^2 \quad [362]$$

$$d\hat{\tau}^2 = \left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)d\hat{t}^2 - \left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1}d\hat{r}^2 - \hat{r}^2d\theta^2 - \hat{r}^2sin^2\theta d\varphi^2$$

---

[362] Véase la transformación que hemos hecho en el término marcado en color rojo. Era:

$$\frac{a}{r}$$

Pero hemos definido:

$$\hat{r} = \frac{r}{a}$$

Como:

$$\frac{a}{r}$$

Puede expresarse como:

$$\frac{1}{r/a} \rightarrow \frac{1}{\hat{r}}$$

Definitivamente podemos expresar:

$$\frac{a}{r} \rightarrow \frac{1}{\hat{r}}$$

Métrica mucho más manejable, en la que no aparece ya ni a, ni c, etc… y, además, es adimensional.

Si, además, constreñimos nuestro estudio a un plano ecuatorial en el que $\theta = \frac{\pi}{2}$, el asunto se simplifica, como sabemos, aún más:

$$d\hat{\tau}^2 = \left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right) d\hat{t}^2 - \left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1} d\hat{r}^2 - \hat{r}^2 d\varphi^2$$

Esto suele aparecer en los manuales así, diciendo que $c = 1$. Realmente se han hecho las transformaciones (dividir por a) y ya está pero el problema es que habitualmente, por no ensuciar mucho el texto no se suelen poner los 'gorritos' sobre las letras. Sin embargo, aunque no aparezcan los 'gorritos' ya podemos saber que estamos trabajando con la métrica adimensional si, efectivamente, observamos que no aparecen ni las a, ni las c, etc…:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{1}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\varphi^2$$

Por supuesto, si tras realizar nuestros cálculos con esta métrica obtenemos, por ejemplo, un radio $r = x$, hemos de ser conscientes de que lo que hemos obtenido es:

$$\hat{r} = x$$

Y puesto que:

$$\hat{r} = \frac{r}{a}$$

Entonces, el radio r 'real' será:

$$\hat{r} \cdot a = r \rightarrow r = x \cdot a$$

O en el caso del tiempo, si:

$$\hat{t} = \frac{ct}{a}$$

Entonces:

$$t = \hat{t}\frac{a}{c}$$

Hecha esta introducción volvamos a estudiar las magnitudes constantes que estudiamos en el epígrafe anterior desde un punto de vista clásico: E y L.

En el caso del paradigma relativista, para encontrar estas magnitudes constantes podemos hacer, y de hecho ya hemos hecho, uso de los Vectores de Killing.

Así, como la Métrica de Schwarzschild, sin restricciones de $\theta = \frac{\pi}{2}$, es igual a:

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 sin^2\theta d\varphi^2$$

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

Donde, justamente, la parte que hemos marcado en color rojo es la parte ' que se encarga de gestionar las rotaciones' y es exactamente igual a las que calculamos para el espacio de Minkowski, podemos usar, efectivamente, los Vectores de Killing ya calculados al efecto, a saber[363]:

$$\vec{\xi}^{(rot.x)} = sin\,\varphi\, e_\theta + \frac{cos\,\theta\, cos\,\varphi}{sin\,\theta} e_\varphi$$

$$\vec{\xi}^{(rot.y)} = cos\,\varphi\, e_\theta - \frac{cos\,\theta}{sin\,\theta} sin\,\varphi\, e_\varphi$$

$$\vec{\xi}^{(rot.z)} = e_\varphi$$

Pero como, efectivamente, estamos trabajando en un plano ecuatorial en el que $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\varphi^2$$

Que en nuestro modo adimensional expresamos como:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{1}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\varphi^2$$

Podemos prescindir de dos de los tres Vectores de Killing que hemos presentado, ya que nos sobran todos aquellos que tengan alguna componente fuera del plano, es decir, que tengan alguna componente en θ, ya que, por definición, no estaremos trabajando, nunca, fuera del plano. Así, el único Killing que nos queda es:

$$\vec{\xi}^{(rot.z)} = e_\varphi$$

Que en nuestro escenario $(ct, r, \varphi) \rightarrow (x^0, x^1, x^3)$ podemos denotar como (obviamos x^2 porque, como decimos, no vamos a trabajar con cambios en θ):

$$\vec{\xi}^{(rot.z)} = e_3$$

[363] Página 390 y ss.

Por otro lado, también sabemos que el espaciotiempo de Schwarzschild presenta simetría temporal, cosa que también verificamos al observar que en la métrica (en sus coeficientes) no hay ninguna dependencia temporal (marcamos en rojo los coeficientes):

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{1}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\varphi^2$$

Por ello, como decimos, tenemos otro Killing:

$$\underline{\xi}^{(temp)} = e_0$$

Es decir, tenemos dos Killings que, además, podemos intuir que cada uno de ellos nos llevará a las dos magnitudes conservadas que ya estudiamos en Newton:

$$\vec{\xi}^{(rot.z)} = e_3 \rightarrow L$$

$$\underline{\xi}^{(temp)} = e_0 \rightarrow E$$

Vamos a empezar estudiando la Conservación de la Energía. Recordemos para ello que ya definimos[364] que para partículas con masa podíamos afirmar que:

$$\underline{p} \cdot \underline{\xi} = constante$$

Es decir, que:

(OBSERVACIÓN. Momentáneamente, para esto, vamos a trabajar con la métrica con unidades del Sistema Internacional)

$$\underline{p} \cdot e_0 = -\frac{E}{c}$$

Que es lo mismo que decir:

$$m \cdot \underline{u} \cdot e_0 = -\frac{E}{c}$$

Donde $\underline{u}$ era la cuadrivelocidad, que podemos expresar como:

$$m \cdot \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau} e_\alpha\right) \cdot e_0 = -\frac{E}{c}$$

$$m \cdot \left(\frac{dx^0}{d\tau} e_0 + \frac{dx^1}{d\tau} e_1 + \frac{dx^3}{d\tau} e_3\right) \cdot e_0 = -\frac{E}{c} \quad [365]$$

De esto sólo sobrevive:

[364] Véase página 383.

[365] Nos saltamos $\frac{dx^2}{d\tau} e_2$ porque, como hemos dicho, trabajamos insertos en el plano ecuatorial.

$$m \cdot \frac{dx^0}{d\tau} e_0 \cdot e_0 = -\frac{E}{c}$$

Es decir:

$$m \cdot \frac{dx^0}{d\tau} g_{00} = -\frac{E}{c}$$

Que mirando en nuestra métrica (recordemos que hemos vuelto momentáneamente a la métrica con unidades dimensionales):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2 \theta d\varphi^2$$

Y siendo que:

$$x^0 \to ct$$

$$x^1 \to r$$

$$x^3 \to \varphi$$

Por lo que:

$$m \cdot \frac{dx^0}{d\tau} g_{00} = -\frac{E}{c} \to m \cdot \frac{c\, dt}{d\tau}\left[-\left(1 - \frac{a}{r}\right)\right] = -\frac{E}{c}$$

$$m \cdot \frac{c\, dt}{d\tau}\left(1 - \frac{a}{r}\right) = \frac{E}{c}$$

Despejamos $\frac{dt}{d\tau}$:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{mc^2\left(1 - \frac{a}{r}\right)}$$

Que es algo muy importante porque nos está dando la relación existente entre el tiempo externo y el tiempo propio y donde E es constante.

Desarrollemos ahora el otro Killing: $\vec{\xi}^{(rot.z)} = e_3 \to L$. Igualmente:

$$\underline{p} \cdot \underline{\xi} = constante$$

Es decir, que:

(OBSERVACIÓN. Seguimos trabajando con la métrica con unidades del Sistema Internacional)

$$\underline{p} \cdot e_3 = L$$

Que es lo mismo que decir:

$$m \cdot \underline{u} \cdot e_3 = L$$

$$m \cdot \left(\frac{dx^{\alpha}}{d\tau} e_{\alpha}\right) \cdot e_3 = L$$

$$m \cdot \left(\frac{dx^{0}}{d\tau} e_0 + \frac{dx^{1}}{d\tau} e_1 + \frac{dx^{3}}{d\tau} e_3\right) \cdot e_3 = L \quad [366]$$

De esto sólo sobrevive:

$$m \cdot \frac{dx^3}{d\tau} e_3 \cdot e_3 = L$$

Es decir:

$$m \cdot \frac{dx^3}{d\tau} g_{33} = L$$

Que mirando en nuestra métrica (recordemos que, para esto, habíamos vuelto momentáneamente a la métrica con unidades dimensionales):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^{\,2}\theta d\varphi^2$$

Y siendo que:

$$x^0 \to ct$$

$$x^1 \to r$$

$$x^3 \to \varphi$$

Por lo que:

$$m \cdot \frac{dx^3}{d\tau} g_{33} = L \to m \cdot \frac{d\varphi}{d\tau} [r^2 sin^{\,2}\theta] = L$$

$$m \cdot \frac{d\varphi}{d\tau} (r^2 sin^{\,2}\theta) = L$$

Despejamos $\frac{d\varphi}{d\tau}$:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{m(r^2 sin^{\,2}\theta)}$$

Pero, recordemos, estamos en el plano ecuatorial por lo que $sin^{\,2}\theta = sin^{\,2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, por lo que:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{mr^2}$$

Que también es algo muy importante porque nos está dando la relación existente entre el ángulo φ y el tiempo propio y donde L es constante.

---

[366] Nos saltamos $\frac{dx^2}{d\tau} e_2$ porque, como hemos dicho, trabajamos insertos en el plano ecuatorial.

Y ya tenemos las dos ecuaciones, relacionadas con las dos magnitudes E y L, que establecen las condiciones que debe cumplir cualquier partícula que se mueva en el espaciotiempo de Schwarzschild:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{mc^2\left(1-\frac{a}{r}\right)}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{mr^2}$$

Ahora, vamos a pasar estos resultados a nuestras unidades adimensionales. Para ello bastará hacer lo siguiente: puesto que:

$$\hat{t} = \frac{ct}{a} \rightarrow \hat{t}\frac{a}{c} = t \quad \text{y} \quad \hat{\tau} = \frac{c\tau}{a} \rightarrow \hat{\tau}\frac{a}{c} = \tau \quad \text{y} \quad \hat{r} = \frac{r}{a} \rightarrow \hat{r}\cdot a = r$$

Podemos despejar para el caso de la Energía E:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{mc^2\left(1-\frac{a}{r}\right)}$$

$$\frac{d\left(\hat{t}\frac{a}{c}\right)}{d\left(\hat{\tau}\frac{a}{c}\right)} = \frac{E}{mc^2\left(1-\frac{a}{\hat{r}\cdot a}\right)}$$

$$\frac{d\hat{t}}{d\hat{\tau}} = \frac{E}{mc^2\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)}$$

Donde, puesto que lo que marcamos en color rojo a continuación es adimensional:

$$\frac{d\hat{t}}{d\hat{\tau}} = \frac{E}{mc^2\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)}$$

Todo apunta a que la versión adimensional de la Energía es:

$$\hat{E} = \frac{E}{mc^2}$$

Por lo que podemos concluir que:

$$\frac{d\hat{t}}{d\hat{\tau}} = \frac{\hat{E}}{\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)}$$

Igualmente, para el caso del Momento Angular L:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\frac{d\varphi}{d\left(\hat{\tau}\frac{a}{c}\right)} = \frac{L}{m(\hat{r}a)^2}$$

$$\frac{1}{(a/c)}\frac{d\varphi}{d(\hat{\tau})} = \frac{1}{a^2}\frac{L}{m\hat{r}^2}$$

$$\frac{c}{a}\frac{d\varphi}{d(\hat{\tau})} = \frac{1}{a^2}\frac{L}{m\hat{r}^2}$$

$$\frac{d\varphi}{d\hat{\tau}} = \frac{1}{c\,a}\cdot\frac{L}{m\hat{r}^2}$$

$$\frac{d\varphi}{d\hat{\tau}} = \frac{L}{\hat{r}^2\,m\,c\,a}$$

Y sucediendo que lo que marcamos en color rojo es adimensional:

$$\frac{d\varphi}{d\hat{\tau}} = \frac{L}{\hat{r}^2\,m\,c\,a}$$

Todo apunta a que la expresión adimensional de L debe ser:

$$\hat{L} = \frac{L}{m\,c\,a}$$

Por lo que:

$$\frac{d\varphi}{d\hat{\tau}} = \frac{\hat{L}}{\hat{r}^2}$$

Finalmente, ya tenemos tanto nuestra métrica como nuestras magnitudes a conservar en su versión adimensional:

$$d\hat{\tau}^2 = \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)d\hat{t}^2 - \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1}d\hat{r}^2 - \hat{r}^2 d\varphi^2$$

$$\frac{d\hat{t}}{d\hat{\tau}} = \frac{\hat{E}}{\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)}$$

$$\frac{d\varphi}{d\hat{\tau}} = \frac{\hat{L}}{\hat{r}^2}$$

Y ahora, empecemos a trabajar del mismo modo en que lo hicimos en el paradigma de Newton en el epígrafe anterior a la hora de estudiar las órbitas de los cuerpos celestes. Vamos

a tratar de encontrar una expresión para la Energía desde el punto de vista relativista y vamos a ver si es comparable, si se parece, a la que ya tenemos de Newton.

Para comenzar tomemos la métrica adimensional y dividámosla en su totalidad por $d\hat{\tau}^2$ para dejar el término izquierdo como 1 y, además, acercar el escenario a un estado que nos interesa mucho según las ecuaciones que ya tenemos:

$$\frac{d\hat{\tau}^2}{d\hat{\tau}^2} = \frac{\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)d\hat{t}^2 - \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1}d\hat{r}^2 - \hat{r}^2 d\varphi^2}{d\hat{\tau}^2}$$

$$1 = \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)\frac{d\hat{t}^2}{d\hat{\tau}^2} - \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1}\frac{d\hat{r}^2}{d\hat{\tau}^2} - \hat{r}^2\frac{d\varphi^2}{d\hat{\tau}^2}$$

$$1 = \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)\left(\frac{d\hat{t}}{d\hat{\tau}}\right)^2 - \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1}\left(\frac{d\hat{r}}{d\hat{\tau}}\right)^2 - \hat{r}^2\left(\frac{d\varphi}{d\hat{\tau}}\right)^2$$

Donde, efectivamente, lo marcado en color rojo es algo que ya tenemos:

$$\frac{d\hat{t}}{d\hat{\tau}} = \frac{\hat{E}}{\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)}$$

$$\frac{d\varphi}{d\hat{\tau}} = \frac{\hat{L}}{\hat{r}^2}$$

Por lo que podemos sustituir:

$$1 = \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)\left(\frac{\hat{E}}{\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)}\right)^2 - \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1}\left(\frac{d\hat{r}}{d\hat{\tau}}\right)^2 - \hat{r}^2\left(\frac{\hat{L}}{\hat{r}^2}\right)^2$$

Y simplificar:

$$1 = \frac{\hat{E}^2}{\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)} - \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2} - \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1}\left(\frac{d\hat{r}}{d\hat{\tau}}\right)^2$$

Si ahora, para tener una expresión más cómoda, multiplicamos todo por $\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)$:

$$\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right) = \hat{E}^2 - \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2}\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right) - \left(\frac{d\hat{r}}{d\hat{\tau}}\right)^2$$

Y despejamos $\hat{E}^2$:

$$\hat{E}^2 = \left(\frac{d\hat{r}}{d\hat{\tau}}\right)^2 + \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2}\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right) + \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)$$

Sacamos, en los términos marcados en color rojo, $\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)$ como factor común:

$$\hat{E}^2 = \left(\frac{d\hat{r}}{d\hat{\tau}}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)\left[1+\frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2}\right]$$

Desarrollamos el producto:

$$\hat{E}^2 = \left(\frac{d\hat{r}}{d\hat{t}}\right)^2 + 1 + \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}} - \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^3}$$

Y, finalmente, vamos a ordenar un poco para poder comparar con nuestra expresión newtoniana para la Energía:

$$\hat{E}^2 - 1 = \left(\frac{d\hat{r}}{d\hat{t}}\right)^2 + \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}} - \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^3}$$

Es obvio que en la izquierda tenemos una constante $\hat{E}^2$ restada por otra constante (1) por lo que, en definitiva, tenemos un elemento relacionado con la Energía (de hecho es energía, aunque de momento, adimensional) que es constante. Vamos a llamar al conjunto, por ejemplo, $'Energía'$. Así tenemos que:

$$Energía = \left(\frac{d\hat{r}}{d\hat{t}}\right)^2 + \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}} - \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^3}$$

Ahora recordemos nuestra expresión newtoniana para poder comparar[367]:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Las vamos a poner juntas y vamos a relacionarlas mediante colores:

$$E_{relativista} = \left(\frac{d\hat{r}}{d\hat{t}}\right)^2 + \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}} - \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^3}$$

$$E_{newtoniana} = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Y, efectivamente, vemos que hay un claro paralelismo entre ambas expresiones:

- En rojo algún tipo de 'velocidad' al cuadrado que podríamos identificar con una suerte de energía cinética.
- En azul y verde, en el caso newtoniano, tenemos algo dividido por el radio al cuadrado y algo dividido por el radio. Y a esto lo habíamos llamado potencial ($V_{(r)}$): Energía Potencial. En la expresión relativista tenemos algo francamente parecido, pero… como vemos, se ha añadido un término nuevo que hemos marcado en naranja:

$$\frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^3}$$

Un término nuevo que 'introduce correcciones a la Energía Potencial newtoniana' y que dará explicación a las precesiones de las órbitas de los planetas y a aquellos fenómenos orbitales que eran inexplicables desde la teoría clásica de la gravitación.

[367] Véase página 570.

Antes de estudiar las consecuencias de esta nueva expresión para la Energía Potencial desde un punto de vista gráfico (al igual que hicimos con Newton) vamos a tratar de ver la relación analítica que existe entre el radio r y el ángulo φ de la órbita y, así, poder caracterizar de manera analítica (de nuevo, tal y como hicimos en Newton), las órbitas de Schwarzschild aunque, tal y como dijimos, la solución a esta cuestión no es tan simple como en el caso anterior.

Para empezar hagamos una serie de transformaciones aplicando la regla de la cadena que nos van a ayudar en nuestra búsqueda de una Ecuación Diferencial que nos muestre la relación existente entre el radio r y el ángulo φ en una Órbita de Schwarzschild. Así:

$$\frac{d\hat{r}}{d\hat{\tau}} = \frac{d\hat{r}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\hat{\tau}}$$

En primer lugar, observamos que ya tenemos ahí un término interesantísimo para nuestra búsqueda de $r_{(\varphi)}$: $\frac{d\hat{r}}{d\varphi}$. En segundo lugar, hay término que ya conocemos:

$$\frac{d\varphi}{d\hat{\tau}} = \frac{\hat{L}}{\hat{r}^2}$$

Luego:

$$\frac{d\hat{r}}{d\hat{\tau}} = \frac{d\hat{r}}{d\varphi}\frac{\hat{L}}{\hat{r}^2}$$

También, al igual que hicimos en Newton, usemos la siguiente convención para facilitar las cosas:

$$\hat{u} = \frac{1}{\hat{r}}$$

De donde podemos extraer que:

$$\frac{d}{d\hat{r}}\hat{u} = \frac{1}{\hat{r}}\frac{d}{d\hat{r}} \rightarrow \frac{d\hat{u}}{d\hat{r}} = -\frac{1}{\hat{r}^2}$$

Que por las propiedades de las derivadas también implica que:

$$\frac{d\hat{r}}{d\hat{u}} = -\hat{r}^2$$

Dicho esto, si volvemos a:

$$\frac{d\hat{r}}{d\hat{\tau}} = \frac{\hat{L}}{\hat{r}^2}\frac{d\hat{r}}{d\varphi}$$

Y le aplicamos la regla de la cadena, podemos decir que:

$$\frac{d\hat{r}}{d\hat{\tau}} = \frac{\hat{L}}{\hat{r}^2}\frac{d\hat{r}}{d\hat{u}}\frac{d\hat{u}}{d\varphi}$$

Donde es posible sustituir aquello que está marcado en color rojo:

$$\frac{d\hat{r}}{d\hat{\tau}} = \frac{\hat{L}}{\hat{r}^2}(-\hat{r}^2)\frac{d\hat{u}}{d\varphi}$$

Es decir que:

$$\frac{d\hat{r}}{d\hat{\tau}} = -\hat{L}\frac{d\hat{u}}{d\varphi}$$

Ahora sustituyamos esta expresión en nuestra expresión relativista para la Energía:

$$E_{relativista} = \left(\frac{d\hat{r}}{d\hat{\tau}}\right)^2 + \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}} - \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^3}$$

$$E_{rel} = \left(-\hat{L}\frac{d\hat{u}}{d\varphi}\right)^2 + \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}} - \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^3}$$

$$E_{rel} = \hat{L}^2\left(\frac{d\hat{u}}{d\varphi}\right)^2 + \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}} - \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^3}$$

Para evitar tener $\hat{r}$ en el denominador, recordemos que hemos dicho que convenimos que:

$$\hat{u} = \frac{1}{\hat{r}}$$

Así que podemos reescribir nuestra expresión como:

$$E_{rel} = \hat{L}^2\left(\frac{d\hat{u}}{d\varphi}\right)^2 + \hat{L}^2\hat{u}^2 - \hat{u} - \hat{L}^2\hat{u}^3$$

Y ahora, tal y como hicimos en el caso de Newton, vamos a aplicarle el operador $\frac{d}{d\varphi}$ a toda la expresión:

$$\left[E_{rel} = \hat{L}^2\left(\frac{d\hat{u}}{d\varphi}\right)^2 + \hat{L}^2\hat{u}^2 - \hat{u} - \hat{L}^2\hat{u}^3\right]\frac{d}{d\varphi}$$

Como sabemos que:

$$E_{rel} = \hat{E}^2 - 1 \rightarrow es\ constante$$

Podemos decir que:

$$0 = \left[E_{rel} = \hat{L}^2\left(\frac{d\hat{u}}{d\varphi}\right)^2 + \hat{L}^2\hat{u}^2 - \hat{u} - \hat{L}^2\hat{u}^3\right]\frac{d}{d\varphi}$$

Y, ahora, derivando el lado derecho (aplicando, por supuesto, la regla de la cadena (la marcamos en rojo):

$$0 = \hat{L}^2 2\frac{d\hat{u}}{d\varphi}\cdot\frac{d^2\hat{u}}{d\varphi^2} + \hat{L}^2 2\hat{u}\frac{d\hat{u}}{d\varphi} - 1\frac{d\hat{u}}{d\varphi} - \hat{L}^2 3\hat{u}^2\frac{d\hat{u}}{d\varphi}$$

Podemos sacar $\frac{d\hat{u}}{d\varphi}$ como factor común:

$$0 = \left[\hat{L}^2 2 \cdot \frac{d^2\hat{u}}{d\varphi^2} + \hat{L}^2 2\hat{u} - 1 - \hat{L}^2 3\hat{u}^2\right]\frac{d\hat{u}}{d\varphi}$$

Y puesto que podemos suponer perfectamente que la órbita no va a ser circular, podemos afirmar que el radio va a cambiar según cambie el ángulo φ por lo que, necesariamente:

$$\frac{d\hat{u}}{d\varphi} \neq 0$$

Así, para que nuestra igualdad se cumpla:

$$0 = \left[\hat{L}^2 2 \cdot \frac{d^2\hat{u}}{d\varphi^2} + \hat{L}^2 2\hat{u} - 1 - \hat{L}^2 3\hat{u}^2\right]\frac{d\hat{u}}{d\varphi}$$

Es necesario que se cumpla que:

$$\hat{L}^2 2 \cdot \frac{d^2\hat{u}}{d\varphi^2} + \hat{L}^2 2\hat{u} - 1 - \hat{L}^2 3\hat{u}^2 = 0$$

Para darle forma a nuestra Ecuación Diferencial vamos a despejar $\frac{d^2\hat{u}}{d\varphi^2}$:

$$\hat{L}^2 2 \cdot \frac{d^2\hat{u}}{d\varphi^2} = -\hat{L}^2 2\hat{u} + 1 + \hat{L}^2 3\hat{u}^2$$

$$\frac{d^2\hat{u}}{d\varphi^2} = \frac{-\hat{L}^2 2\hat{u} + 1 + \hat{L}^2 3\hat{u}^2}{2\hat{L}^2}$$

$$\frac{d^2\hat{u}}{d\varphi^2} = -\hat{u} + \frac{1}{2\hat{L}^2} + \frac{3\hat{u}^2}{2}$$

$$\frac{d^2\hat{u}}{d\varphi^2} + \hat{u} = \frac{1}{2\hat{L}^2} + \frac{3\hat{u}^2}{2}$$

Que empieza a tener aspecto de Ecuación Diferencial en toda regla… pero, como ya adelantamos, no de fácil solución…De hecho yo ahora mismo no soy capaz de resolverla… más adelante es posible que se incluya aquí un epígrafe tratando de solucionándola[368]. De momento nos vamos a conformar con el análisis gráfico que vamos a hacer a continuación.

---

[368] Obviamente estamos ante una expresión adimensional. Si quisiéramos pasarla a unidades del Sistema Internacional tan sólo habría que sustituir: $\hat{u} = \frac{1}{\hat{r}}$ donde $\hat{r} = \frac{r}{a}$, luego: $\hat{u} = \frac{1}{r/a} = \frac{a}{r}$ y puesto que $u = \frac{1}{r} \rightarrow r = \frac{1}{u}$, que, finalmente, nos arroja que: $\hat{u} = \frac{a}{r} = \frac{a}{1/u} = u \cdot a$

Por otro lado también sabemos que $\hat{L}$ es igual a: $\frac{L}{mac}$.

Luego:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}(ua) + (ua) = \frac{1}{2\left(\frac{L}{mac}\right)^2} + \frac{3(ua)^2}{2}$$

$$a\left[\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right] = \frac{1}{2}\frac{m^2a^2c^2}{L^2} + \frac{3}{2}u^2a^2$$

Para ello, recordemos nuestra expresión para la Energía Total Relativista:

$$E_{relativista} = \left(\frac{d\hat{r}}{d\hat{t}}\right)^2 + \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}} - \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^3}$$

En la que identificamos como potencial la parte resaltada en color azul:

$$V_{(r)} = \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}} - \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^3}$$

Vamos a estudiar el comportamiento gráfico de esta función $V_{(r)}$.

Sabemos que para conocer los máximos y mínimos de una función basta con calcular la derivada primera de la función e igualarla a cero:

$$V'_{(r)} = -2\frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^3} + \frac{1}{\hat{r}^2} + 3\frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^4} = 0$$

Para evitarnos tener que trabajar con tantos denominadores, multipliquemos toda la expresión por $\hat{r}^4$, así:

$$\left[-2\frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^3} + \frac{1}{\hat{r}^2} + 3\frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^4} = 0\right] \cdot \hat{r}^4$$

$$-2\hat{L}^2\hat{r} + \hat{r}^2 + 3\hat{L}^2 = 0$$

$$V'_{(r)} \rightarrow \hat{r}^2 - 2\hat{L}^2\hat{r} + 3\hat{L}^2 = 0$$

Que es una ecuación de segundo grado. Calculemos sus raíces y veamos cuando esta función, derivada primera, es igual a cero y, por lo tanto, veamos cuándo estamos ante un máximo o un mínimo (un cambio de crecimiento a decrecimiento o viceversa).

$$\hat{r} = \frac{2\hat{L}^2 \pm \sqrt{(2\hat{L}^2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3\hat{L}^2}}{2 \cdot 1} = \frac{2\hat{L}^2 \pm \sqrt{4\hat{L}^4 - 4\hat{L}^2 \cdot 3}}{2} =$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{2}\frac{m^2ac^2}{L^2} + \frac{3}{2}u^2a$$

Y puesto que $a = \frac{2GM}{c^2}$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{2}\frac{m^2 2GMc^2}{c^2L^2} + \frac{3}{2}u^2\frac{2GM}{c^2}$$

Que reordenando un poco se nos queda como:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2$$

Donde la parte que hemos marcado en color azul es exactamente igual a la Ecuación diferencial que teníamos para Newton y que pudimos resolver. Sin embargo, encontramos un nuevo término marcado en color rojo no dificulta mucho la tarea en esta ocasión.

$$\hat{r} = \frac{2\hat{L}^2 \pm 2\hat{L}\sqrt{\hat{L}^2 - 3}}{2} = \hat{L}^2 \pm \hat{L}\sqrt{\hat{L}^2 - 3} = \begin{cases} \hat{r}_1 = \hat{L}^2 + \hat{L}\sqrt{\hat{L}^2 - 3} \\ \\ \hat{r}_2 = \hat{L}^2 - \hat{L}\sqrt{\hat{L}^2 - 3} \end{cases}$$

Es decir, que en $\hat{r}_1$ y $\hat{r}_2$ tenemos o un máximo o un mínimo. Recordemos ahora que para saber si es máximo o mínimo tenemos que saber si crece o decrece a ambos lados de los puntos encontrados. Esto lo podíamos estudiar con la segunda derivada de manera que si la segunda derivada, evaluada en el punto, es negativa estaríamos ante un máximo y si es positiva ante un mínimo. Así si:

$$V'_{(r)} = -2\frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^3} + \frac{1}{\hat{r}^2} + 3\frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^4}$$

(OBSERVACIÓN. Obviamente no podemos usar la expresión ya igualada a cero y 'corregida' sin denominadores ya que hay un producto por cero que meteríamos ahí por la cara)

$$V''_{(r)} \to -2 \cdot (-3)\frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^4} - 2\frac{1}{\hat{r}^3} + 3 \cdot (-4)\frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^5}$$

$$V''_{(r)} \to -\frac{2}{\hat{r}^5}\left[-3\hat{L}^2\hat{r} + \hat{r}^2 + 6\hat{L}^2\right]$$

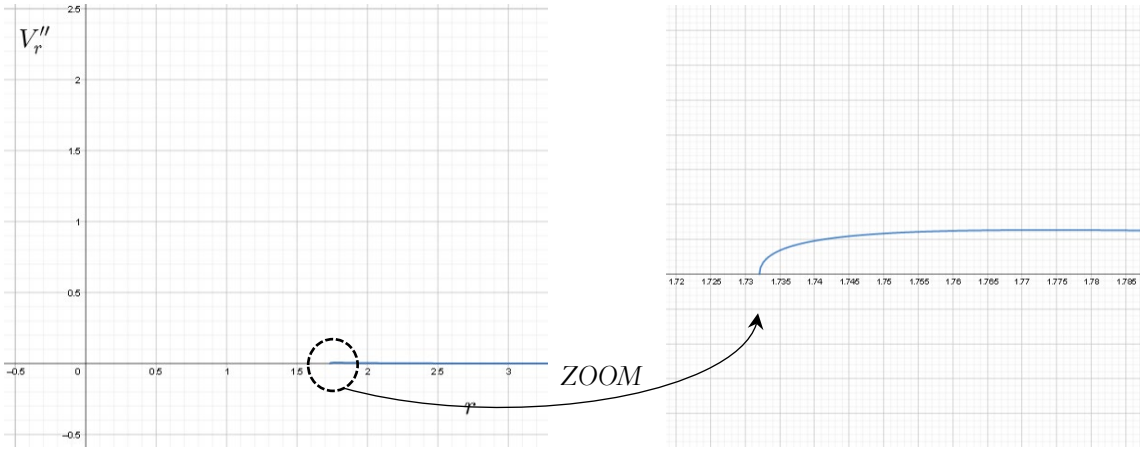
Que habría que evaluar en cada punto raíz. Así:

(OBSERVACIÓN. Nos interesan sólo los valores positivos de r en el sentido de que vamos a medir siempre, digamos, hacia el lado y vamos a considerar órbitas en sentido antihorario)

- Para: $\hat{r}_1 = \hat{L}^2 + \hat{L}\sqrt{\hat{L}^2 - 3}$

$$\frac{-2}{\left(\hat{L}^2 + \hat{L}\sqrt{\hat{L}^2 - 3}\right)^5}\left[-3\hat{L}^2\left(\hat{L}^2 + \hat{L}\sqrt{\hat{L}^2 - 3}\right) + \left(\hat{L}^2 + \hat{L}\sqrt{\hat{L}^2 - 3}\right)^2 + 6\hat{L}^2\right]$$ [369]

Gráficamente es:



[369] Para su representación gráfica lo introducimos en Wolfram Mathematica y Geogebra con el siguiente código:

```
(-2)/((x^(2) + x*(x^(2) - 3)^(1/2))^(5))*((-3*x^(2))*(x^(2) +
x*(x^(2) - 3)^(((1)/(2)))) + (x^(2) +
x*(x^(2) - 3)^(((1)/(2))))^(2) + (6*x^(2)))
```

Es decir, que es positivo (ya veremos por qué desde aprox. 1.73), luego $\hat{r}_1$ es un Mínimo. Además es positivo hasta el infinito, pues si evaluamos la derivada segunda cuando $\hat{L} \to \infty$, vemos que nunca bajará del cero:

$$\frac{-2}{\left(\hat{L}^2 + \hat{L}\sqrt{\hat{L}^2 - 3}\right)^5}\left[-3\hat{L}^2\left(\hat{L}^2 + \hat{L}\sqrt{\hat{L}^2 - 3}\right) + \left(\hat{L}^2 + \hat{L}\sqrt{\hat{L}^2 - 3}\right)^2 + 6\hat{L}^2\right]$$

$$\frac{-2}{\left(\hat{L}^2 + \hat{L}\sqrt{\hat{L}^2}\right)^5}\left[-3\hat{L}^2\left(\hat{L}^2 + \hat{L}\sqrt{\hat{L}^2}\right) + \left(\hat{L}^2 + \hat{L}\sqrt{\hat{L}^2}\right)^2 + 6\hat{L}^2\right] \quad [370]$$

$$\frac{-2}{\left(\hat{L}^2 + \hat{L}^2\right)^5}\left[-3\hat{L}^2\left(\hat{L}^2 + \hat{L}^2\right) + \left(\hat{L}^2 + \hat{L}^2\right)^2 + 6\hat{L}^2\right]$$

$$\frac{-2}{\left(2\hat{L}^2\right)^5}\left[-3\hat{L}^2\left(2\hat{L}^2\right) + \left(2\hat{L}^2\right)^2 + 6\hat{L}^2\right]$$

$$\frac{-2}{\left(2\hat{L}^2\right)^5}\left[-6\hat{L}^4 + 4\hat{L}^4 + 6\hat{L}^2\right]$$

$$\frac{-2}{\left(2\hat{L}^2\right)^5}\left[-2\hat{L}^4 + 6\hat{L}^2\right] \to \frac{2\hat{L}^4 - 6\hat{L}^2}{\left(\hat{L}^2\right)^5} \to \frac{2\hat{L}^4 - 6\hat{L}^2}{\hat{L}^{10}} \to \frac{2\hat{L}^2 - 6}{\hat{L}^8} \to \frac{2}{\hat{L}^6} \to 0$$

Es decir que:

$$\hat{r}_1 = \hat{L}^2 + \hat{L}\sqrt{\hat{L}^2 - 3} \to \hat{r}_{min}$$

Por otro lado:

- Para: $\hat{r}_2 = \hat{L}^2 - \hat{L}\sqrt{\hat{L}^2 - 3}$

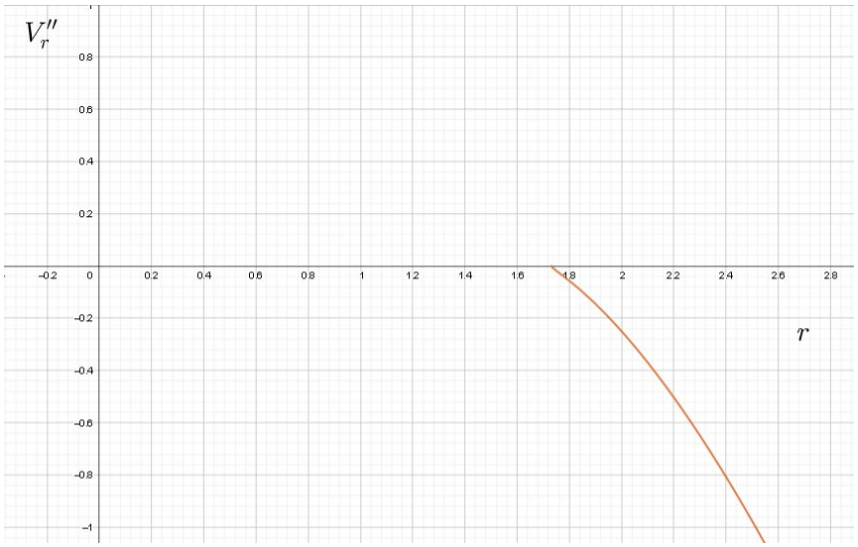
$$\frac{-2}{\left(\hat{L}^2 - \hat{L}\sqrt{\hat{L}^2 - 3}\right)^5}\left[-3\hat{L}^2\left(\hat{L}^2 - \hat{L}\sqrt{\hat{L}^2 - 3}\right) + \left(\hat{L}^2 - \hat{L}\sqrt{\hat{L}^2 - 3}\right)^2 + 6\hat{L}^2\right] \quad [371]$$

Que gráficamente es claramente negativo:

[370] La suma o resta de enteros es despreciable ante una $\hat{L} \to \infty$.

[371] Para su representación gráfica lo introducimos en Wolfram Mathematica y Geogebra con el siguiente código:

```
(-2)/((x^(2) - x*(x^(2) - 3)^(1/2))^(5))*((-3*x^(2))*(x^(2) -
x*(x^(2) - 3)^(((1)/(2)))) + (x^(2) -
x*(x^(2) - 3)^(((1)/(2))))^(2) + (6*x^(2)))
```



Luego $\hat{r}_2$ es un Máximo:

$$\hat{r}_1 = \hat{L}^2 - \hat{L}\sqrt{\hat{L}^2 - 3} \rightarrow \hat{r}_{MAX}$$

Así tenemos, en resumen:

$$\hat{r}_{MAX} = \hat{L}^2 - \hat{L}\sqrt{\hat{L}^2 - 3}$$

$$\hat{r}_{min} = \hat{L}^2 + \hat{L}\sqrt{\hat{L}^2 - 3}$$

Analicemos el gráfico. Hay una parte que no se dibuja en la gráfica pues:

- Cuando $\hat{L}^2 < 3$ tendríamos para $\hat{r}$ un valor imaginario y, por lo tanto, no es 'dibujable'.

Por otro lado:

- Cuando $\hat{L}^2 > 3$ ya vemos qué se dibuja.
- Cuando $\hat{L}^2 = 3$ también se dibuja y entonces, $\hat{r}$ es exactamente $\hat{L}^2$. Además, es un punto de inflexión, pues siendo nuestra expresión original:

$$V_{(r)} = \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}} - \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^3}$$

Si sustituimos $\hat{L}^2 = 3$:

$$V_{(r)} = \frac{3}{\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}} - \frac{3}{\hat{r}^3}$$

$$V'_{(r)} = -2\frac{3}{\hat{r}^3} + \frac{1}{\hat{r}^2} - (-3)\frac{3}{\hat{r}^4}$$

$$V''_{(r)} = -2 \cdot (-3)\frac{3}{\hat{r}^4} + (-2)\frac{1}{\hat{r}^3} - (-3)(-4)\frac{3}{\hat{r}^5}$$

Donde, si decimos que justamente $\hat{r} = \hat{L}^2 = 3$, obtenemos que:

$$V''_{(r)} = -2 \cdot (-3)\frac{3}{3^4} + (-2)\frac{1}{3^3} - (-3)(-4)\frac{3}{3^5}$$

$$V''_{(r)} = \frac{2}{3^2} - \frac{2}{3^3} - \frac{4}{3^3} = \frac{6}{3^3} - \frac{2}{3^3} - \frac{4}{3^3} = \frac{0}{3^3} = 0$$

Con todos estos datos que tenemos, vamos a estudiar, como hicimos en Newton, nuestro escenario unidimensional en el que cruzamos el potencial (vertical) sólo con la dimensión radial (horizontal).

Antes, de todas formas, vamos a refrescar un poco dónde estamos porque es posible que, tras tantos 'juegos matemáticos', nos hayamos despistado. Si estamos estudiando el movimiento de una partícula material (masa distinta de cero) inserta en una variedad curva con coordenadas t, r, φ y que tiene una determinada velocidad radial $\frac{dr}{d\tau}$ y otra determinada velocidad angular $\frac{d\varphi}{d\tau}$. Así, con las expresiones:

$$\frac{d\varphi}{d\hat{\tau}} = \frac{\hat{L}}{\hat{r}^2}$$

$$E_{REL} = \left(\frac{d\hat{r}}{d\hat{\tau}}\right)^2 + \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}} - \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^3}$$

Podríamos calcular tanto el Momento como la Energía de la partícula y, además, sabríamos que a lo largo de su trayectoria, si está en caída libre o, lo que es lo mismo, siguiendo una geodésica en esa variedad, estas magnitudes deben permanecer constantes.

Empecemos a analizar gráficamente los diferentes escenarios según la Energía de la partícula, en un escenario unidimensional, corte a la Curva del Potencial $V_{(r)}$ asociado a un Momento Angular determinado.

Recordemos que hemos definido el Potencial como:

$$V_{(r)} = \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}} - \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^3}$$

A continuación vamos a proponer una serie de escenarios en los que plantearemos, para cada uno, un diagrama en que crucemos Potencial y radio para un momento angular determinado, y en el que obtendremos una curva determinada con la que podremos interactuar con nuestra Energía constante (tal y como hicimos con Newton)[372]. Procedamos con la primera situación[373] posible en la que $\hat{L}^2 = 0 \rightarrow \hat{L} = 0$.

[372] Recordemos que, de igual manera que hicimos con Newton, vamos a tomar sólo valores positivos de r, considerando que un radio siempre es positivo y el sentido de giro de las órbitas es antihorario.

[373] Realmente los puntos Máximo, mínimo y de inflexión, sólo hará falta usarlos en la Situación 3.

SITUACIÓN 1.

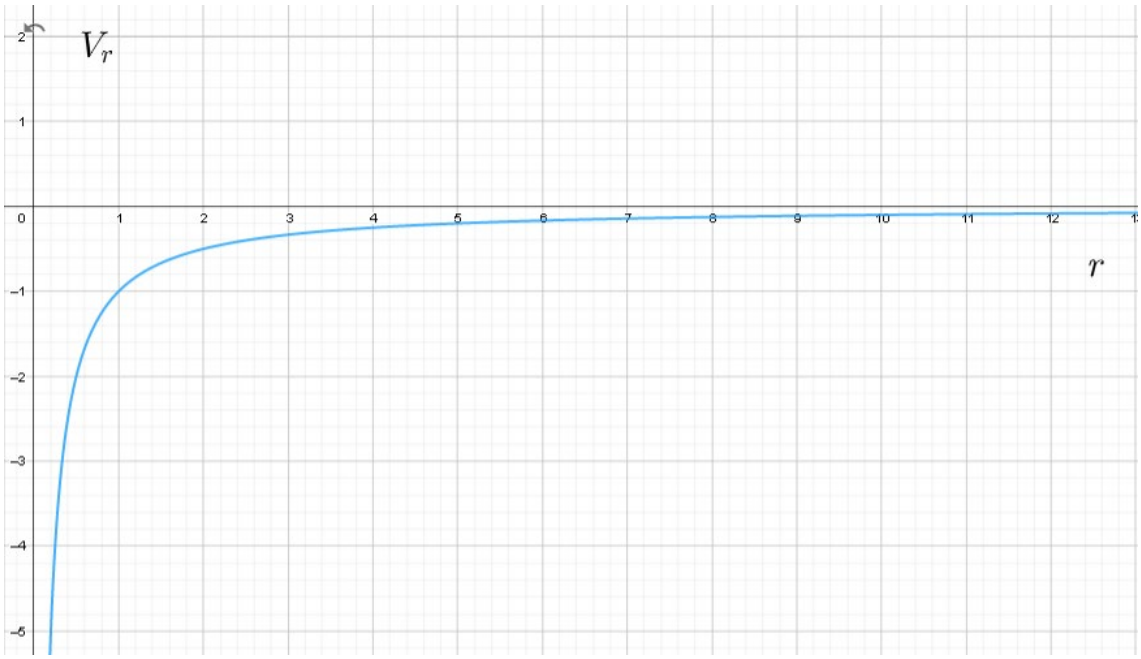
Supongamos un Momento angular de $\hat{L}^2 = 0$, es decir, que no hay velocidad angular ya que siendo $\hat{L}^2 = 0$, necesariamente $\hat{L} = 0$ y esto implica que el cuerpo que orbita lo hace sólo en una dirección radial, es decir, que no gira en torno a otro cuerpo más masivo.

En este caso nuestra expresión queda como:

$$V_{(r)} = \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}} - \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^3}$$

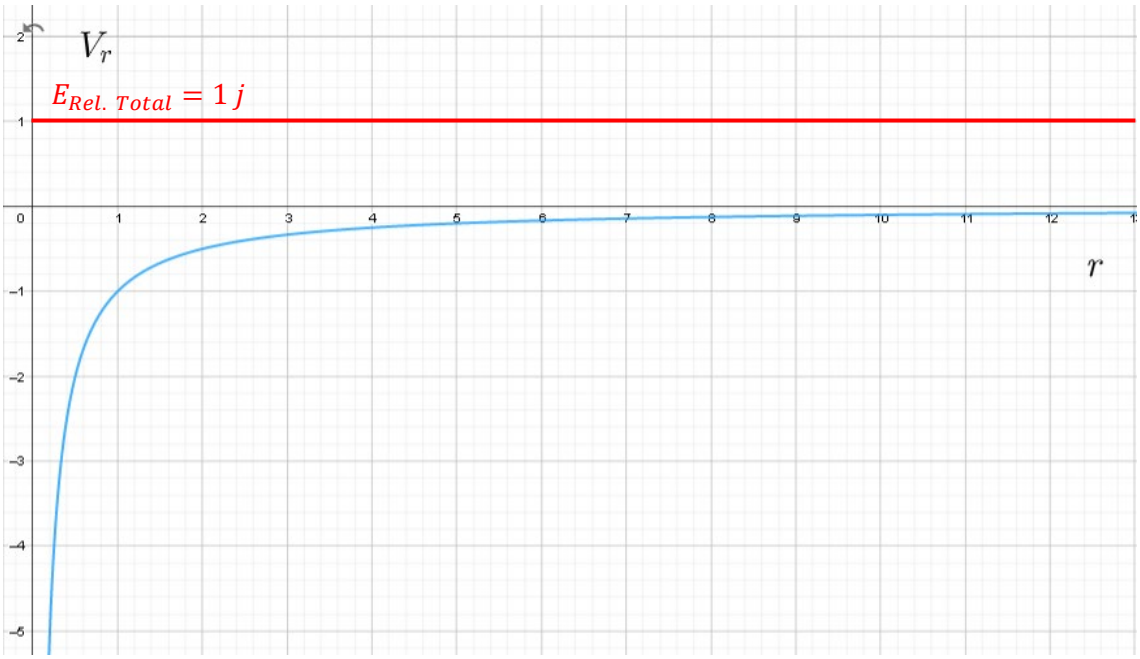
$$V_{(r)} = \frac{0^2}{\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}} - \frac{0^2}{\hat{r}^3} = -\frac{1}{\hat{r}}$$

La representación gráfica de este escenario unidimensional es:

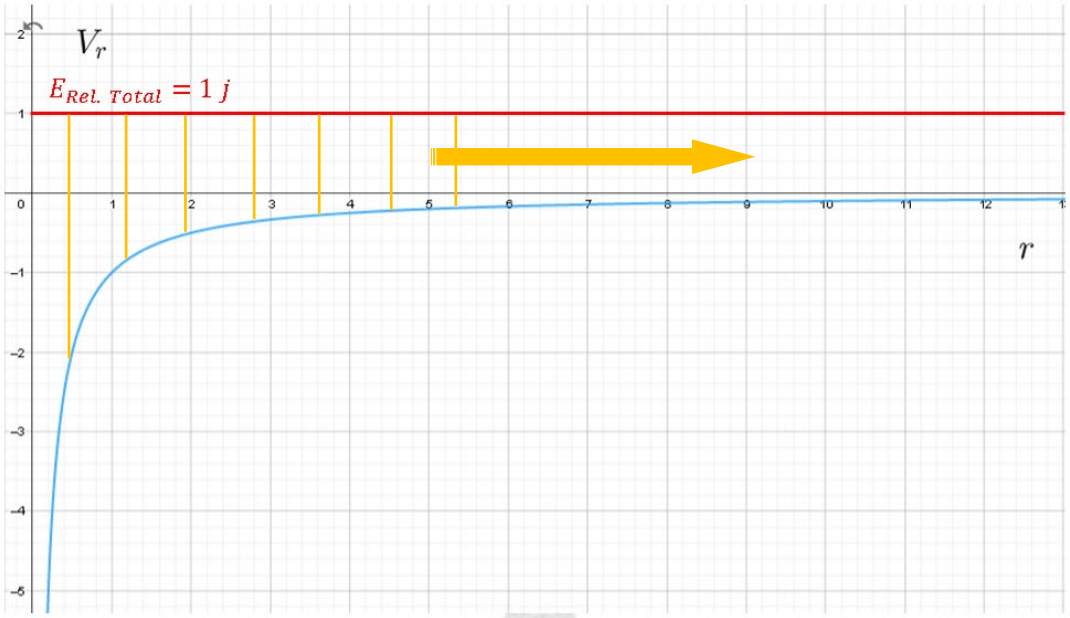


Recordemos: ésta es la representación gráfica (visto unidimensionalmente, sólo en $\hat{r}$) de la Energía Potencial de una partícula que tiene un momento angular $\hat{L}^2 = 0$.

Ahora, dentro de este escenario preestablecido, supongamos una partícula que tenga una Energía Relativista Total ($E_{Cinetica} + E_{Potencial}$) de, por ejemplo: +1 julio. Gráficamente estaríamos ante un esquema como el siguiente:

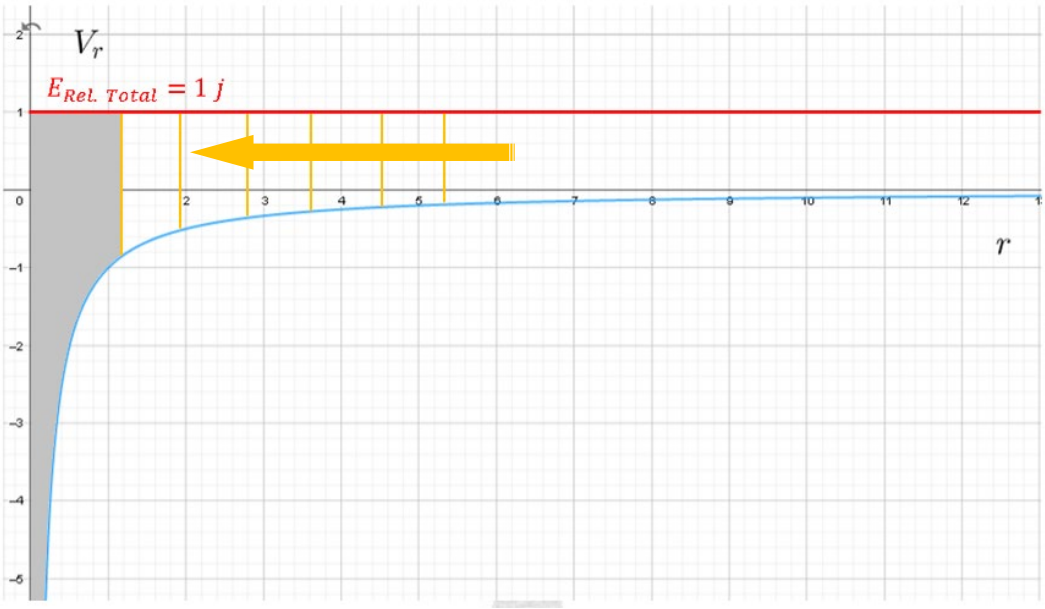


Observamos, de manera palpable, que las líneas de la Energía Relativista Total que tiene la partícula no corta en ningún punto la línea que traza la Energía Potencial posible para nuestro escenario en el que $\hat{L}^2 = 0$. ¿Qué quiere decir esto? Que la partícula siempre va a tener Energía Cinética pues en ningún caso la Energía Relativista Total es únicamente Potencial (sería el caso del corte entre las líneas). De hecho, por la observación del esquema, podemos deducir que la Energía cinética (si la partícula va hacia la derecha) va decreciendo (a favor de la Energía Potencial) según se aleja hacia el infinito hasta tener una velocidad, finalmente, constante (obsérvese el comportamiento de las líneas amarillas con las que señalamos la distancia entre la Energía Relativista Total de la partícula y la Energía Potencial).

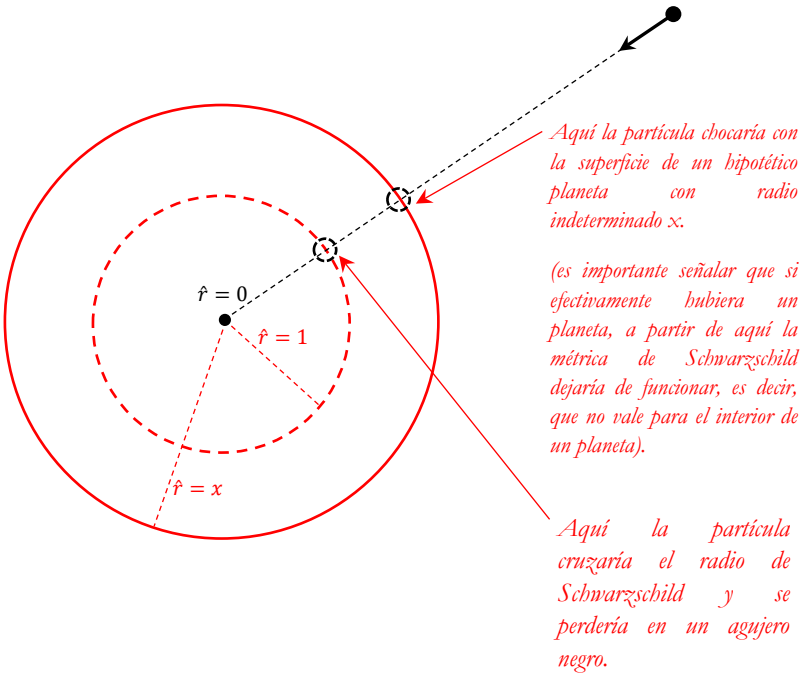


¿Qué sucedería si la partícula se desplazara hacia la izquierda? Pues que iría incrementando su velocidad hasta hacerse infinita… pero antes, ya le habría sucedido algo realmente notable. El radio de Schwarzschild, en estas unidades que estamos manejando, estaría en $\hat{r} = 1$ y esto

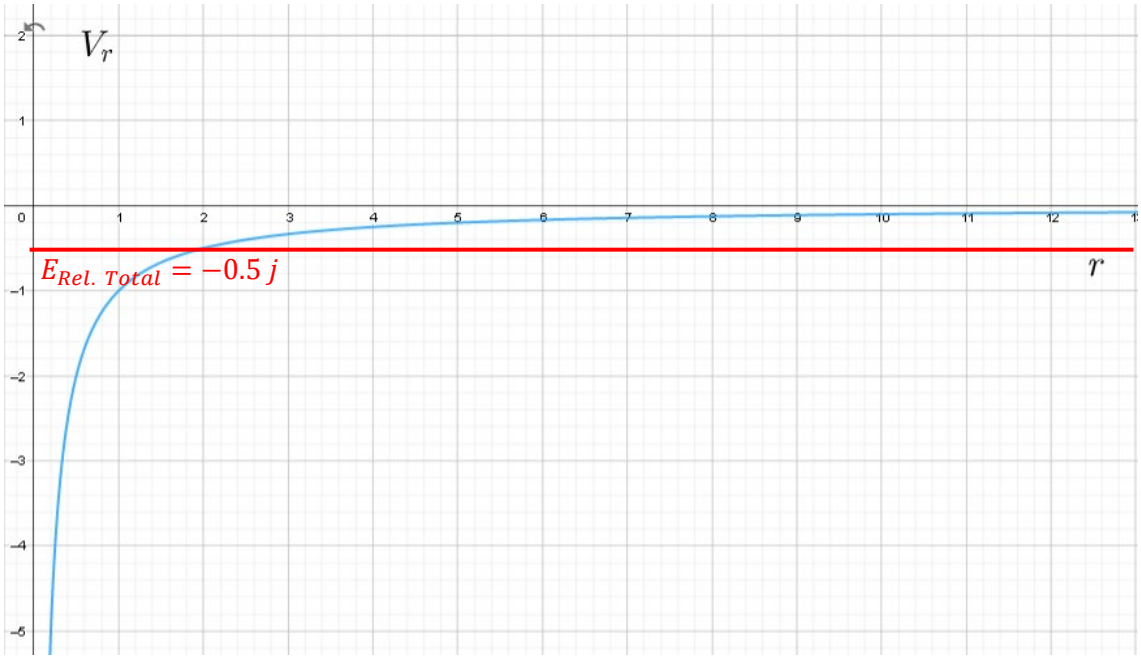
queire decir que, en ese punto, la partícula habría alcanzado un horizonte de sucesos y, por lo tanto, estaría ya perdida para siempre en el interior de un agujero negro.



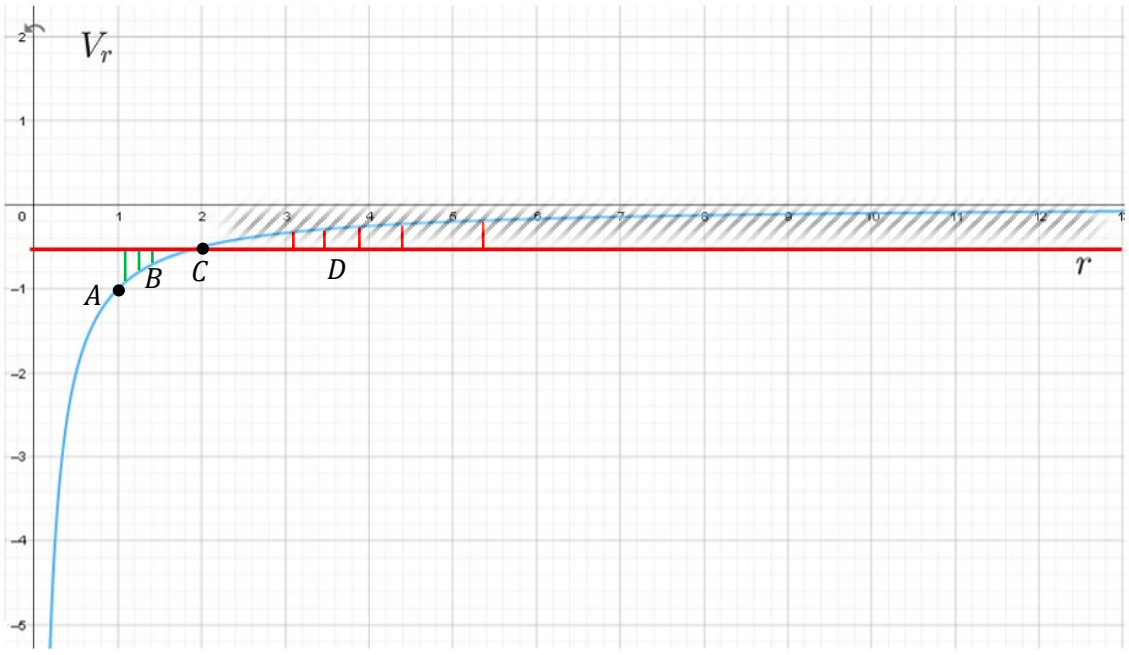
Esto, en un esquema bidimensional, podríamos visualizarlo del siguiente modo (explicitamos sólo el caso del movimiento hacia la izquierda, es decir, hacia el radio igual a cero).



Supongamos ahora, todavía dentro del supuesto en el que $\hat{L}^2 = 0$, que la partícula tiene una Energía Relativista Total de, por ejemplo, -0.5 julio.



Analicemos este interesante escenario. Encontramos varias zonas interesantes que vamos a denotar como A, B, C Y D.



- Punto A. Sería, como hemos dicho anteriormente, el horizonte de sucesos de un agujero negro.

- Zonas B Y D. Son zonas en las que hay energía Cinética y, por lo tanto, la partícula se mueve pero, ojo, interesante: hay un cambio de signo (la línea de la Energía Relativista Total (en rojo) de la partícula, pasa de estar por encima de la Energía Potencial a estar por debajo). Hay un momento en que la Energía cinética es negativa y eso es imposible. No. No podemos interpretar que hay un cambio de signo en la velocidad. La Energía Cinética en nuestra expresión nunca puede ser negativa pues, recordemos nuestra expresión para la Energía relativista:

$$E_{REL} = \left(\frac{d\hat{r}}{d\hat{t}}\right)^2 + \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}} - \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^3}$$

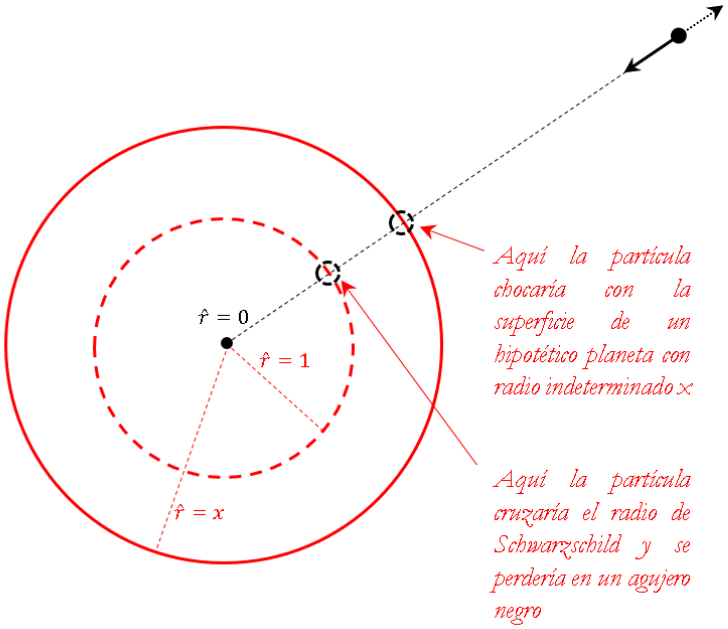
  Donde el término marcado en color rojo es siempre positivo (está elevado al cuadrado) y se corresponde, efectivamente, con la Energía Cinética.

  En definitiva: la zona D es una zona prohibida para nuestra partícula.

- Punto C. La partícula sólo tiene Energía Potencial, es decir, tiene Energía Cinética nula y, por lo tanto, velocidad igual a cero.

Según esto, en un esquema ya bidimensional, tendríamos dos posibles escenarios:

- Que la partícula (en nuestro esquema unidimensional) se acercara al origen en cuyo caso, sencillamente, estaría perdida.
- Que la partícula se alejara del origen (planeta/agujero negro). Según define el modelo unidimensional, la zona B es la única zona en que se puede mover energéticamente la partícula. Yendo hacia la derecha habrá un momento (en el punto C) en que la partícula acaba frenando y vuelve a adquirir velocidad (esta vez en sentido contrario, pues no puede estar en la zona D) para terminar retornando y chocando con la superficie del planeta o, si no hay planeta, sumergirse definitivamente en un agujero negro tras cruzar el horizonte de sucesos en el punto A de nuestra gráfica anterior:



Y con estos dos escenarios habríamos descrito las posibilidades de acción de una partícula (no sometida a ninguna fuerza más allá de la caída libre o recorrido por una geodésica[374]) en un supuesto en el que $\hat{L}^2 = 0$ (Situación 1) y que, como vemos, describe órbitas exclusivamente radiales (alejarse o acercarse al objeto masivo).

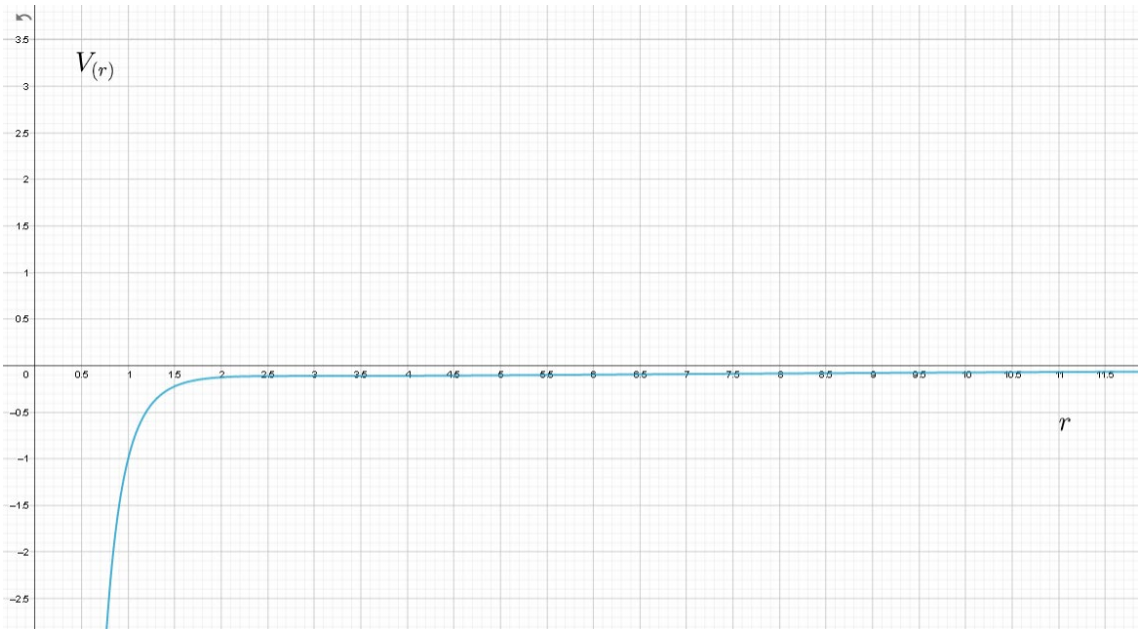
SITUACIÓN 2.

Situación en la que $\hat{L}^2 = 3 \rightarrow \hat{L} = \sqrt{3}$. De momento, y esto es la mayor diferencia con respecto a la Situación 1, observamos que la partícula tiene Momento Angular, es decir, que, de alguna manera, está girando en torno a un cuerpo masivo. Ya no está contenida, sólo, en una dirección radial. En este caso nuestra expresión para la $V_{(r)}$ quedaria como:

$$V_{(r)} = \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}} - \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^3}$$

$$V_{(r)} = \frac{\sqrt{3}^2}{\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}} - \frac{\sqrt{3}^2}{\hat{r}^3} = \frac{3}{\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}} - \frac{3}{\hat{r}^3}$$

Esto, gráficamente es:



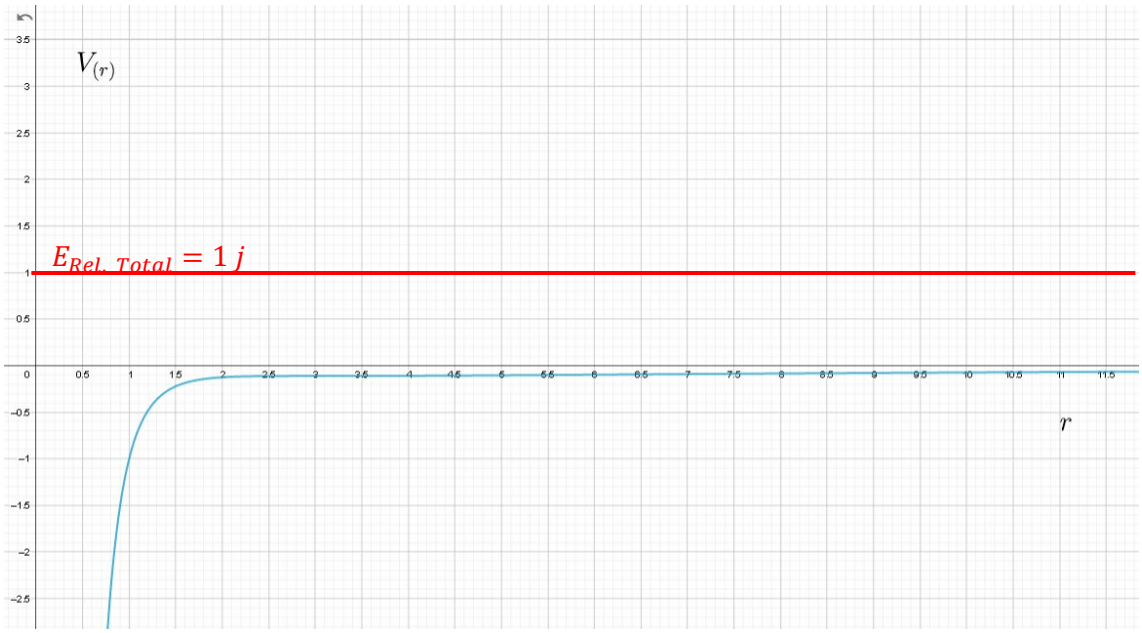
[374] Recordemos que estamos trabajando, en todo momento, en una variedad curva de manera que si estamos ante una partícula que traza una trayectoria a lo largo de su superficie y no está sometida a ninguna fuerza externa, es decir, que recorre una geodésica (está en caída libre), entonces podremos afirmar que tanto su Momento Angular como su Energía, permanecerán constante.
Es más, según las expresiones que ya tenemos:

$$\frac{d\varphi}{d\hat{t}} = \frac{\hat{L}}{\hat{r}^2} \rightarrow \frac{d\varphi}{d\hat{t}}\hat{r}^2 = \hat{L}$$

$$E_{REL} = \left(\frac{d\hat{r}}{d\hat{t}}\right)^2 + \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}} - \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^3}$$

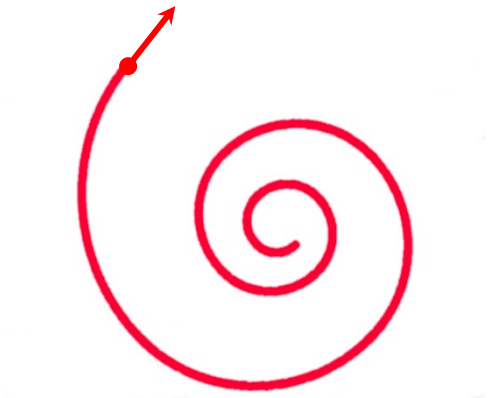
Con sólo conocer su velocidad radial: $\frac{d\hat{r}}{d\hat{t}}$ y su velocidad angular: $\frac{d\varphi}{d\hat{t}}$, podremos conocer el valor de dichas constantes.

Supongamos ahora una partícula que tiene una Energía Relativista Total de $E_{Rel} = +1\ j$.



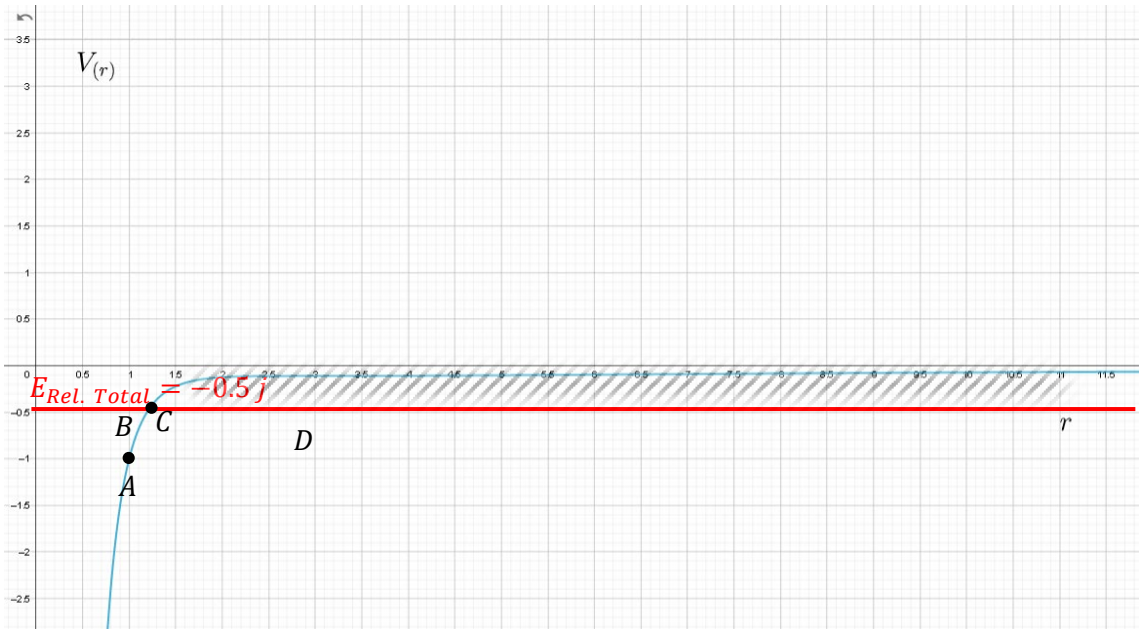
Caben dos posibilidades:

- Que la partícula vaya hacia la derecha en nuestro esquema unidimensional, en cuyo caso se está alejando del cuerpo masivo, incrementando su distancia y decelerando paulatinamente hasta estabilizar su velocidad. El cambio importante respecto a la Situación 1 es que ahora la partícula sí tiene un cierto Momento Angular, por lo que no se alejará en una dirección radial, sino girando, haciendo una especie de espiral y alejándose hacia el 'infinito':



- Que la partícula vaya hacia la izquierda en nuestro esquema unidimensional, en cuyo caso la partícula se estaría acercando al centro masivo, orbitando mediante una trayectoria igualmente más o menos espiral y, una vez que cruzara el horizonte de sucesos, estaría perdida para siempre.

Supongamos ahora una partícula que tiene una Energía Relativista Total de $E_{Rel} = -0.5\ j$.

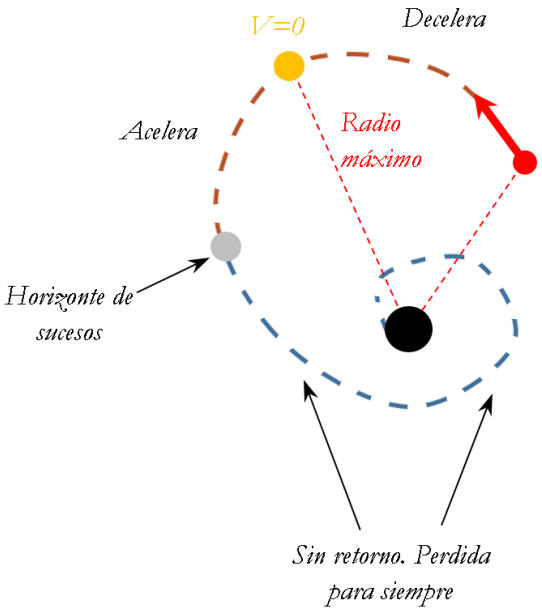


Volvemos a tener delimitadas 4 zonas A, B, C y D de las que sabemos que D está prohibida para nuestra partícula.

Caben dos posibilidades:

- Que la partícula vaya hacia la izquierda de nuestro esquema unidimensional. Como sabemos que la zona D está vedada para nuestra partícula, sencillamente, irá desde el punto C hacia el horizonte de sucesos en A y acabará sumergiéndose, incrementando su velocidad, en el agujero negro.

- Que la partícula vaya hacia la derecha en nuestro esquema unidimensional, en cuyo caso se está alejando del cuerpo masivo, incrementando su distancia y decelerando paulatinamente hasta estabilizar su velocidad. El cambio importante respecto a la Situación 1 es que ahora la partícula sí tiene un cierto Momento Angular, por lo que no se alejará en una dirección radial, sino girando, haciendo una especie de espiral y alejándose hasta… ¿dónde? Pues como tiene vedada la zona D, sólo se alejará hasta el punto C en el que su velocidad será igual a cero (pues no tendrá energía cinética en ese punto de corte entre las dos líneas: será únicamente energía potencial) y, posteriormente, volverá a empezar a acelerar, esta vez hacia el agujero negro, incrementando su velocidad hasta sumergirse en el mismo. Algo parecido a esto:

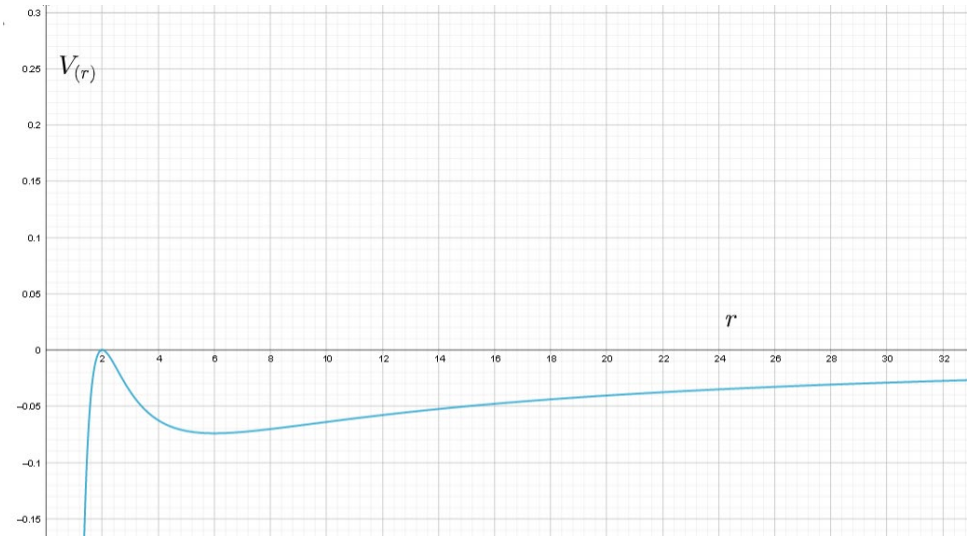


SITUACIÓN 3.

Ahora vamos a suponer un escenario en el que $\hat{L}^2 > 3$, por ejemplo: $\hat{L}^2 = 4 \rightarrow \hat{L} = \sqrt{4} = 2$. Al igual que antes, constatamos que la partícula tiene Momento Angular por lo que está girando en torno a un cuerpo masivo. Por otro lado, es importante recordar que en esta Situación 3 los máximos, mínimos y punto de inflexión que calculamos van a desarrollar un importante papel a la hora de caracterizar las órbitas relacionadas con los estados de Energía y Momento Angular. Así, para este caso nuestra expresión para la $V_{(r)}$ quedaria como:

$$V_{(r)} = \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}} - \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^3}$$

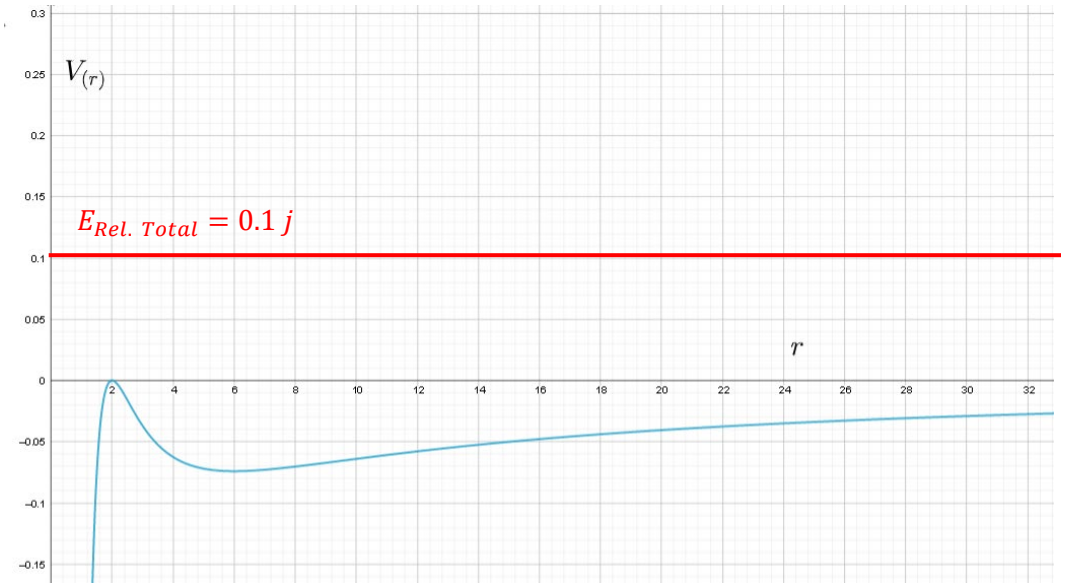
$$V_{(r)} = \frac{4}{\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}} - \frac{4}{\hat{r}^3}$$



(OBSERVACIÓN. Hemos tenido que deformar un poco el eje x (comprimirlo) para que se aprecie con claridad el comportamiento de la curva del potencial)

Y ahora vamos a ver qué interesante se pone el asunto.

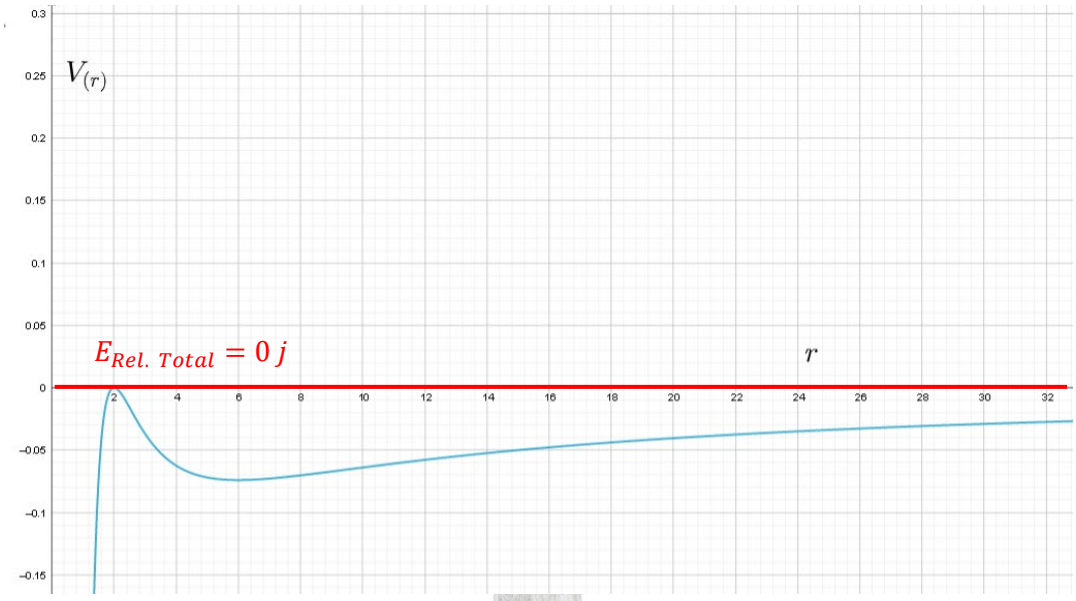
Si suponemos una Energía relativista Total de, por ejemplo: $E_{Rel} = 0.1\ j$



Si imaginamos que la partícula a hacia la derecha en nuestro esquema unidimensional del Potencial (y siempre que no se acerque demasiado a $r = 1$, en cuyo caso caería al agujero negro sin posibilidad de escape) en la realidad bidimensional (decimos bidimensional ya que al ser su Momento Angular constante, la órbita estaría contenida en un plano y podríamos estudiarla sólo según dos dimensiones phi y el radio) observaríamos que la partícula orbita en torno al agujero negro (u otro cuerpo masivo) cambiando su velocidad pero alejándose hasta el infinito en que, como en casos anteriores estabilizaría su velocidad.

Si, en cambio, se dirigiera hacia la izquierda en nuestro esquema unidimensional del Potencial, sencillamente, estaría totalmente condenada, si bien veríamos que la velocidad de la partícula, orbitando en torno al agujero negro iría oscilando según la distancia vertical que observamos entre la Energía Relativista Total de la partícula y el Potencial.

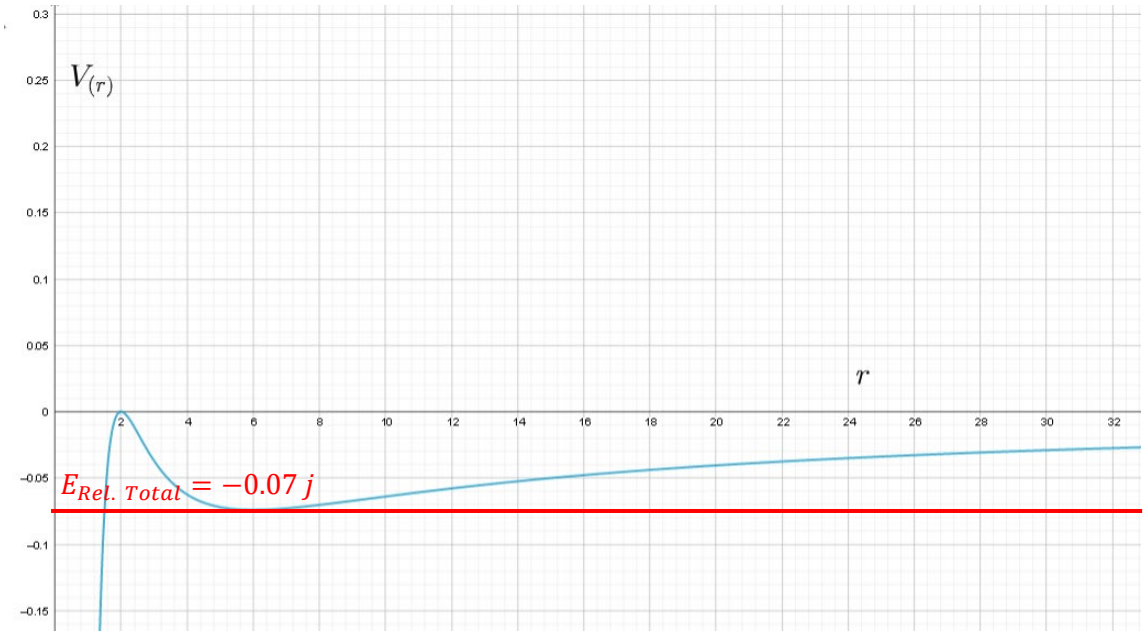
Vayamos a casos más interesantes. Por ejemplo: $E_{Rel} = 0\ j$



Observemos que, justamente, la Energía Relativista Total de la partícula se iguala en $\hat{r} = 2$[375] al Potencial. Es decir, en ese punto, justo en ese punto, la partícula no tendría velocidad de alejamiento o acercamiento al cuerpo masivo. Su radio sería constante, su Momento Angular sería igual a $\hat{L}^2 = 4 \rightarrow \hat{L} = 2$ y, por lo tanto, estaría a punto de quedarse atrapada en una órbita circular de $\hat{r} = 2$ en torno al cuerpo masivo. Una órbita circular absolutamente perfecta, pero, también, muy precaria pues cualquier inestabilidad en el sistema haría o que cayese hacia el agujero negro o que escapara definitivamente de su influencia gravitatoria.

De hecho lo que sucede es que si la partícula viniera desde la derecha con $E_{Rel} = 0\, j$, llega a orbitar a una distancia $\hat{r} = 2$ (recordemos que $\hat{r}$ es una distancia adimensional corregida por a) del cuerpo masivo y se volvería a alejar hacia el infinito (por ejemplo un cometa). Si viniera desde la izquierda (siempre que hubiera partido de más acá del horizonte de sucesos) pasaría algo parecido, pero más catastrófico pues acabaría siendo deglutida por el agujero negro.

Algo parecido sucedería si la $E_{Rel} \approx -0.07\, j$ aunque, en tal caso, la partícula sí que quedaría atrapada en un equilibrio feliz (y precario) en una órbita circular en torno al cuerpo masivo pero, en este caso, con un $\hat{r} = 6$. Y decimos que queda atrapada porque el resto de zonas le estarían vedadas al estar el potencial por encima de la Energía Cinética[376].



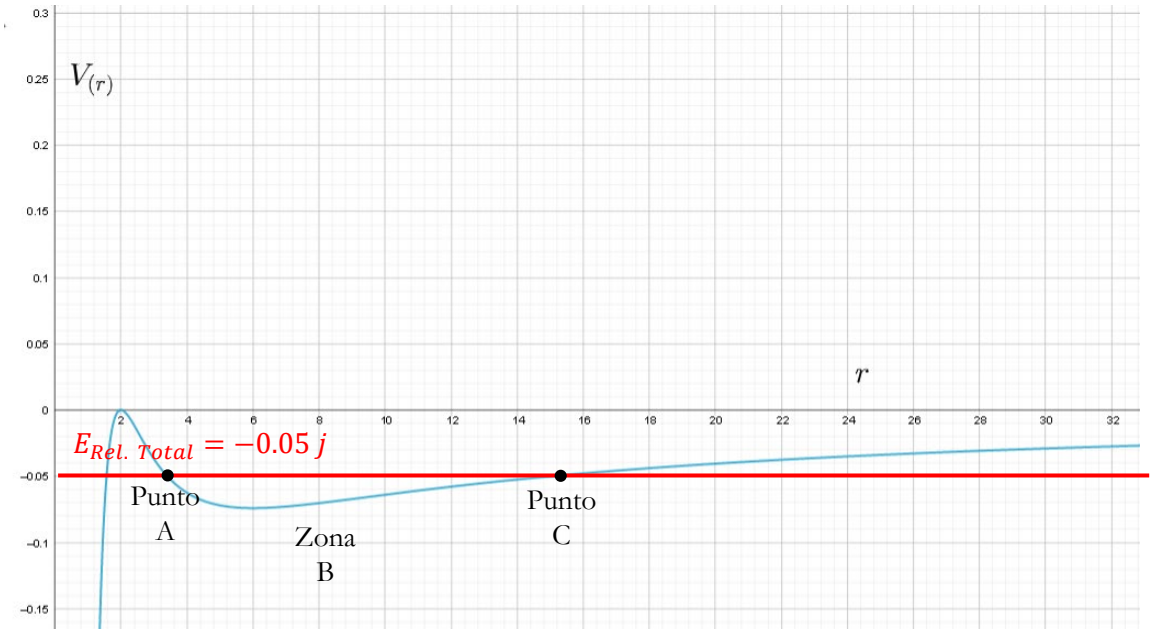
[375] Recordemos que, en la página 594 de este mismo capítulo, definíamos el máximo y el mínimo como:

$$\hat{r}_{MAX} = \hat{L}^2 - \hat{L}\sqrt{\hat{L}^2 - 3} \rightarrow \hat{r}_{MAX} = 4 - 2\sqrt{1} = 2$$

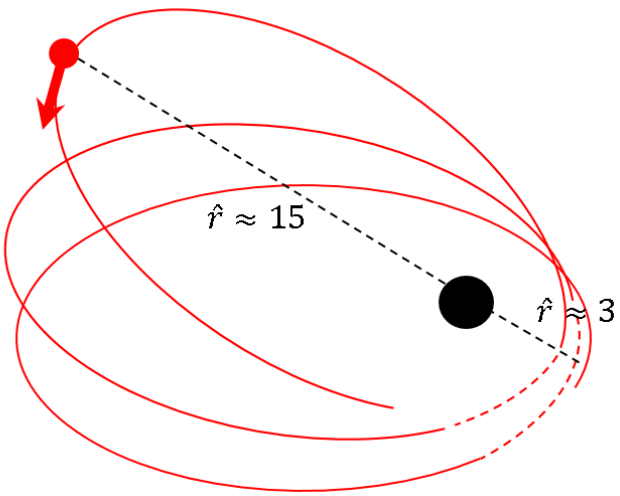
$$\hat{r}_{min} = \hat{L}^2 + \hat{L}\sqrt{\hat{L}^2 - 3} \rightarrow \hat{r}_{min} = 4 + 2\sqrt{1} = 6$$

[376] De hecho, también podría estar en la peligrosa zona 'muy de la izquierda' en la que, sea como sea, la partícula acabaría condenada a hundirse en el agujero negro.

Finalmente, dentro de esta Situación 3, vayamos al escenario más probable y que, de hecho, es el que rige, por ejemplo, las órbitas de los planetas del Sistema Solar. Supongamos una Energía Relativista Total de $E_{Rel} = -0.5\ j$.



Obsérvese que (obviando la zona 'muy a la izquierda' que es posible para la partícula aunque, como hemos dicho, ya estaría condenada) todo está vetado para la presencia de la partícula excepto la zona que hemos llamado B. Obsérvese que en los puntos A y C la partícula tiene velocidad cero y vuelve de retorno hacia el punto A repitiendo el proceso 'eternamente'. Tal es el caso de una órbita elíptica como la que sigue, por ejemplo, Mercurio y que, además, precesiona pues si nos fijamos en la velocidad que puede adquirir la partícula es mayor en torno al punto A que en torno al punto C y, por lo tanto, adquiere un movimiento de inercia más rápido (en la cercanía del cuerpo masivo, tal y como predecía Kepler) que hace que el eje de la trayectoria elíptica de la partícula vaya rotando y la órbita, por lo tanto, precesionando[377].



[377] Mediante este modelo se puede explicar, finalmente, por qué la órbita de Mercurio precesiona más de lo que predice el modelo Newtoniano.

Comportamiento de la luz en torno a un agujero negro.

Vamos, ahora, a hacer exactamente lo mismo para partículas sin masa como, por ejemplo, un fotón.

Para proceder, recodemos algunas definiciones que ya hemos hecho:

- Métrica dimensional del Espaciotiempo de Schwarzschild[378]:

$$-c^2 d\tau^2 = -\left(1-\frac{a}{r}\right)c^2 dt^2 + \left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\varphi^2$$

- Otras definiciones adimensionales:

$$\hat{t} = \frac{ct}{a}$$

$$\hat{r} = \frac{r}{a}$$

Por otro lado, recordemos las magnitudes conservadas para el caso de la Luz: el momento lineal de la luz: $\underline{K}$ que, recordemos, estaba relacionado con el Killing temporal e_0.

Recordemos que definíamos el Momento de la Luz como[379]:

$$\underline{K} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} e_\alpha$$

Donde[380]:

$$\underline{K} \cdot e_0 = -\frac{E}{c}$$

Esto es:

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} e_\alpha \cdot e_0 = -\frac{E}{c}$$

De lo que, por la ortogonalidad de la base vectorial, sólo sobrevive:

$$\frac{dx^0}{d\lambda} e_0 \cdot e_0 = -\frac{E}{c}$$

$$\frac{dx^0}{d\lambda} g_{00} = -\frac{E}{c}$$

Tomamos el valor g_{00} de la "métrica dimensional":

$$\frac{dct}{d\lambda}\left[-\left(1-\frac{a}{r}\right)\right] = -\frac{E}{c} \quad [381]$$

---

[378] Véase página 585 de este mismo capítulo.

[379] Véanse p. 401 y ss. de la sección 2.9.1.

[380] Véanse p. 405 y ss. de la sección 2.9.1.

[381] $x^0 = ct, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$

$$-\frac{dct}{d\lambda}\left(1-\frac{a}{r}\right)=-\frac{E}{c}$$

$$\frac{dct}{d\lambda}\left(1-\frac{a}{r}\right)=\frac{E}{c}$$

Procedamos a 'adimensionar' esta expresión. Para ello, pensemos: ¿qué unidades tiene?

- $dct \rightarrow longitud$
- $d\lambda \rightarrow desconocida\ por\ el\ momento$
- $\left(1-\frac{a}{r}\right) \rightarrow adimensional \rightarrow \left(1-\frac{longitud}{longitud}\right)$
- $E \rightarrow joules \rightarrow \frac{masa \cdot longitud^2}{tiempo^2}$
- $c \rightarrow \frac{longitud}{tiempo}$

Es decir:

$$\frac{long}{¿\,d\lambda?}(nada)=\frac{\frac{masa\cdot longitud^2}{tiempo^2}}{\frac{longitud}{tiempo}}$$

$$\frac{long}{¿\,d\lambda?}=\frac{masa\cdot longitud^2}{tiempo^2}\frac{tiempo}{longitud}$$

$$\frac{long}{¿\,d\lambda?}=\frac{masa\cdot longitud}{tiempo}\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{¿\,d\lambda?}=\frac{masa}{tiempo}$$

De donde podemos colegir que, para que nuestra expresión $\frac{dct}{d\lambda}\left(1-\frac{a}{r}\right)=\frac{E}{c}$ sea adimensional, λ debe tener las siguientes unidades:

$$\lambda=\frac{tiempo}{masa}$$

Necesitamos que esta lambda sea adimensional. Pero claro, un fotón, por definición no tiene masa así que ¿de qué masa característica estaremos hablando cuando estemos trabajando del comportamiento de un fotón que discurre por un espaciotiempo deformado por un cuerpo masivo? Pues, efectivamente, estaríamos hablando de la masa del cuerpo masivo: planeta, agujero negro, estrella, etc…: M.

Para el tiempo característico (¿qué es esto de característico?) podemos tomar una magnitud característica como:

$$a=\frac{2GM}{c^2}$$

Que tiene unidades de longitud y la dividimos por una velocidad, es decir:

$$\frac{a}{c} = \frac{l\,o\,n\,g\,i\,t\,u\,d}{\frac{longitud}{tiempo}} \rightarrow tiempo$$

Así, puesto que tenemos una λ con unidades: $\frac{tiempo}{masa}$, para adimensionarla ($\hat{\lambda}$) tendremos que multiplicarla por algo con la forma $\frac{masa}{tiempo}$, es decir:

$$\hat{\lambda} = \lambda \cdot \frac{masa}{tiempo}$$

$$\hat{\lambda} = \lambda \cdot \frac{masa}{\frac{a}{c}} \rightarrow \lambda \cdot \frac{cM}{a} \rightarrow \lambda = \hat{\lambda} \cdot \frac{a}{cM}$$

Empecemos, con esto, a adimensionar nuestra expresión:

$$\frac{dct}{d\lambda}\left(1 - \frac{a}{r}\right) = \frac{E}{c}$$

$$\frac{dct}{d\left(\hat{\lambda} \cdot \frac{a}{cM}\right)}\left(1 - \frac{a}{r}\right) = \frac{E}{c}$$

$$\frac{dct}{\frac{a}{cM}d\hat{\lambda}}\left(1 - \frac{a}{r}\right) = \frac{E}{c}$$

Ahora, como hemos dicho que:

$$\hat{t} = \frac{ct}{a}$$

Entonces:

$$\frac{ad\hat{t}}{\frac{a}{cM}d\hat{\lambda}}\left(1 - \frac{a}{r}\right) = \frac{E}{c}$$

Es decir:

$$cM\frac{d\hat{t}}{d\hat{\lambda}}\left(1 - \frac{a}{r}\right) = \frac{E}{c}$$

$$\frac{d\hat{t}}{d\hat{\lambda}} = \frac{E}{Mc^2\left(1 - \frac{a}{r}\right)}$$

Y como sabemos que:

$$\hat{r} = \frac{r}{a} \rightarrow \frac{1}{\hat{r}} = \frac{a}{r}$$

Entonces podemos re-escribir, más cercano a lo adimensional, como:

$$\frac{d\hat{t}}{d\hat{\lambda}} = \frac{E}{Mc^2\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)}$$

Ahora, para que todo sea adimensional, podemos llamar, como hemos hecho ya con anterioridad[382], $\hat{E}$ a $\frac{E}{Mc^2}$ que es la única parte que tiene dimensiones en nuestra expresión. Es decir:

$$\hat{E} = \frac{E}{Mc^2}$$

Luego, finalmente:

$$\frac{d\hat{t}}{d\hat{\lambda}} = \hat{E} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)}$$

Busquemos ahora la magnitud conservada relacionada con el Killing angular e_3, es decir, el Momento Angular de la la luz.

Para ello recordemos que:

$$L = \underline{K} \cdot e_\alpha$$

Como hemos dicho que:

$$\underline{K} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} e_\alpha$$

Tendríamos que sólo sobrevive:

$$L = \frac{dx^3}{d\lambda} e_3 \cdot e_3$$

$$L = \frac{dx^3}{d\lambda} g_{33}$$

[382] Véase página 415 del epígrafe 2.10.

$$L = \frac{dx^3}{d\lambda} r^2 \quad ^{383}$$

Procedamos a adimensionar λ:

$$L = \frac{dx^3}{d\left(\hat{\lambda} \cdot \frac{a}{cM}\right)} r^2$$

$$L = \frac{d\varphi}{\frac{a}{cM} d\hat{\lambda}} r^2$$

$$L = \frac{cM}{a} \frac{d\varphi}{d\hat{\lambda}} r^2$$

Procedamos a adimensionar r^2:

$$L = \frac{cM}{a} \frac{d\varphi}{d\hat{\lambda}} r^2$$

$$L = \frac{cM}{a} \frac{d\varphi}{d\hat{\lambda}} a^2 \hat{r}^2$$

$$L = cMa \frac{d\varphi}{d\hat{\lambda}} \hat{r}^2$$

De donde podemos colegir que la única parte dimensionada, como ya hemos hecho, es la marcada en color azul:

$$L = cMa \frac{d\varphi}{d\hat{\lambda}} \hat{r}^2$$

Así que podríamos definir el Momento Angular adimensional $\hat{L}$ como:

$$\hat{L} = \frac{L}{cMa}$$

Por lo que, finalmente, nuestra expresión podríamos definirla como:

$$\frac{d\varphi}{d\hat{\lambda}} = \frac{\hat{L}}{\hat{r}^2}$$

---

[383] Recordemos que tomamos g_{33} de la métrica dimensional de Schwarzschild:

$$-c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2 \theta d\varphi^2$$

Como estamos en el plano ecuatorial en el que $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $d\theta^2 = 0$ usamos l métrica reducida:

$$-c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

Con esto ya tendríamos las definiciones adimensionales que necesitamos para seguir procediendo.

Para ello retomemos ahora nuestra métrica adimensional de Schwarzschild:

$$-d\hat{\tau}^2 = -\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)d\hat{t}^2 + \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1} d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 d\varphi^2$$

Recordemos que para el caso de la luz[384]:

$$ds = 0$$

Esto implica que, puesto que:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2$$

Necesariamente:

$$d\tau = 0$$

Luego, para el caso de la Luz, el elemento de línea adimensional quedaría como:

$$0 = -\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)d\hat{t}^2 + \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1} d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 d\varphi^2$$

Y, ahora, para acercar esta expresión a las definiciones que hemos obtenido $\left(\frac{d\hat{t}}{d\hat{\lambda}}, \frac{d\varphi}{d\hat{\lambda}}\right)$, dividámoslo todo por $d\hat{\lambda}^2$:

$$\left[0 = -\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)d\hat{t}^2 + \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1} d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 d\varphi^2\right] \cdot \frac{1}{d\hat{\lambda}^2}$$

$$0 = -\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)\left(\frac{d\hat{t}}{d\hat{\lambda}}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1}\left(\frac{d\hat{r}}{d\hat{\lambda}}\right)^2 + \hat{r}^2\left(\frac{d\varphi}{d\hat{\lambda}}\right)^2$$

Que, usando lo que antes obtuvimos:

$$\frac{d\hat{t}}{d\hat{\lambda}} = \frac{\hat{E}}{\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)}$$

$$\frac{d\varphi}{d\hat{\lambda}} = \frac{\hat{L}}{\hat{r}^2}$$

Podemos sustituir como:

$$0 = -\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)\left(\frac{\hat{E}}{\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1}\left(\frac{d\hat{r}}{d\hat{\lambda}}\right)^2 + \hat{r}^2\left(\frac{\hat{L}}{\hat{r}^2}\right)^2$$

[384] Véase página 403 de la sección 2.9.1.

$$0 = -\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)\frac{\hat{E}^2}{\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)^2} + \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1}\left(\frac{d\hat{r}}{d\hat{\lambda}}\right)^2 + \hat{r}^2\frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^4}$$

$$0 = -\frac{\hat{E}^2}{\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)} + \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1}\left(\frac{d\hat{r}}{d\hat{\lambda}}\right)^2 + \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2}$$

Multiplicamos todo por $\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)$:

$$0 = -\hat{E}^2 + \left(\frac{d\hat{r}}{d\hat{\lambda}}\right)^2 + \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2}\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)$$

Es decir que:

$$\hat{E}^2 = \left(\frac{d\hat{r}}{d\hat{\lambda}}\right)^2 + \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2}\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)$$

Si, como ciertamente es, $\hat{E}^2$ es un tipo de Energía Relativista Total Lumínica, podríamos decir que:

$$E_{RTL} = \left(\frac{d\hat{r}}{d\hat{\lambda}}\right)^2 + \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2}\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)$$

Que es una expresión que cuadra mucho con las expresiones para la Energía que hemos visto, tanto en el Paradigma Clásico como en Relatividad, para las partículas con masa:

$$E = E_{Cinética} + E_{Potencial}$$

$$E_{RTL} = \left(\frac{d\hat{r}}{d\hat{\lambda}}\right)^2 + \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2}\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)$$

Analicemos, ahora la expresión del Potencial:

$$V_{(r)} = \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2}\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)$$

$$V_{(r)} = \hat{L}^2\left(\frac{1}{\hat{r}^2}-\frac{1}{\hat{r}^3}\right)$$

Para estudiar su forma gráfica vamos a estudiar sus puntos críticos:

$$V'_{(r)} = \hat{L}^2\left(\frac{-2}{\hat{r}^3}+\frac{3}{\hat{r}^4}\right) = 0$$

Puesto que damos por supuesto que el Momento Angular es diferente de cero ($\hat{L}^2 = 0$), necesariamente:

$$\left(\frac{-2}{\hat{r}^3}+\frac{3}{\hat{r}^4}\right) = 0$$

$$\hat{r}^4\left(\frac{-2}{\hat{r}^3}+\frac{3}{\hat{r}^4}\right)=\hat{r}^4\cdot 0$$

$$-2\hat{r}+3=0$$

$$\hat{r}=\frac{3}{2}$$

Y para saber si es un máximo o un mínimo, volvemos a derivar y vemos el signo:

$$V''_{(r)}=\hat{L}^2\left(\frac{6}{\hat{r}^4}-\frac{12}{\hat{r}^5}\right)$$

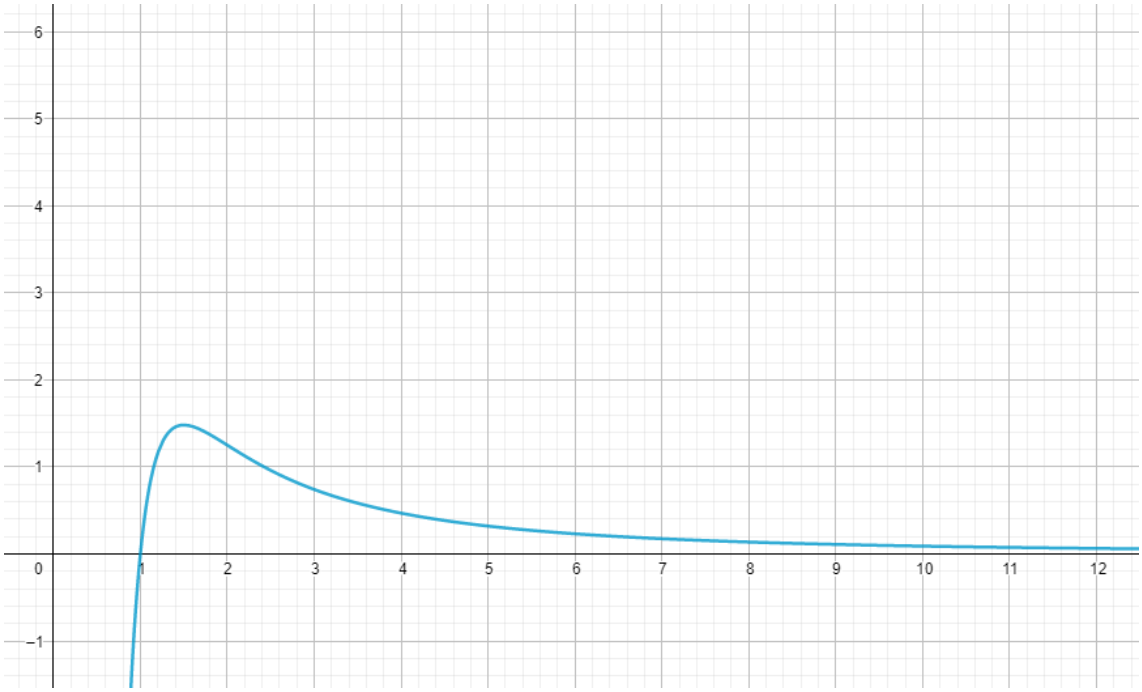
$$\frac{6\hat{L}^2}{\hat{r}^4}\left(1-\frac{2}{\hat{r}}\right)$$

En $\hat{r}=\frac{3}{2}$:

$$\frac{6\hat{L}^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^4}\left(1-\frac{4}{3}\right)$$

Donde lo marcado en color rojo es negativo por lo que podemos afirmar que $\hat{r}=\frac{3}{2}$ es un máximo.

Así, la gráfica de nuestro del Potencial de la Luz tendrá la siguiente forma:

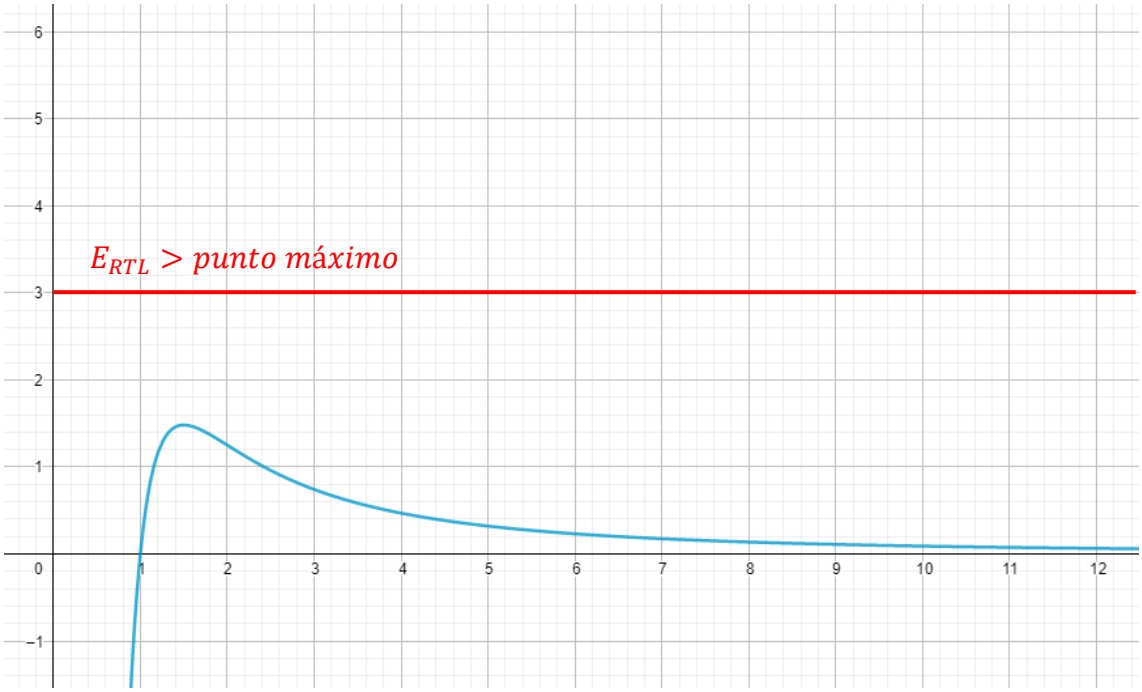


Que siempre tendrá la misma forma y sólo variará en la altura del punto máximo de la curva y que dependerá sólo del valor (más alto o más bajo) de $\hat{L}^2$. Por otro lado, es obvio que:

- Cuando $\hat{r}\to\infty$ la curva tenderá a cero y nunca bajará de dicho valor.
- Cuando $\hat{r}=1$ el fotón alcanza el horizonte de sucesos de un agujero negro.

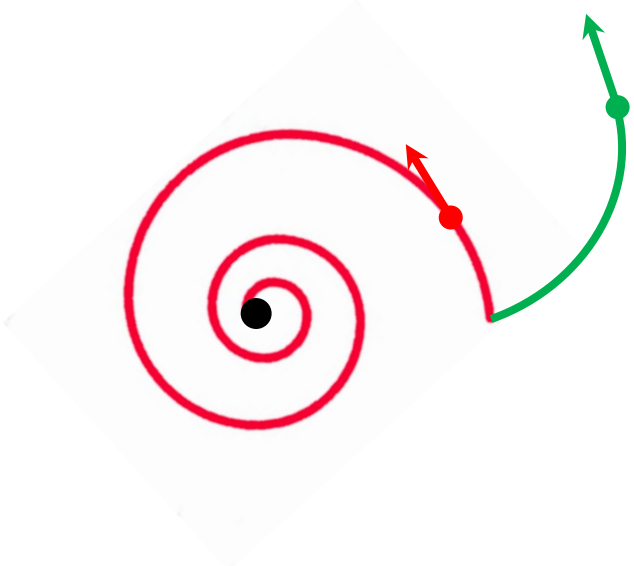
Imaginemos tres escenarios:

1. $E_{RTL} > punto\ máximo$

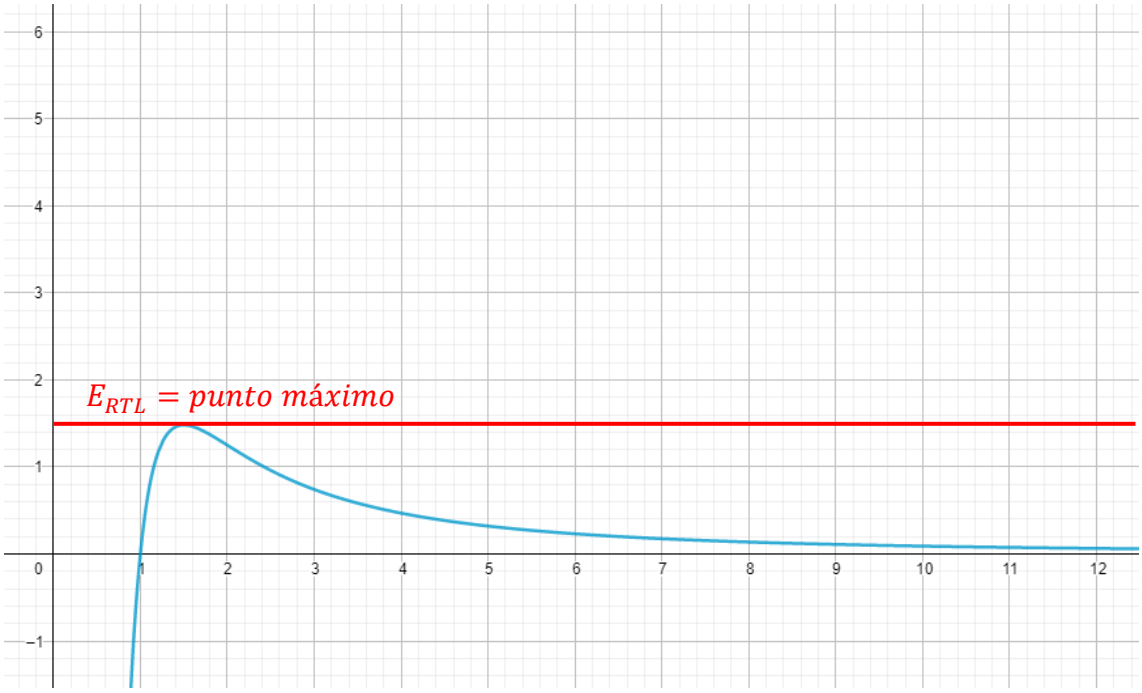


a) Si va hacia la izquierda en nuestro esquema unidimensional: se hunde rotando.

b) Si va hacia la derecha: se aleja para siempre, incrementando su velocidad hasta estabilizarla en una cantidad finita determinada por la altura a la que esté la línea de la Energía.

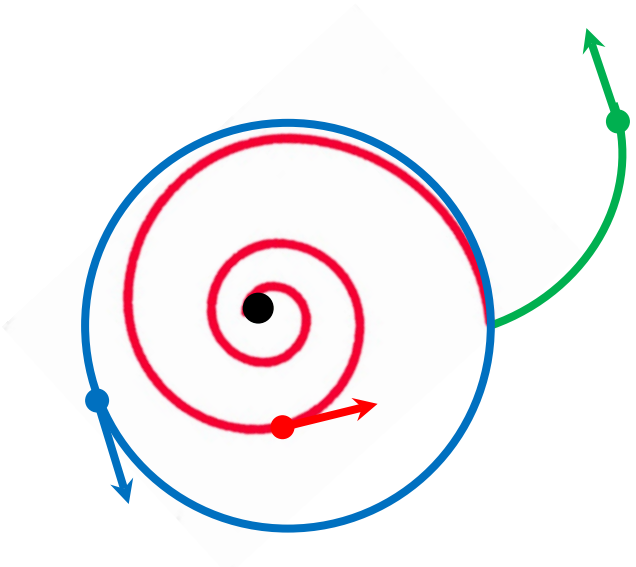


2. $E_{RTL} = punto\ máximo$

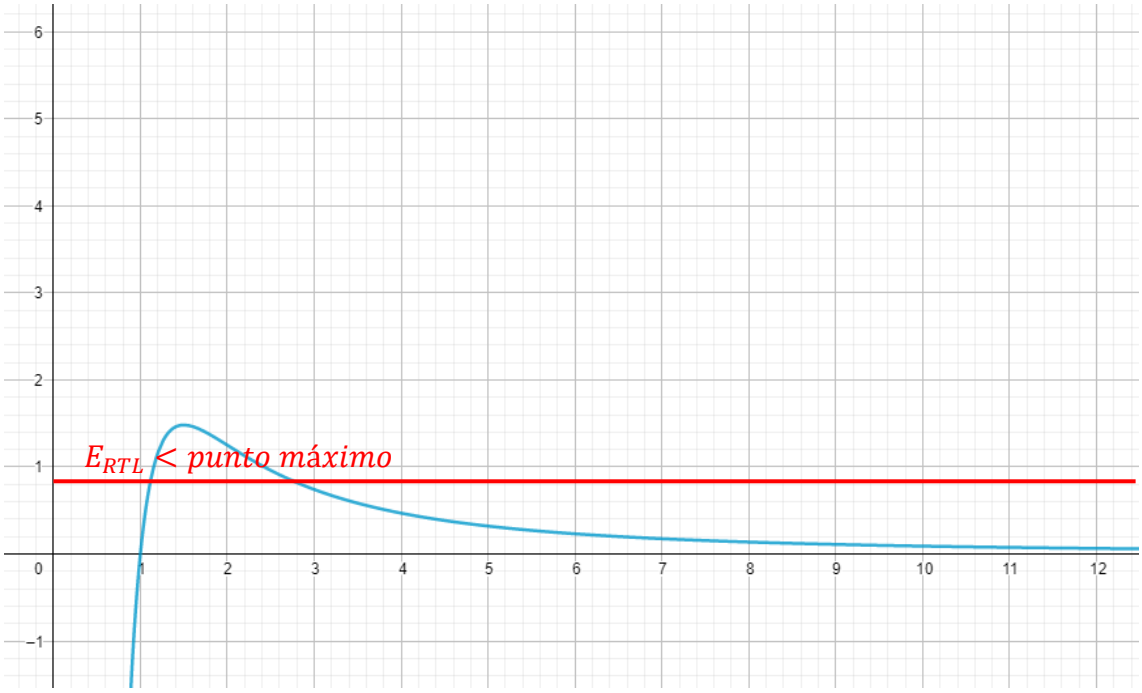


El fotón está orbitando circularmente en un equilibrio precario. Cualquier perturbación puede hacer que el fotón:

a. Caiga al agujero negro.
b. Se fugue del agujero negro.

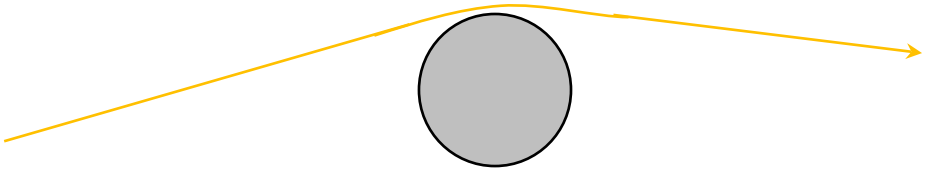


3. $E_{RTL} < punto\ máximo$



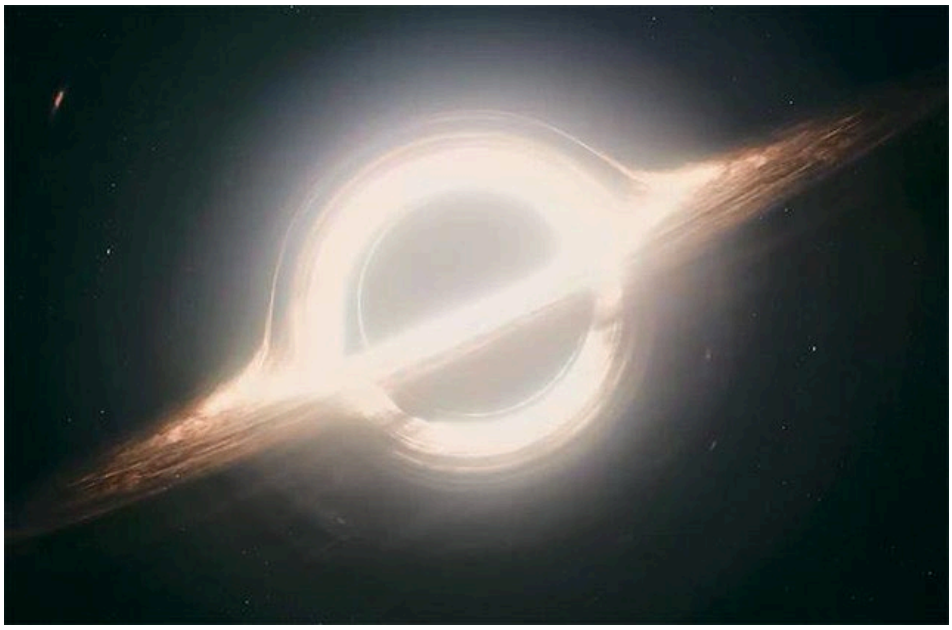
Sabemos que toda zona en la que el Potencial quede por encima de la Energía está vedada a nuestro fotón. Nos queda sólo dos zonas posibles:

a) La zona izquierda. Vaya hacia donde vaya el fotón en nuestro esquema unidimensional (hacia la derecha o hacia la izquierda), acabará hundiéndose, rotando, en el agujero negro.
b) Si está en el lado de la derecha, si el fotón viene hacia la izquierda, orbitará un poco en torno al agujero negro, es decir, curvará su trayectoria y se alejará. Justamente éste es el caso de las lentes gravitatorias.



Y esto es precisamente lo que hace que veamos esa especie de "corona lumínica" en torno a un agujero negro. Realmente en torno a un agujero negro sólo existe un plano ecuatorial en el que orbita gas y todo tipo de materia a velocidades cercanas a la de la luz formando un anillo. Esto produce unas temperaturas enormes en dicho disco de rotación y hace que el agujero negro emita radiación en forma de Rayos-x en las direcciones que podríamos llamar Norte/Sur. Sin embargo, en estas direcciones Norte/Sur, como hemos dicho, no hay materia rotando, aunque pueda parecerlo. Justamente lo que estamos viendo es una corona lumínica por el efecto que hemos comentado. Lo que sucede es debido, como hemos visto, al efecto de lente gravitatoria pues lo que estamos viendo por arriba y por abajo del agujero negro no es otra cosa que la parte del disco de materia que orbita "por detrás" del agujero negro. Esto

está bastante bien representado en la simulación de un agujero negro que hicieron para la película Interstellar.



-2.14-

¿Qué sucede al entrar en un agujero negro de Schwarzschild?

$\int$

2.14.1. Un observador estático en un espaciotiempo de Schwarzschild.

Para poder definir qué sucede, qué se observa, en un agujero negro de Schwarzschild, naturalmente, lo primero que tendremos que hacer es definir un Observador Genérico (aún no establecemos si es estático o no). Con tal fin habremos de definir una base vectorial tetradimensional que le es propia, por ejemplo:

$$B_{obs} = \{O_0, O_1, O_2, O_3\}$$

Que cumplen:

$$O_0 \cdot O_0 = -1$$

$$O_1 \cdot O_1 = +1$$

$$O_2 \cdot O_2 = +1$$

$$O_3 \cdot O_3 = +1$$

Y, además, es una base ortonormal, es decir, no hay productos cruzados.

Por otro lado, el espaciotiempo en que vamos a ubicar al observador, y que está definido por la métrica adimensional de Schwarzschild[384]:

$$d\hat{s}^2 = -\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right) d\hat{t}^2 + \left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1} d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 d\theta^2 + \hat{r}^2 sin^2\theta d\varphi^2$$

Y, en el mismo, tendríamos una base coordenada:

$$B_{Schw} = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$$

[384] En esta ocasión 'completa', es decir, sin la restricción de $\theta = \frac{\pi}{2}$.

De hecho, si nos fijamos en la métrica adimensional de Schwarzschild, y suponemos que el radio es infinito (es decir, situamos a un observador muy alejado del agujero negro), ¿qué tenemos si $\hat{r} \to \infty$?

$$d\hat{s}^2 = -\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right) d\hat{t}^2 + \left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1} d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 d\theta^2 + \hat{r}^2 sin^2\theta d\varphi^2$$

$$d\hat{s}^2 = -1\, d\hat{t}^2 + 1\, d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 d\theta^2 + \hat{r}^2 sin^2\theta d\varphi^2$$

Es decir, la métrica plana de Minkowski en coordenadas cilíndricas.

Ahora el plan va a ser acercar al observador. Vamos a relacionar la métrica del Observador Genérico para convertirlo en un Observador Estático en el espaciotiempo de Schwarzschild ubicado en un lugar más cercano al agujero negro. En definitiva, vamos a proponer una $\hat{r}$ que no sea tan grande respecto a a (el radio de Schwarzschild) y vamos a definir a un observador estático (su base) del siguiente modo:

$$Obs_{estático} = \{\overline{e}_0, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$$

Donde definimos[385]:

$$\overline{e}_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)}} \cdot e_0$$

De manera que:

$$\overline{e}_0 \cdot \overline{e}_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)}} \cdot e_0\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)}} \cdot e_0\right)$$

$$\overline{e}_0 \cdot \overline{e}_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)}} \cdot e_0 \cdot e_0$$

$$\overline{e}_0 \cdot \overline{e}_0 = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)} \cdot (e_0 \cdot e_0)$$

$$\overline{e}_0 \cdot \overline{e}_0 = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)} \cdot \left(-\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)\right)$$

[385] Recordemos que hemos dicho que para el espacio de Schwarzschild:

$$d\hat{s}^2 = -\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right) d\hat{t}^2 + \left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1} d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 d\theta^2 + \hat{r}^2 sin^2\theta d\varphi^2$$

$$B_{Schw} = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$$

$$\overline{e}_0 \cdot \overline{e}_0 = -1$$

Igualmente[386], buscando que el Observador Estático 'perciba' un espacio plano, definimos el resto de sus vectores base:

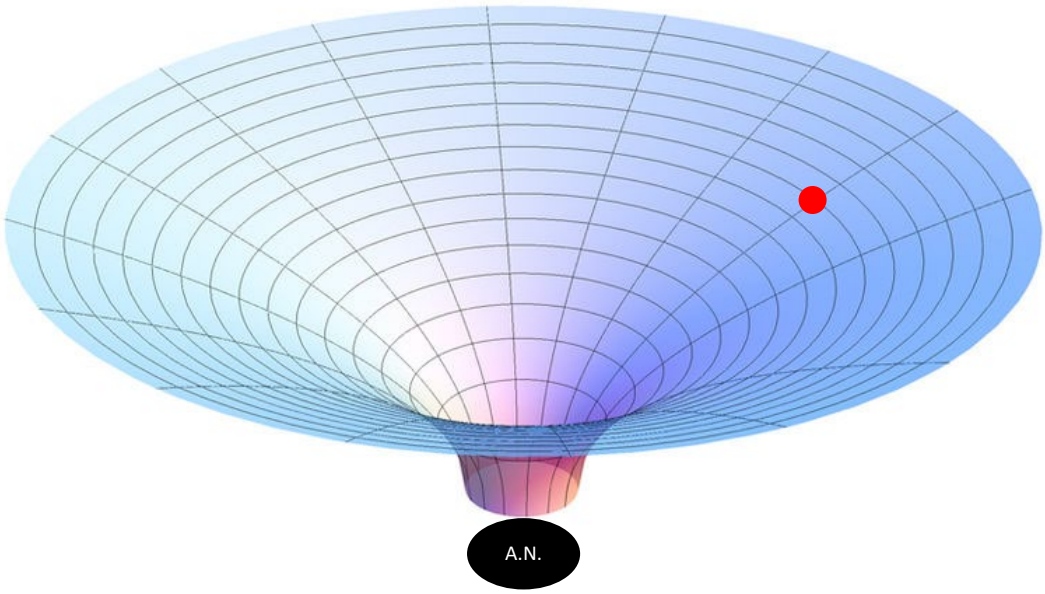
$$\overline{e}_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)} \cdot e_1$$

$$\overline{e}_2 = \frac{1}{\hat{r}} \cdot e_2$$

$$\overline{e}_3 = \hat{r}^2 sin^2\theta \cdot e_3$$

Así, como decimos, la métrica que 'percibiría' este Observador sería la de Minkowski (en coordenadas cilíndricas). Finalmente, para que sea realmente Estático tan sólo nos falta imponerle que sus coordenadas espaciales $\hat{r}, \theta, \varphi$ sean fijas. Así, será un Observador que permanecerá Estático espacialmente y para el que sólo fluiría el tiempo.

Si hacemos un esquema de la situación que estamos proponiendo, veríamos a nuestro observador marcado en color rojo en un escenario similar a algo así como:



Naturalmente, en este escenario, nuestro cuerpo sucumbiría, en caída libre, al influjo gravitatorio del Agujero Negro (o cualquier cuerpo masivo) y seguiría una geodésica hasta cruzar el horizonte de sucesos. Obviamente este tipo de caída, por el principio de equivalencia, no implicaría aceleración alguna. Sencillamente, sigue una geodésica y, por lo

[386] Ya adelantamos que estamos buscando un observador que esté caracterizado de manera que, para él, de manera parecida a como ocurría en Rindler, el espacio le parezca plano, no acelerado… es decir, perciba una métrica de Minkowski.

tanto, no está siendo acelerado, sino que sigue una trayectoria recta a lo largo de un espacio deformado.

Sin embargo, si queremos que dicho cuerpo permanezca espacialmente estático, es decir, que no caiga, habremos de someterlo a una aceleración que impida el seguimiento de dicha geodésica. Algo así como que tendríamos que sacarlo de su movimiento natural y uniforme (inercial) dentro de un espacio deformado mediante la imposición de una aceleración que le lleve a permanecer estático espacialmente… sencillamente, dejando el tiempo pasar.

¿Sería esto posible en el espaciotiempo de Schwarzschild? Perfectamente, pues vemos que en su métrica, no hay ningún coeficiente ($e_\alpha \cdot e_\beta$) que involucre al tiempo (y además no hay productos cruzados):

$$d\hat{s}^2 = -\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)d\hat{t}^2 + \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1} d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 d\theta^2 + \hat{r}^2 sin^2\theta d\varphi^2$$

Es decir, que permite una situación espacialmente estática. Esto es algo que, en realidad, ya sabíamos pues ya hemos establecido que existen Killings temporales en el espaciotiempo de Schwarzschild.

¿Qué aceleración sería ésta a la que habría que someter al observador para que no siga su 'curso natural'? ¿Cuál es su magnitud?

La única pista que tenemos sobre ella es que al ser aplicada a un observador estático éste se siente inmóvil y que sólo fluye el tiempo y, por lo tanto, podemos afirmar que, desde su punto de vista, su cuadrivelocidad sólo puede tener componente temporal[387]:

$$\underline{u} = u^0 \cdot e_0$$

Indaguemos sobre esto. Ya dijimos[388] que las cuadrivelocidades en el espaciotiempo eran:

$$\underline{u} \cdot \underline{u} = -c^2$$

Como estamos con una métrica adimensional en la que $c = 1$ podemos decir que:

$$\underline{u} \cdot \underline{u} = -1$$

Calculemos, a partir de ahí, la componente temporal de la cuadrivelocidad. Como hemos dicho, para el Observador Estático, sólo puede haber componente temporal en la cuadrivelocidad, por lo que:

$$\underline{u} \cdot \underline{u} = (u^0 \cdot e_0) \cdot (u^0 \cdot e_0) = -1$$

$$(u^0)^2 \cdot (e_0 \cdot e_0) = -1$$

$$(u^0)^2 \cdot \left(-\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)\right) = -1$$

[387] Obviamente bajo el punto de vista del propio observador estático que se siente inmóvil. Es posible que sienta efectos 'raros': gravedad, campos, etc… pero él se siente inmóvil. Fuera de la geodésica (que recordemos que se sigue por la naturaleza del espacio y no por aplicación de una aceleración) que lo llevaría al agujero negro.

[388] Decir dónde.

$$(u^0)^2 = -\frac{1}{-\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)}$$

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\hat{r}}}}$$

Ya tendríamos la cuadrivelocidad. Ahora bastará con derivar respecto al tiempo propio adimensional ($\hat{\tau}$) para obtener la cuadriaceleración[389] que necesita el observador para mantener esta cuadrivelocidad y, así, permanecer estático espacialmente, como hemos dicho, al menos desde su propio punto de vista.

$$\underline{\hat{a}} = \frac{d}{d\hat{\tau}}\underline{u}$$

Sabemos que la cuadrivelocidad $\underline{u}$ tiene cuatro coordendas: t, r, θ, φ. De ellas sabemos que sólo está 'activa' $\hat{r}$ (el radio normalizado, adimensional) pues u^0, que es la única componente que se desarrollar, es igual a $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\hat{r}}}}$. Por otro lado, por la regla de la cadena (en rojo) sabemos que:

$$\underline{\hat{a}} = \frac{d}{d\hat{\tau}}\underline{u} = \frac{dx^\alpha}{d\hat{\tau}} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial x^\alpha}$$

Que es un sumatorio en notación relativista del que, en nuestro caso, sólo sobrevive cuando $\alpha = 0$. Pero, fijémonos bien en la parte marcada en color rojo. Puesto que sabemos que:

$$\underline{u} = \frac{dx^\alpha}{d\tau} e_\alpha$$

Podemos decir, entonces que en nuestra expresión:

$$\underline{\hat{a}} = \frac{d}{d\hat{\tau}}\underline{u} = \frac{dx^\alpha}{d\hat{\tau}} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial x^\alpha}$$

$$\frac{dx^\alpha}{d\hat{\tau}} = \underline{u}^\alpha$$ [390]

Luego, podremos re-escribir como:

$$\underline{u}^\alpha \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial x^\alpha}$$

De una manera más simplificada:

$$\underline{\hat{a}} = \underline{u}^\alpha \cdot \partial_\alpha \underline{u}$$

---

[389] Vamos a poner $\underline{\hat{a}}$ (con *capirote*) para la cuadriaceleración porque en todo momento vamos a trabajar en un sistema adimensional. En la cuadrivelocidad no lo vamos a poner porque con los supraíndices sería un auténtico galimatías.

[390] Sólo la componente, claro.

Y puesto que sólo sobreviven los casos en que $\alpha = 0$, podemos escribirlo como:

$$\underline{\hat{a}} = \underline{u}^0 \cdot \partial_0 \underline{u}$$

O lo que es lo mismo:

$$\underline{\hat{a}} = \underline{u}^0 \cdot \partial_0 (u^0 \cdot e_0)$$

Ahora si desarrollamos la derivada del producto tendríamos que:

$$\underline{\hat{a}} = \underline{u}^0 \cdot [(\partial_0 u^0) e_0 + u^0 (\partial_0 e_0)]$$

Es decir:

$$\underline{\hat{a}} = \underline{u}^0 \cdot \left[\partial_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\hat{r}}}} \right) e_0 + \partial_0 e_0 \right]$$

Esto es:

$$\underline{\hat{a}} = \underline{u}^0 \cdot [0 + u^0 (\partial_0 e_0)]$$

$$\underline{\hat{a}} = \underline{u}^0 \cdot \left(u^0 (\partial_0 e_0) \right)$$

$$\underline{\hat{a}} = (\underline{u}^0)^2 \cdot (\partial_0 e_0)$$

Y la derivada de una base ya sabemos que se resuelve (y en este caso, además, lo tenemos ya calculado[391] para las bases del espaciotiempo de Schwarzschild) empleando los Símbolos de Christoffel:

$$\underline{\hat{a}} = (\underline{u}^0)^2 \cdot \Gamma_{00}^{\beta} e_{\beta}$$

Y vemos que el único símbolo que tiene dos subíndices iguales a cero es con una $\beta = 1$, por lo que:

$$\underline{\hat{a}} = (\underline{u}^0)^2 \cdot \Gamma_{00}^{1} e_1$$

Que, recordemos[392], era:

$$\Gamma_{00}^{1} = \frac{a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r} \right)$$

Pero recordemos que estamos trabajando en todo momento con unidades adimensionales, calibradas, normalizadas, por lo que podemos igualar la a a 1 y poner el radio como $\hat{r}$:

$$\Gamma_{00}^{1} = \frac{1}{2\hat{r}^2} \left(1 - \frac{1}{\hat{r}} \right)$$

Es decir, que la cuadriaceleración quedaría como:

---

[391] Decir dónde.

[392] Decir dónde.

$$\underline{\hat{a}} = (\underline{u}^0)^2 \cdot \frac{1}{2\hat{r}^2}\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right) e_1$$

Sustituyamos, ahora, el valor que teníamos para $\underline{u}^0$:

$$\underline{\hat{a}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\hat{r}}}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2\hat{r}^2}\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right) e_1$$

$$\underline{\hat{a}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)} \cdot \frac{1}{2\hat{r}^2}\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right) e_1$$

$$\underline{\hat{a}} = \frac{1}{2\hat{r}^2} e_1$$

Pero, observemos la base: e_1. ¿Es ésta la base 'interna' de nuestro Observador Estático?

No. Ésa es la base natural del espaciotiempo de Schwarzschild.

La base de nuestro Observador estático era:

$$Obs_{estático} = \{\overline{e}_0, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$$

Y, en concreto, para esta dimensión ($\overline{e}_1$), la habíamos definido como:

$$\overline{e}_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)} \cdot e_1$$

De donde:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)}} \overline{e}_1$$

Y, si sustituimos ahora:

$$\underline{\hat{a}} = \frac{1}{2\hat{r}^2} e_1$$

$$\underline{\hat{a}} = \frac{1}{2\hat{r}^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)}} \overline{e}_1$$

Que, ahora sí, es la aceleración tal y como la percibe el Observador Estático 'internamente', desde su propio punto de vista.

Para comprobar que esto es así y que, además, tiene carácter ***tensorial***, es decir, que su magnitud (la componente) es la misma con independencia de la base sobre la que se trabaje, podríamos haber llegado al mismo resultado calculando la magnitud de la cuadriaceleración expresada en términos de la base propia del espaciotiempo de Schwarzschild:

$$\underline{\hat{a}} = \frac{1}{2\hat{r}^2} e_1$$

$$\underline{\hat{a}} \cdot \underline{\hat{a}} = \frac{1}{2\hat{r}^2} \cdot \frac{1}{2\hat{r}^2} \cdot e_1 \cdot e_1$$

$$\underline{\hat{a}}^2 = \frac{1}{4\hat{r}^4} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)}$$

$$\underline{\hat{a}} = \sqrt{\frac{1}{4\hat{r}^4} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)}}$$

$$\underline{\hat{a}} = \frac{1}{2\hat{r}^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)}}$$

Que es la componente, justo, tal y como la habíamos calculado antes.

Si lo quisiéramos pasar ahora al Sistema Internacional y volverlo dimensional tan sólo tendríamos que hacer algunos apaños. Puesto que queremos llegar a una aceleración dimensional, es decir, algo que tenga las siguientes unidades:

$$a = \frac{m}{s^2}$$

Y tengo, para 'juguetear' (pues son los elementos con los que hemos hecho adimensionales la métrica y, en cadena, el resto de expresiones derivadas) esto:

$$a = \frac{2GM}{c^2}, \text{ con unidades} \rightarrow m \quad [393]$$

$$c = \text{velocidad de la luz, con unidades} \rightarrow \frac{m}{s}$$

Podría proponer, para llegar a las unidades deseadas $\left(\frac{m}{s^2}\right)$, lo siguiente: puesto que $c^2 = \frac{m^2}{s^2}$ y $a = m$, entonces:

$$\frac{c^2}{a} = \frac{m}{s^2}$$

Así, podremos deducir que si $\underline{\hat{a}}$ es una cuadriaceleración adimensional debe partir de una cuadriaceleración 'normal' (dimensional) a la que se le han quitado las dimensiones con este 'artefacto' (c^2/a):

$$\underline{\hat{a}} = \frac{\underline{a}}{c^2/a}$$

Por ello, si despejamos la cuadriaceleración 'normal' (dimensional):

[393] Para no confundir esta a con la a de la aceleración, vamos a usar esta a en color rojo en todo este desarrollo.

$$\underline{\hat{a}} \cdot \frac{c^2}{a} = \underline{a}$$

Y como sabemos que:

$$\underline{\hat{a}} = \frac{1}{2\hat{r}^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\hat{r}}}}$$

Sustituimos:

$$\underline{a} = \frac{1}{2\hat{r}^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\hat{r}}}} \cdot \frac{c^2}{a}$$

Y como sabemos que:

$$\hat{r} = \frac{r}{a}$$

Si sustituimos, tendremos que:

$$\underline{a} = \frac{a^2}{2r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a}{r}}} \cdot \frac{c^2}{a}$$

Que si desarrollamos será:

$$\underline{a} = \frac{a\, c^2}{2r^2 \sqrt{1 - \frac{a}{r}}}$$

Y puesto que:

$$a = \frac{2GM}{c^2}$$

Tendremos que, finalmente, el módulo de la cuadriaceleración dimensional que el Observador Estático percibe internamente en la dirección $\overline{e}_1$ para no caer al sumidero del Agujero Negro , será:

$$\underline{a} = \frac{2GM}{c^2} \frac{c^2}{2r^2 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2} \frac{1}{r}}}$$

$$\underline{a} = \frac{GM}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2\, r}}}$$

Es decir:

$$\underline{a} = \frac{GM}{r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2\, r}}}$$

Y esto es perfectamente coherente con lo que postulaba la Mecánica Newtoniana.

Recordemos: ¿qué decía la Mecánica Clásica? Suponiendo que la Masa Inercial y la Masa Gravitatoria son lo mismo (que no son exactamente lo mismo, ya lo veremos):

$$F = \frac{GMm_{grav}}{r^2}$$

Y puesto que:

$$F = m_{iner} \cdot a$$

Podemos decir que:

$$m_{iner} \cdot a = \frac{GMm_{grav}}{r^2}$$

Podemos decir que:

$$a = \frac{GM}{r^2}$$

Que es perfectamente compatible para nuestra expresión:

$$\underline{a} = \frac{GM}{r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2\, r}}}$$

En la que la parte resaltada en color azul es extremamente pequeña a no ser que estemos hablando de un cuerpo muy masivo con un $2GM$ (la masa del cuerpo 'atrayente') inmenso que contrarreste el denominador $c^2\, r$ (con un radio muy pequeño para hacer lo menor posible el denominador) para que tenga efectos significativos como sucede, por ejemplo, en torno a un agujero negro o, también, a un planeta que esté a una distancia radial muy pequeña de su estrella como le sucede a Mercurio.

Así, y retornando a nuestro hilo principal, tras haber construido un Observador Estático, vamos a estudiar cómo, desde su punto de vista, observa qué le sucede a un cuerpo que le pasa cerca mientras se dirige en caída libre hacia un Agujero Negro.

2.14.2. Lancemos un objeto hacia un Agujero Negro de Schwarzschild.

Para empezar, vamos a definir la aceleración que debe tener un Observador Estático que se sitúe, justo, en el Horizonte de Sucesos de un Agujero Negro[394]. A la esfera en que se mantiene dicha aceleración se le suele denominar 'Surface Gravity': κ (kappa) y que es algo así como la superficie esférica gravitatoria que hay en el Horizonte de Sucesos… algo así como la 'gravedad en la supuesta superficie de un Horizonte de Sucesos'.

En primer lugar, vamos a calcularla tal y como la mediría un Observador Externo. Es decir, nosotros, los observadores externos omniscientes, observadores en el infinito, vamos a ver qué aceleración debe tener el Observador Estático que está justo en el Horizonte de Sucesos.

Recordemos que sabemos que, internamente, el Observador Estático percibía la aceleración como:

$$\underline{a} = \frac{GM}{r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2\, r}}} \overline{e}_1$$

También habíamos definido que:

$$\overline{e}_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)} \cdot e_1$$

$$\hat{r} = \frac{r}{a}$$

$$a = \frac{2GM}{c^2}$$

Que está en unidades adimensionales. Como nos va a hacer falta que sea dimensional, vayamos adelantándolo:

$$\overline{e}_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{a}{r}\right)} \cdot e_1$$

$$\overline{e}_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \cdot e_1$$

Y puesto que lo queremos expresado en términos generales, para un Observador Externo que 'sólo' maneja la métrica y la base propia que se asocia al espaciotiempo de Schwarzschild ($B_{Schw} = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$), tan sólo tendremos que 'traducir' a la base oportuna: e_1.

[394] Realmente veremos que no está justo, justo en el horizonte de sucesos ya que si tal fuera el caso nuestras ecuaciones presentarían un comportamiento 'singular'… conformarían unan singularidad y de eso no podemos decir nada.

$$\underline{a} = \frac{GM}{r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2\, r}}} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \cdot e_1$$

$$\underline{a} = \frac{GM}{r^2} e_1$$

Y, puesto que queremos conocer dicha aceleración justo en el Horizonte de Sucesos, es decir, en el radio de Schwarzschild que no es otro que:

$$r_{Sch} = a = \frac{2GM}{c^2}$$

Entonces, la aceleración que estamos buscando para la 'Gravity Surface' tal como la definiríamos nosotros, Observadores Externos, es:

$$\underline{a} \to \kappa = \frac{GM}{{r_{Sch}}^2} e_1$$

$$\kappa = \frac{GM}{\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2} e_1$$

$$\kappa = \frac{c^4}{4GM} e_1$$

Que, si quisiéramos convertirlo a unidades adimensionales, bastaría, como hicimos antes, con hacer:

$$\hat{\kappa} = \frac{\kappa}{c^2/a} e_1$$

$$\hat{\kappa} = \frac{\frac{c^4}{4GM}}{c^2/a} e_1$$

$$\hat{\kappa} = \frac{\frac{c^4}{4GM}}{c^2 \cdot \frac{c^2}{2GM}} e_1$$

$$\hat{\kappa} = \frac{c^4}{4GM} \frac{2GM}{c^4} e_1$$

$$\hat{\kappa} = \frac{1}{2} e_1 \quad {}^{395}$$

[395] También podríamos haber tomado nuestra expresión para la cuadriaceleración adimensional de la página 626 de esta mismo sección: $\underline{\hat{a}} = \frac{1}{2\hat{r}^2} e_1$ y haber sustituido $\hat{r}^2$ por 1 pues sabemos que, en unidades adimensionales, el radio de Schwarzschild (a) es igual a 1 luego:

$$\hat{\kappa} = \frac{1}{2 \cdot 1^2} e_1 = \frac{1}{2} e_1$$

Ahora, para seguir avanzando y facilitar los cálculos, hagamos una convención. Vamos a expresar los coeficientes de la Métrica de Schwarzschild adimensional de una manera aún más reducida. Para ello, estaremos de acuerdo en afirmar que en una expresión como la que tenemos:

$$d\hat{s}^2 = -\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)d\hat{t}^2 + \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1} d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 d\theta^2 + \hat{r}^2 sin^2\theta d\varphi^2$$

Podemos decir que los coeficientes de la métrica (resaltados en color rojo) son funciones específicas de $\hat{r}$ de manera que si definimos:

$$f_{(\hat{r})} = \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)$$

Obviamente, la métrica podrá expresarse como:

$$d\hat{s}^2 = -f_{(\hat{r})}d\hat{t}^2 + f_{(\hat{r})}{}^{-1} d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 d\theta^2 + \hat{r}^2 sin^2\theta d\varphi^2$$

$$d\hat{s}^2 = -f_{(\hat{r})}d\hat{t}^2 + f_{(\hat{r})}{}^{-1} d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 (d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$

Y si introducimos una nueva convención para la parte angular de manera que:

$$d\Omega^2 = (d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$

Finalmente tendríamos la cómoda forma:

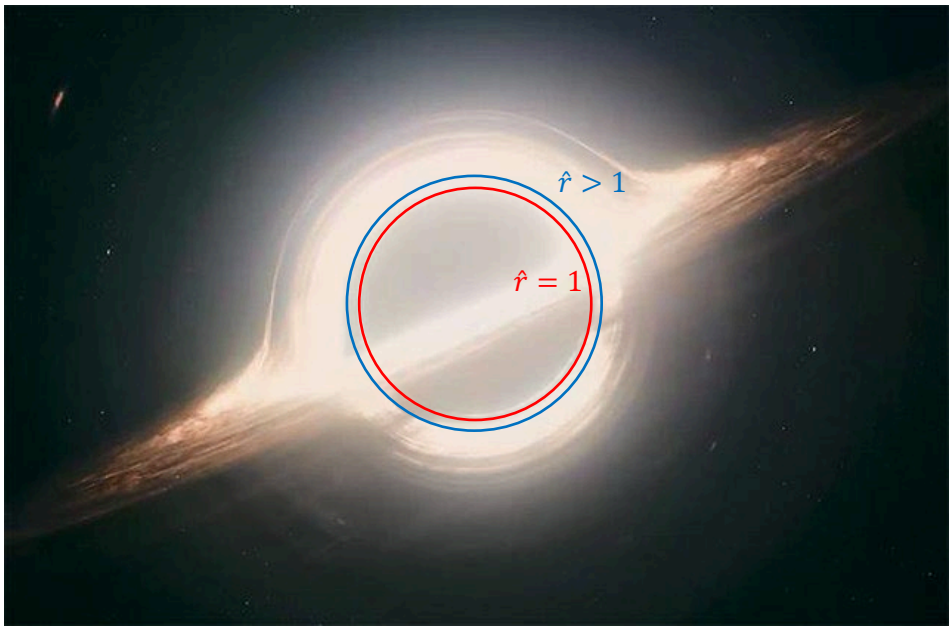
$$d\hat{s}^2 = -f_{(\hat{r})}d\hat{t}^2 + f_{(\hat{r})}{}^{-1} d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 d\Omega^2$$

Pero puesto que el experimento mental que vamos a realizar va a transcurrir en una dimensión espacial exclusivamente radial (más el tiempo) y, además, lo que suceda en cualquier dirección radial va ser equivalente porque el Espaciotiempo de Schwarzschild presenta simetría esférica, podremos reducir la métrica que vamos a usar a esto:

$$d\hat{s}^2 = -f_{(\hat{r})}d\hat{t}^2 + f_{(\hat{r})}{}^{-1} d\hat{r}^2$$

Ahora pensemos en lo que sucede en el Horizonte de Sucesos. Efectivamente, si nos ponemos justo en el Horizonte de Sucesos donde $\hat{r} = 1$, la métrica que tenemos hará cosas

un poco raras pues resulta que en coeficiente $f_{(\hat{r})}{}^{-1}$ nos va a surgir una indeterminación[396]. Para soslayar esta dificultad pensemos en un lugar que está un poco más hacia acá (hacia fuera) del Horizonte de Sucesos:



Y supongamos ahora que ***ponemos a un observador en ese lugar cercano al Horizonte de sucesos en que $\hat{r}$ es ligeramente mayor que 1***. Este observador, por el principio de equivalencia, sentirá que su espacio es plano. No verá nada raro en el entorno que le rodea. Este observador construirá su métrica usando su 'distancia propia'[397] y, en tal caso, la parte espacial le quedaría con la siguiente forma:

$$f_{(\hat{r})}{}^{-1} d\hat{r}^2 = d\hat{\rho}^2$$

Donde $\hat{\rho}$ son las unidades que él emplea para medir en su mundo. Es decir, que mediría usando $\hat{\rho}$ como sus unidades locales. Usaría $\hat{\rho}$ como vector base radial para medir las distancias espaciales en esa dirección (la única que vamos a manejar en este experimento mental). Y definiría su elemento de línea como:

$$d\hat{s}^2 = -f_{(\hat{r})} d\hat{t}^2 + d\hat{\rho}^2$$

Ahora, como estamos diciendo que no estamos en $\hat{r} = 1$, sino en algo aproximadamente igual, podemos usar el Polinomio de Taylor para encontrar una expresión aproximada a nuestra función $f_{(\hat{r})}$ en torno a 1 (hacemos una sola iteración):

$$f_{(\hat{r})} = f_{(1)} + f'_{(1)}(\hat{r} - 1)$$

---

[396] $\left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{1}\right)} = \frac{1}{(1-1)} = \frac{1}{0}$ → el horror que el señor Kurtz mencionaba como últimas palabras en el Corazón en las Tinieblas (siento el spoiler). Una singularidad.

[397] Decir dónde se dijo esto.

Sabemos que $f_{(1)}$ es la función $f_{(\hat{r})}$ evaluada en 1 y que eso es igual a cero[398], así que nos queda:

$$f_{(\hat{r})} = f'_{(1)}(\hat{r} - 1)$$

Pero fijémonos en una cosa (as bajo la manga): ¿qué es $f'_{(1)}$?

Veamos:

$$f_{(\hat{r})} = \left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)$$

$$f'_{(\hat{r})} = -\frac{-1}{\hat{r}^2} = \frac{1}{\hat{r}^2}$$

Luego:

$$f'_{(1)} = \frac{1}{1^2} = 1$$

Y si recordamos que[399]:

$$\hat{\kappa} = \frac{1}{2}$$

Podríamos decir (falta añadir la demostración) que:

$$\hat{\kappa} = \frac{1}{2} \cdot f'_{(1)}$$

Si de aquí despejamos $f'_{(1)}$:

$$f'_{(1)} = 2\hat{\kappa}$$

Luego podemos expresar nuestra aproximación:

$$f_{(\hat{r})} = f'_{(1)}(\hat{r} - 1)$$

Como:

$$f_{(\hat{r})} = 2\hat{\kappa}(\hat{r} - 1)$$

De manera que si ahora tomamos la expresión que hemos usado para identificar la distancia propia que usaría el observador cerca del Horizonte de Sucesos:

$$f_{(\hat{r})}{}^{-1} d\hat{r}^2 = d\hat{\rho}^2$$

$$\frac{1}{f_{(\hat{r})}} d\hat{r}^2 = d\hat{\rho}^2$$

[398] $f_{(\hat{r})} = \left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)$ evaluada en 1: $\left(1 - \frac{1}{1}\right) = 0$.

[399] Página 631.

Y eliminamos los cuadrados:

$$\frac{1}{\sqrt{f_{(\hat{r})}}}d\hat{r} = d\hat{\rho}$$

Y usamos, ahora, la expresión que hemos encontrado realizando una aproximación por desarrollos en Series de Taylor para $f_{(\hat{r})}$, tenemos que[400]:

$$\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}(\hat{r}-1)}}d\hat{r} \approx d\hat{\rho}$$

Así, para encontrar $\hat{\rho}$, que no es otra cosa que la distancia propia del Observador Estático cercano al Horizonte de Sucesos, tan sólo tendríamos que integrar a ambos lados:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}(\hat{r}-1)}}d\hat{r} \approx \int d\hat{\rho}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}(\hat{r}-1)}}d\hat{r} \approx \hat{\rho}$$

Pero, ¿desde dónde hasta dónde integramos? Pues desde 1, que es el radio de Schwarzschild y donde está el Horizonte de Sucesos, hasta el $\hat{r}$ aproximado que hemos generado y don de va a estar el Observador Estático en los aledaños del Horizonte de Sucesos, es decir:

$$\int_1^{\hat{r}} \frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}(\hat{r}-1)}}d\hat{r} \approx \hat{\rho}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}}}\int_1^{\hat{r}} \frac{1}{\sqrt{(\hat{r}-1)}}d\hat{r} \approx \hat{\rho} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}}}\int_1^{\hat{r}} (\hat{r}-1)^{-\frac{1}{2}}d\hat{r} \approx \hat{\rho} \quad [401]$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}}}\left|\frac{(\hat{r}-1)^{\frac{1}{2}}}{1/2}\right|_1^{\hat{r}} \approx \hat{\rho}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}}}\cdot\left[\left(\frac{(\hat{r}-1)^{\frac{1}{2}}}{1/2}\right)-\left(\frac{(1-1)^{\frac{1}{2}}}{1/2}\right)\right] \approx \hat{\rho}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}}}\cdot\left[\left(\frac{(\hat{r}-1)^{\frac{1}{2}}}{1/2}\right)-\left(\frac{(0)^{\frac{1}{2}}}{1/2}\right)\right] \approx \hat{\rho}$$

[400] Obsérvese que como vamos a introducir la expresión aproximada, a partir de ahora tendremos que usar ≈.

[401] $\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}}}$ sale del integrando porque $\hat{\kappa}$ no está en función de $\hat{r}$: $\hat{\kappa} = \frac{c^4}{4GM}\frac{2GM}{c^4}$. Véase página 631 en esta sección.

$$\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}}}\cdot\left(\frac{(\hat{r}-1)^{\frac{1}{2}}}{1/_2}\right)\approx\hat{\rho}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}}}\cdot 2\sqrt{\hat{r}-1}\approx\hat{\rho}$$

Luego, finalmente:

$$\hat{\rho}\approx\frac{2}{\sqrt{2\hat{\kappa}}}\sqrt{\hat{r}-1}$$

Siendo esto así, y puesto que la métrica que define el Observador Estático ubicado *casi* en el Horizonte de Sucesos, es:

$$d\hat{s}^2=-f_{(\hat{r})}d\hat{t}^2+d\hat{\rho}^2$$

Y puesto que, tal y como decimos, el Observador Estático está *casi* en el Horizonte de Sucesos, en vez de $f_{(\hat{r})}$, usaremos la aproximación que hemos hecho, es decir:

$$d\hat{s}^2\approx-2\hat{\kappa}(\hat{r}-1)d\hat{t}^2+d\hat{\rho}^2$$

Pero, claro, dicho observador lo mide todo en $\hat{\rho}$ y, por lo tanto, tendremos que tenerlo todo en función de $\hat{\rho}$. Para ello hagamos alguna simple transformación, despejemos $\hat{r}$ y pongámoslo en función de $\hat{\rho}$. Puesto que hemos dicho que:

$$\hat{\rho}\approx\frac{2}{\sqrt{2\hat{\kappa}}}\sqrt{\hat{r}-1}$$

Entonces:

$$\hat{\rho}^2\approx\frac{4}{2\hat{\kappa}}\hat{r}-1$$

$$\hat{\rho}^2\approx\frac{2}{\hat{\kappa}}\hat{r}-1$$

Por lo que:

$$\hat{\rho}^2\frac{\hat{\kappa}}{2}\approx\hat{r}-1$$

De manera que despejando en el elemento de línea que define el vecino del Horizonte de Sucesos tendríamos que:

$$d\hat{s}^2\approx-2\hat{\kappa}(\hat{r}-1)d\hat{t}^2+d\hat{\rho}^2$$

$$d\hat{s}^2\approx-2\hat{\kappa}\cdot\hat{\rho}^2\frac{\hat{\kappa}}{2}d\hat{t}^2+d\hat{\rho}^2$$

$$d\hat{s}^2\approx-\hat{\rho}^2\,\hat{\kappa}^2d\hat{t}^2+d\hat{\rho}^2$$

Ahora introducimos un último cambio de variable para dejar la métrica perfectamente adaptada para trabajar con ella de la manera más fácilmente posible y para ello definimos:

$$\hat{\eta} = \hat{\kappa}\, t$$

De manera que la métrica definitivamente, para el habitante de las cercanías del Horizonte de Sucesos queda como:

$$d\hat{s}^2 \approx -\hat{\rho}^2\, d\hat{\eta}^2 + d\hat{\rho}^2 \qquad ^{402}$$

Si pusiéramos todas todas las dimensiones (no sólo la radial) la métrica sería:

$$d\hat{s}^2 \approx -\hat{\rho}^2\, d\hat{\eta}^2 + d\hat{\rho}^2 + \hat{r}^2 d\Omega^2$$

Pero como decimos que en esta zona diferencialmente próxima de $\hat{r} = 1, \hat{r} \approx 1$, podríamos aproximar y terminar definiendo la métrica completa del observador que habita en la vecindad del Horizonte de Sucesos es:

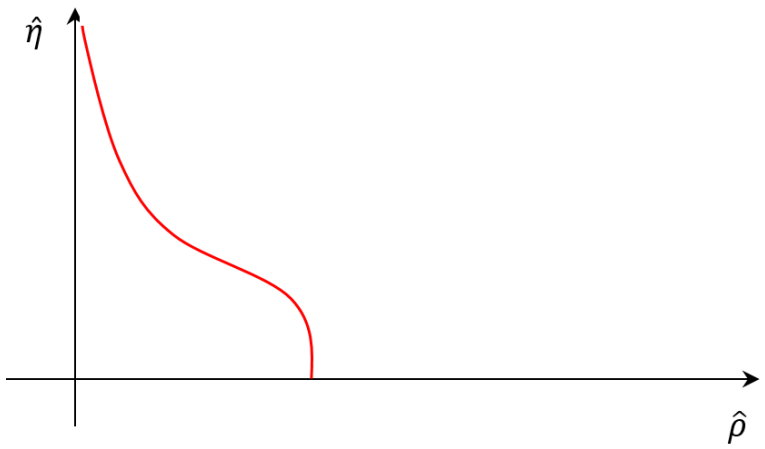
$$d\hat{s}^2 \approx -\hat{\rho}^2\, d\hat{\eta}^2 + d\hat{\rho}^2 + d\Omega^2$$

Donde eta ($\hat{\eta}$) es *casi* el tiempo (sólo multiplicada por un factor ($\hat{\kappa}$) que es independiente y, por ello, constante respecto a él) y $\hat{\rho}$ es una distancia propia normal y corriente: tiempo y espacio medido localmente por el observador que está cerca del Horizonte de Sucesos.

Esto, a nada que nos fijemos, nos deberá recordar mucho a Rindler[403]:

$$d\hat{s}^2 \approx -\hat{\rho}^2\, d\hat{\eta}^2 + d\hat{\rho}^2$$

En el caso de Rindler, si una partícula no está acelerada para mantener una posición determinada, es decir, si está libre y, por lo tanto, sigue, sin aceleración alguna, una geodésica del espacio (que es lo mismo que estar en caída libre), en un esquema espaciotemporal (ya vamos a usar $\hat{\rho}$ para espacio y $\hat{\eta}$ para tiempo) seguiría la siguiente trayectoria hundiéndose en el agujero negro:



[402] Téngase en cuenta que en $d\hat{\eta}^2$ la $\hat{\kappa}$ saldrá de la derivación: $\hat{\kappa}^2 d\hat{t}^2$.

[403] Recordemos que el espaciotiempo de Rindler era como el de Minkowski pero con unas coordenadas diferentes que permitían 'alinear' las aceleraciones de cuerpos de manera que, internamente, un observador seleccionado previamente podría ver el modelo como perfectamente plano e inercial aunque haya aceleraciones. Dicho observador definiría su elemento de línea como:

$$ds^2 \equiv -{x_1}^2 c^2 {d\tau_1}^2 + {dx_1}^2$$

Para recordarlo véase página 334.

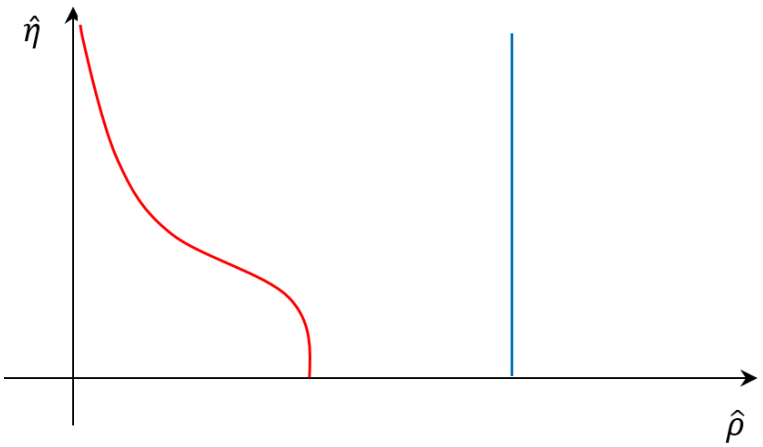
Este esquema es perfectamente compatible con el escenario que estamos planteando, es decir, que, según avanza el tiempo ($\hat{\eta}$), la distancia ($\hat{\rho}$) al agujero negro se va haciendo menor. De hecho se hace menor hasta llegar a $\hat{\rho} = 0$ que equivale exactamente a la llegada de la partícula al Horizonte de Sucesos pues cuando $\hat{\rho} = 0$ resulta que $\hat{r} = 1$, pues:

$$\hat{\rho} \approx \frac{2}{\sqrt{2\hat{\kappa}}}\sqrt{\hat{r} - 1}$$

$$\hat{\rho} \approx \frac{2}{\sqrt{2\hat{\kappa}}}\sqrt{1 - 1} \rightarrow \hat{\rho} \approx \frac{2}{\sqrt{2\hat{\kappa}}} \cdot 0 \rightarrow \hat{\rho} \approx 0$$

Además, si bien un Observador Externo tendría la impresión de que la trayectoria roja que hemos trazado para la partícula presenta un comportamiento asintótico con el eje del tiempo, es decir, que nunca llegaría a $\hat{\rho} \approx 0$, hemos de recordar que no es lo mismo el tiempo, digamos, general que percibe un Observador Externo que el tiempo propio que percibe la partícula o, mejor, el Observador que se ha acoplado a dicha partícula que se acerca al Horizonte de Sucesos. El Observador Externo tendrá la sensación de que el tiempo se hace infinito, es decir, que la partícula se queda como detenida cuando está muy cerca del Horizonte de Sucesos pero la partícula, que mide según su tiempo propio, por supuesto que acaba llegando en un tiempo determinado al mismo (¡y tanto que lo hace!).

Si quisiéramos, sin embargo, que el Observador acoplado a la partícula permaneciera Estático a una distancia fija del Horizonte de sucesos, ya sea orbitando o, como en nuestro caso, fija en una distancia radial $\hat{\rho}$, tendríamos que someterla a una aceleración que la 'sacara' de la geodésica y que trazara, en nuestro esquema, una trayectoria como la siguiente (la marcamos en color azul):



Este Observador Estático, que, a nuestros ojos, según nuestro esquema, traza una línea recta, realmente, vista desde dentro de un espacio curvado, por supuesto, está teniendo que ser sometido a una aceleración que le impida caer libremente siguiendo una geodésica. El observador que 'viaja' con la partícula 'roja' no sentirá nada, sólo que cae. El observador en la partícula 'azul', en cambio, debe sentir que hay algún motor, alguna fuerza, que le sostiene y le impide caer. Una fuerza, una aceleración, que le permite permanecer estático.

Y, recordemos, justamente, que para que el espaciotiempo de Rindler 'pareciera' plano, es decir, que las diferentes partículas dibujaran cuadrículas ortogonales, necesariamente, éstas, tenían que estar aceleradas. Rindler nos va a ser de total utilidad en este escenario.

Ahora, para seguir con nuestro estudio, vamos a calcular los Símbolos de Christoffel de este espacio de Rindler que acabamos de retomar.

Así, si el elemento de línea es:

$$d\hat{s}^2 \approx -\hat{\rho}^2\, d\hat{\eta}^2 + d\hat{\rho}^2$$

Donde ya hemos dicho que:

$$\hat{\eta} = x^0 \quad // \quad \hat{\rho} = x^1$$

Así, puesto que la base es ortogonal, resulta que:

$$e_0 \cdot e_0 = -\hat{\rho}^2$$

$$e_1 \cdot e_1 = 1$$

$$e_1 \cdot e_0 = e_0 \cdot e_1 = 0$$

Y para calcular los Símbolos de Christoffel, usaremos el 'truco' que ya hemos usado tantas veces: derivar parcialmente estas combinaciones de las bases según el cambio de cada una de las coordenadas: $\hat{\eta} = x^0$, $\hat{\rho} = x^1$.

1- $\partial_0(e_0 \cdot e_0) = \partial_0(-\hat{\rho}^2)$

Esto es:

$$\partial_0(e_0 \cdot e_0) = 0$$

$$(\partial_0 e_0) \cdot e_0 + e_0 \cdot (\partial_0 e_0) = 0$$

$$(\Gamma^0_{00} e_0 + \Gamma^1_{00} e_1) \cdot e_0 + e_0 \cdot (\Gamma^0_{00} e_0 + \Gamma^1_{00} e_1) = 0$$

$$2(\Gamma^0_{00} e_0 + \Gamma^1_{00} e_1) \cdot e_0 = 0$$

$$2(\Gamma^0_{00} e_0 e_0 + \Gamma^1_{00} e_1 e_0) = 0$$

$$2(\Gamma^0_{00}(-\hat{\rho}^2) + \Gamma^1_{00}(0)) = 0$$

$$2\Gamma^0_{00}(-\hat{\rho}^2) = 0$$

$$\Gamma^0_{00} = 0$$

2- $\partial_1(e_0 \cdot e_0) = \partial_1(-\hat{\rho}^2)$

$$\partial_1(e_0 \cdot e_0) = -2\,\hat{\rho}$$

$$(\partial_1 e_0) \cdot e_0 + e_0 \cdot (\partial_1 e_0) = -2\,\hat{\rho}$$

$$(\Gamma_{10}^{0}e_0 + \Gamma_{10}^{1}e_1)\cdot e_0 + e_0\cdot(\Gamma_{10}^{0}e_0 + \Gamma_{10}^{1}e_1) = -2\,\hat{\rho}$$

$$2(\Gamma_{10}^{0}e_0 + \Gamma_{10}^{1}e_1)\cdot e_0 = -2\,\hat{\rho}$$

$$2(\Gamma_{10}^{0}e_0e_0 + \Gamma_{10}^{1}e_1e_0) = -2\,\hat{\rho}$$

$$2\big(\Gamma_{10}^{0}(-\hat{\rho}^2)\big) = -2\,\hat{\rho}$$

$$\Gamma_{10}^{0} = \frac{1}{\hat{\rho}} = \Gamma_{01}^{0}$$

3- $\partial_0(e_1\cdot e_1) = \partial_0(1)$

$$\partial_0(e_1\cdot e_1) = 0$$

$$(\partial_0 e_1)\cdot e_1 + e_1\cdot(\partial_0 e_1) = 0$$

$$(\Gamma_{01}^{0}e_0 + \Gamma_{01}^{1}e_1)\cdot e_1 + e_1\cdot(\Gamma_{01}^{0}e_0 + \Gamma_{01}^{1}e_1) = 0$$

$$2(\Gamma_{01}^{0}e_0 + \Gamma_{01}^{1}e_1)\cdot e_1 = 0$$

$$2(\Gamma_{01}^{0}e_0e_1 + \Gamma_{01}^{1}e_1e_1)\cdot e_1 = 0$$

$$2\left(\left(\frac{1}{\hat{\rho}}\right)(0) + \Gamma_{01}^{1}(1)\right) = 0$$

$$2\Gamma_{01}^{1} = 0$$

$$\Gamma_{01}^{1} = 0 = \Gamma_{10}^{1}$$

4- $\partial_1(e_1\cdot e_1) = \partial_1(1)$

$$\partial_1(e_1\cdot e_1) = \partial_1(1)$$

$$(\partial_1 e_1)\cdot e_1 + e_1\cdot(\partial_1 e_1) = 0$$

$$(\Gamma_{11}^{0}e_0 + \Gamma_{11}^{1}e_1)\cdot e_1 + e_1\cdot(\Gamma_{11}^{0}e_0 + \Gamma_{11}^{1}e_1) = 0$$

$$2(\Gamma_{11}^{0}e_0 + \Gamma_{11}^{1}e_1)\cdot e_1 = 0$$

$$2(\Gamma_{11}^{0}e_0e_1 + \Gamma_{11}^{1}e_1e_1) = 0$$

$$2\Gamma_{11}^{1} = 0$$

$$\Gamma_{11}^{1} = 0$$

5- $\partial_0(e_0\cdot e_1) = \partial_0(0)$

$$\partial_0(e_0\cdot e_1) = 0$$

$$(\partial_0 e_0)\cdot e_1 + e_0\cdot(\partial_0 e_1) = 0$$

$$(\Gamma_{00}^{0}e_0 + \Gamma_{00}^{1}e_1)\cdot e_1 + e_0\cdot(\Gamma_{01}^{0}e_0 + \Gamma_{01}^{1}e_1) = 0$$

$$(\Gamma_{00}^{0}e_0e_1 + \Gamma_{00}^{1}e_1e_1) + (\Gamma_{01}^{0}e_0e_0 + \Gamma_{01}^{1}e_1e_0) = 0$$

$$(\Gamma_{00}^{1}e_1e_1) + (\Gamma_{01}^{0}e_0e_0) = 0$$

$$(\Gamma_{00}^{1}) + \left(\frac{1}{\hat{\rho}}(-\hat{\rho}^2)\right) = 0$$

$$(\Gamma_{00}^{1}) + (-\hat{\rho}) = 0$$

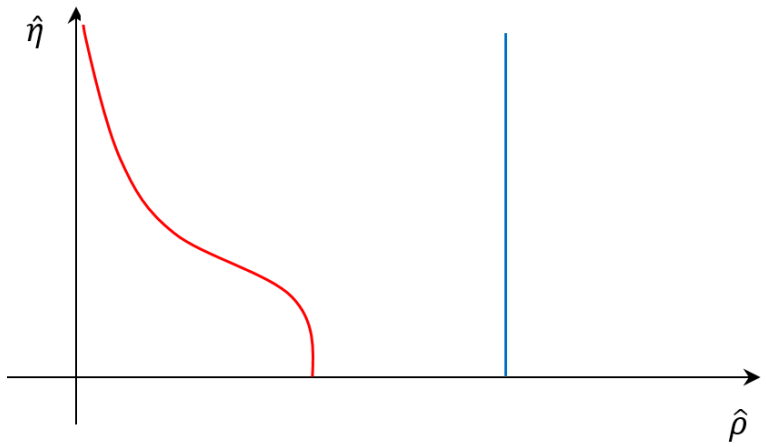
$$\Gamma_{00}^{1} = \hat{\rho}$$

Y ya tendríamos todos los Símbolos de Christoffel asociados a esta métrica y que son los que necesitaremos para calcular la aceleración que debe tener (y percibir localmente) un Observador para permanecer Estático en las cercanías del Horizonte de Sucesos. Los únicos que son diferentes de cero son:

$$\Gamma_{10}^{0} = \Gamma_{01}^{0} = \frac{1}{\hat{\rho}} \quad \rightarrow \quad \Gamma_{10}^{0} = \Gamma_{\hat{\eta}\hat{\rho}}^{\hat{\eta}} = \frac{1}{\hat{\rho}}$$

$$\Gamma_{00}^{1} = \hat{\rho} \quad \rightarrow \quad \Gamma_{\hat{\eta}\hat{\eta}}^{\hat{\rho}} = \hat{\rho}$$

Ahora, para calcular dicha aceleración, como es de imaginar, trabajaremos (derivaremos) sobre la cuadriaceleración del Observador Estático (trayectoria marcada en color azul) en un esquema como el siguiente:



Dicha cuadrivelocidad, al ser un Observador Estático espacialmente, sólo tendrá componente temporal ($\hat{\eta}$), es decir que sólo puede ser:

$$\underline{u} = u^0 e_0$$

Si queremos calcular su módulo:

$$\underline{u} \cdot \underline{u} = (u^0 e_0) \cdot (u^0 e_0) = (u^0)^2 (e_0 e_0) = (u^0)^2 (-\hat{\rho}^2) \quad [404]$$

Y puesto que estamos en un entorno 'adimensional' en el que $c = 1$, podemos reescribir nuestra expresión ya conocida:

$$\underline{u} \cdot \underline{u} = -c^2 \quad [405]$$

Como:

$$\underline{u} \cdot \underline{u} = -1$$

De manera que, definitivamente, podemos decir sobre la cuadrivelocidad de nuestro Observador Estático que:

$$(u^0)^2 (-\hat{\rho}^2) = -1$$

De donde podemos despejar:

$$u^0 = \frac{1}{\hat{\rho}}$$

Luego, la cuadriaceleración es:

$$\underline{u} = u^0 e_0 = \frac{1}{\hat{\rho}} e_0$$

Una vez alcanzado este resultado, procedamos a derivar en base al tiempo propio del Observador Estático:

$$\underline{a} = \frac{d}{d\hat{\tau}} \underline{u}$$

$$\underline{a} = \frac{d}{d\hat{\tau}} \left(\frac{1}{\hat{\rho}} e_0 \right)$$

A lo que hay que aplicar, naturalmente, la regla de la cadena (la marcamos en color rojo):

$$\underline{a} = \frac{dx^\alpha}{d\hat{\tau}} \partial_\alpha \left(\frac{1}{\hat{\rho}} e_0 \right)$$

Y puesto que sabemos que sólo sobrevive la componente temporal $\alpha = 0$, entonces:

$$\underline{a} = \frac{dx^0}{d\hat{\tau}} \partial_0 \left(\frac{1}{\hat{\rho}} e_0 \right)$$

Pero sabemos que:

---

[404] Recordemos el elemento de línea de este vecino del Horizonte de Sucesos:

$$d\hat{s}^2 \approx -\hat{\rho}^2 \, d\hat{\eta}^2 + d\hat{\rho}^2$$

[405] Decir dónde.

$$\frac{dx^0}{d\hat{\tau}} = u^0$$

Luego, reescribamos:

$$\underline{a} = u^0 \partial_0 \left(\frac{1}{\hat{\rho}} e_0\right)$$

Y puesto que $\hat{\rho}$ es una dirección radial que no está en función del tiempo, puede salir del operador de la derivada como una constante, es decir:

$$\underline{a} = u^0 \frac{1}{\hat{\rho}} (\partial_0 e_0)$$

Ya hemos dicho que:

$$u^0 = \frac{1}{\hat{\rho}}$$

Luego:

$$\underline{a} = \frac{1}{\hat{\rho}} \frac{1}{\hat{\rho}} (\partial_0 e_0)$$

$$\underline{a} = \frac{1}{\hat{\rho}^2} (\partial_0 e_0)$$

Y aquí es donde vamos a emplear la conexión métrica (los Símbolos de Christoffel) que hemos calculado recientemente:

$$\underline{a} = \frac{1}{\hat{\rho}^2} \left[\Gamma_{00}^{\beta} e_\beta\right]$$

Es decir, en nuestro mundo bidimensional (tiempo ($\hat{\eta} \rightarrow x^0$) y radio ($\hat{\rho} \rightarrow x^1$)), el sumatorio queda como:

$$\underline{a} = \frac{1}{\hat{\rho}^2} [\Gamma_{00}^{0} e_0 + \Gamma_{00}^{1} e_1]$$

De lo que sabemos que:

$$\underline{a} = \frac{1}{\hat{\rho}^2} [0\ e_0 + \hat{\rho}\ e_1]$$

$$\underline{a} = \frac{1}{\hat{\rho}^2} \hat{\rho}\ e_1$$

$$\underline{a} = \frac{1}{\hat{\rho}}\ e_1 \rightarrow \frac{1}{\hat{\rho}}\ e_{\hat{\rho}}$$

Que está expresado en términos de $\hat{\rho}$, es decir, en un Sistema de Referencia local, a saber, el del Observador Estático que permanece en las postrimerías del Horizonte de Sucesos.

Expresémoslo ahora según el sistema de coordenadas de un observador lejano (nosotros, los Observadores Externos Omniscientes). Para ello recordemos la expresión que usábamos para transformar bases[406]:

$$e_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha} e_\beta$$

Es decir, para alcanzar la nueva base, comparamos (en realidad dividimos) el modo en que cambian (las derivadas parciales) las coordenadas de cada sistema.

Así, ahora, teniendo en cuenta la definición que tenemos para $\hat{\rho}$[407]:

$$\hat{\rho} \approx \frac{2}{\sqrt{2\hat{\kappa}}}\sqrt{\hat{r}-1}$$

Hagamos el cambio de variables (recordemos que buscamos expresar las cosas en términos de $\hat{r}$, la distancia radial que mide el Observador Lejano, Externo):

$$e_{\hat{r}} = \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{r}} e_{\hat{\rho}}$$

$$e_{\hat{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial \hat{r}} \frac{2}{\sqrt{2\hat{\kappa}}}\sqrt{\hat{r}-1}\right) e_{\hat{\rho}}$$

$$e_{\hat{r}} = \frac{2}{\sqrt{2\hat{\kappa}}}\left(\frac{\partial}{\partial \hat{r}}\sqrt{\hat{r}-1}\right) e_{\hat{\rho}}$$

$$e_{\hat{r}} = \frac{2}{\sqrt{2\hat{\kappa}}}\left(\frac{1}{2\sqrt{\hat{r}-1}}\right) e_{\hat{\rho}}$$

$$e_{\hat{r}} = \frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}}}\frac{1}{\sqrt{\hat{r}-1}} e_{\hat{\rho}}$$

De donde despejamos $e_{\hat{\rho}}$:

$$\sqrt{2\hat{\kappa}}\sqrt{\hat{r}-1} e_{\hat{r}} = e_{\hat{\rho}}$$

Que podemos sustituir en nuestra expresión para la cuadriaceleración:

$$\underline{a} = \frac{1}{\hat{\rho}}\, e_{\hat{\rho}}$$

$$\underline{a} = \frac{1}{\hat{\rho}}\, \sqrt{2\hat{\kappa}}\sqrt{\hat{r}-1} e_{\hat{r}}$$

Y, para que sea 'comprensible' y coherente para el Observador Externo, volvemos a sustituir $\hat{\rho}$ para dejarlo todo en función de $\hat{r}$:

[406] Decir dónde, muy atrás.

[407] Véase página 637.

$$\underline{a} = \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{2\hat{\kappa}}}\sqrt{\hat{r}-1}\right)} \sqrt{2\hat{\kappa}}\sqrt{\hat{r}-1}e_{\hat{r}}$$

$$\underline{a} = \frac{\sqrt{2\hat{\kappa}}}{2\sqrt{\hat{r}-1}} \sqrt{2\hat{\kappa}}\sqrt{\hat{r}-1}e_{\hat{r}}$$

$$\underline{a} = \frac{2\hat{\kappa}}{2}\ e_{\hat{r}}$$

$$\underline{a} = \hat{\kappa}\ e_{\hat{r}}$$

Es decir el Observador Lejano 'medirá', para el Observador Estático cercano al Horizonte de Sucesos, justamente, la 'Surface gravity' ($\hat{\kappa}$) aplicada en la dirección radial. Es decir, en unidades adimensionales, como sabemos, $\hat{\kappa} = 1/2$, luego $\underline{a} = \frac{1}{2}\ e_{\hat{r}}$.

Ahora supongamos que el observador lejano 'se deja caer' hacia el agujero negro de alguna manera y, en su caída libre hacia el agujero negro (recorriendo una geodésica, es decir, en un sistema lo más 'inercial' posible en Relatividad General) pasa cerca del Observador Estático que permanece cerca del Horizonte de Sucesos. ¿Cómo ve el Observador Externo que ahora cae al Observador Estático cuando pasa junto a él?

De entrada, podemos adelantar un par de cosas:

- El Observador Externo que cae siente siempre que su espacio es plano pues al recorrer una geodésica, percibe su espacio como perfectamente plano y normalizado.
- El Observador Externo que cae observa, al pasar cerca del Observador Estático, que este último está acelerado (claro, no cae como él, es decir, ve que no le es comóvil puesto que no cae con él, no le acompaña en la caída).

Pero veamos qué sucede realmente.

Recordemos que para transformar las coordenadas (los ejes) de un espacio de Minkowski (tiempo t // espacio x) en uno de Rindler (tiempo $t_{Rindler}$ // espacio $x_{Rindler}$), bastaba con realizar la siguiente transformación[408]:

$$t_{Rindler} = x\ sinh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)$$

$$x_{Rindler} = x\ cosh\left(\frac{c}{b}\tau_1\right) \quad [409]$$

Que, según la nomenclatura que sigue, localmente, nuestro Observador Estático cercano al Horizonte de Sucesos, expresaremos así:

[408] Véase página 330 de la sección 2.6.

[409] Recordemos que $\left(\frac{c}{b}\tau_1\right)$ equivalía al tiempo propio calibrado de una determinada manera y x, sencillamente, a la dimensión espacial. Véase sección 2.6. En el caso del Observador Estático cercano al Horizonte de Sucesos la dimensión espacial es $\hat{\eta}$ y la dimensión espacial es $\hat{\rho}$.

$$t_{Rindler} = \hat{\rho}\, sinh\, \hat{\eta}$$

$$x_{Rindler} = \hat{\rho}\, cosh\, \hat{\eta}$$

Comprobemos, que esto es válido en el escenario que estamos planteando. Para ello vamos a intentar reconstruir, desde estos elementos, la métrica del espacio. Con tal fin, calculemos la derivada parcial de las coordenada temporal y espacial:

$$dt_{Rindler} = sinh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\rho} + \hat{\rho}\, cosh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\eta}$$

$$dx_{Rindler} = cosh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\rho} + \hat{\rho}\, sinh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\eta}$$

Ahora elevemos ambas expresiones al cuadrado:

$$(dt_{Rindler})^2 = (sinh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\rho} + \hat{\rho}\, cosh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\eta})^2$$

$$(dt_{Rindler})^2 = (sinh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\rho})^2 + (\hat{\rho}\, cosh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\eta})^2 + (2\, sinh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\rho} \cdot \hat{\rho}\, cosh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\eta})$$

$$(dx_{Rindler})^2 = (cosh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\rho} + \hat{\rho}\, sinh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\eta})^2$$

$$(dx_{Rindler})^2 = (cosh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\rho})^2 + (\hat{\rho}\, sinh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\eta})^2 + (2\, cosh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\rho} \cdot \hat{\rho}\, sinh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\eta})$$

Y si cambiamos de signo la expresión temporal (recordemos que buscamos reconstruir la métrica de Minkowski del espacio) y procedemos a sumar ambas expresiones:

$$-(dt_{Rindler})^2 = -(sinh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\rho})^2 - (\hat{\rho}\, cosh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\eta})^2 - (2\, sinh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\rho} \cdot \hat{\rho}\, cosh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\eta})$$

$$(dx_{Rindler})^2 = (cosh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\rho})^2 + (\hat{\rho}\, sinh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\eta})^2 + (2\, cosh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\rho} \cdot \hat{\rho}\, sinh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\eta})$$

$$-(dt_R)^2 + (dx_R)^2 = (cosh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\rho})^2 - (sinh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\rho})^2 + (\hat{\rho}\, sinh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\eta})^2 - (\hat{\rho}\, cosh\, \hat{\eta}\ \ d\hat{\eta})^2$$

$$-(dt_R)^2 + (dx_R)^2 = [cosh^2\hat{\eta} - sinh^{\,2}\hat{\eta}](d\hat{\rho})^2 + [sinh^{\,2}\hat{\eta} - cosh^2\hat{\eta}](\hat{\rho}d\hat{\eta})^2$$

Que por la identidad trigonométrica hiperbólica podemos decir que:

$$-(dt_R)^2 + (dx_R)^2 = [1](d\hat{\rho})^2 + [-1](\hat{\rho}d\hat{\eta})^2$$

Es decir:

$$-(dt_R)^2 + (dx_R)^2 = -(\hat{\rho}d\hat{\eta})^2 + (d\hat{\rho})^2$$

$$-(dt_R)^2 + (dx_R)^2 = -\hat{\rho}^2 d\hat{\eta}^2 + d\hat{\rho}^2 \qquad ^{410}$$

Observemos esto: tenemos a Minkowski de dos dimensiones: $-(dt_R)^2 + (dx_R)^2$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que es como mide el Observador Externo Inercial que ahora cae, igualado al espacio definido localmente por el Observador Estático. Dicho cambio de coordenadas,

[410] Recuérdese el elemento de línea del Observador Estático definido en la página 638 de esta misma sección:

$$d\hat{s}^2 \approx -\hat{\rho}^2\, d\hat{\eta}^2 + d\hat{\rho}^2$$

como era de esperar, es el que se definió en los epígrafes en que abordamos el espacio de Rindler.

Puede parecernos raro que alguien pueda ver plano un espacio tiempo tan cercano al Horizonte de Sucesos pero, recordemos, localmente, para una $\hat{\rho}$ muy pequeña (como de hecho hemos impuesto), el Observador Externo que cae , efectivamente, verá el espaciotiempo como plano. Además, recordemos que la métrica era aproximadamente[411]:

$$d\hat{s}^2 \approx -\hat{\rho}^2\, d\hat{\eta}^2 + d\hat{\rho}^2$$

Luego:

$$d\hat{s}^2 \approx -(dt_R)^2 + (dx_R)^2 = -\hat{\rho}^2 d\hat{\eta}^2 + d\hat{\rho}^2$$

Es decir, aproximadamente plana… y lo que es más importante: recordemos que estábamos definiendo el modo en que el observador que cae percibe al Observador Estático y, efectivamente, eso es lo que hemos encontrado pues el observador estático mide con este elemento de línea:

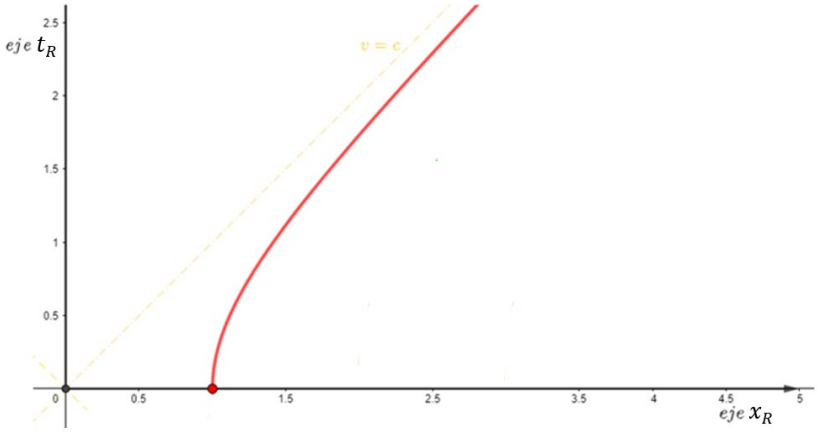
$$d\hat{s}^2 \approx -(dt_R)^2 + (dx_R)^2$$

Que, cuando está cerca del Observador Estático, resulta que es igual a:

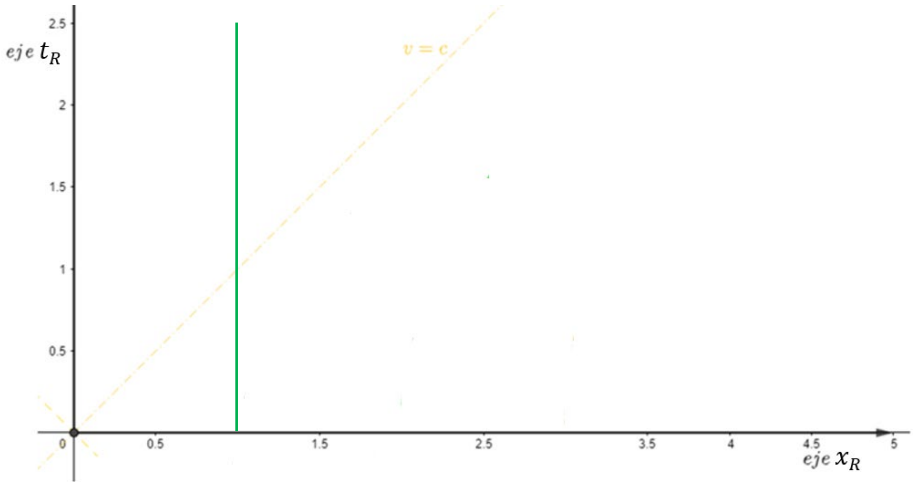
$$d\hat{s}^2 \approx -\hat{\rho}^2 d\hat{\eta}^2 + d\hat{\rho}^2$$

Esto es un modo muy bonito de ver el principio de equivalencia pues, como hemos dicho, el observador que cae libremente no se ve sometido a ninguna aceleración y, por lo tanto, percibirá que su espacio es plano, es minkowskiano ($d\hat{s}^2 \approx -(dt_R)^2 + (dx_R)^2$). Y de hecho, supongamos que no es consciente de que cae (pues, de hecho, si va en una especie de nave espacial con una ventana a través de la cual sólo puede ver al Observador Estático que habita junto al Horizonte de Sucesos) y que, por lo tanto, lo que percibe es que el Observador Estático se le acerca primero y, después, se le aleja de manera acelerada... ¿En qué medida observa eso? ¿Cómo lo representaría gráficamente? Pues, efectivamente, según el modelo de Rindler:

[411] Véase nota anterior.



Pero demos un giro más de tuerca. Imaginemos que, muy cerca del Observador Externo que cae, está cayendo otro observador. Por ejemplo, que a unos 10 metros de distancia hay un Observador 2 que cae junto al Observador 1 que cae. ¿Cómo lo vería el Observador 1 que cae? Naturalmente, él lo vería inmóvil respecto a él pues, de hecho, son comóviles. ¿Cómo lo representaría? Pues inmóvil, sólo desplazándose en la dimensión temporal, a saber:



Pero aquí surge una cuestión muy interesante. ¿Qué pasa cuando, según el Observador que cae 1 ve que el Observador que cae 2 cruza la diagonal? Recordemos que estamos en un espacio local de Minkowski por lo que la trayectoria que se ha dibujado para el observador 2 que cae (en color verde) es perfectamente posible. Veamos:

La diagonal está definida por:

$$t_{Rindler} = x_{Rindler}$$

Es decir, haciendo uso de nuestra definición:

$$t_{Rindler} = \hat{\rho}\, sinh\, \hat{\eta}$$

$$x_{Rindler} = \hat{\rho}\, cosh\, \hat{\eta}$$

Por lo que:

$$\hat{\rho}\, sinh\, \hat{\eta} = \hat{\rho}\, cosh\, \hat{\eta}$$

$$\hat{\rho}\, sinh\,\hat{\eta} - \hat{\rho}\, cosh\,\hat{\eta} = 0$$

$$\hat{\rho}(sinh\,\hat{\eta} - cosh\,\hat{\eta}) = 0$$

Y esta igualdad sólo podría cumplirse si uno de los dos factores es igual a cero. Veamos:

a) $sinh\,\hat{\eta} - cosh\,\hat{\eta} = 0$

$$sinh\,\hat{\eta} = cosh\,\hat{\eta}$$

Si esto fuera así, entonces:

$$tanh\,\hat{\eta} = 1$$

Pero sabemos que la $tanh\,\hat{\eta}$ es igual a[412]:

$$\frac{e^{\hat{\eta}} - e^{-\hat{\eta}}}{e^{\hat{\eta}} + e^{-\hat{\eta}}}$$

Luego podríamos decir que:

$$\frac{e^{\hat{\eta}} - e^{-\hat{\eta}}}{e^{\hat{\eta}} + e^{-\hat{\eta}}} = 1$$

Si multiplicamos arriba y abajo por $e^{\hat{\eta}}$:

$$\frac{e^{2\hat{\eta}} - 1}{e^{2\hat{\eta}} + 1} = 1$$

Que podemos expresar como:

$$e^{2\hat{\eta}} - 1 = e^{2\hat{\eta}} + 1$$

$$-1 = +1$$

Lo cual es un absurdo.

Por ello, la única opción de que la igualdad a cero se cumpla y, por lo tanto, la 'trayectoria verde' cruce la diagonal pasa por que:

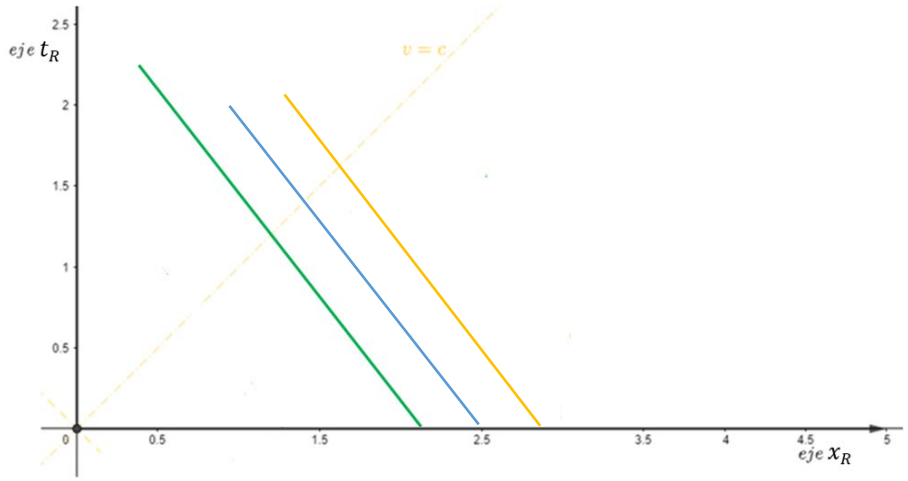
b) $\hat{\rho} = 0$

Y si esto es así, resulta que $\hat{r} = 1$ y, por lo tanto, el Observador que cae 1 percibirá que el Observador que cae 2, efectivamente, ha alcanzado el Horizonte de Sucesos… Igual no ha percibido que él mismo (el Observador que cae 1) también había llegado poco tiempo antes a dicho Horizonte de Sucesos (seguramente las influencias gravitatorias alguna pista ya le habrían dado medio reventándolo).

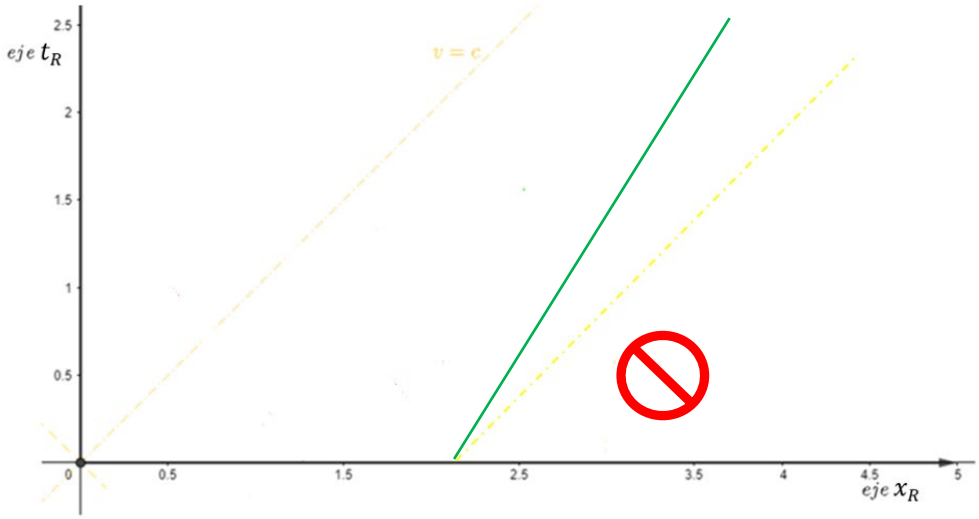
Y esto le sucedería a todo observador que cayera hacia el agujero negro, es decir, que acabarían alcanzando el Horizonte de Sucesos. Y lo más interesante, puesto que en esa zona

[412] Decir dónde.

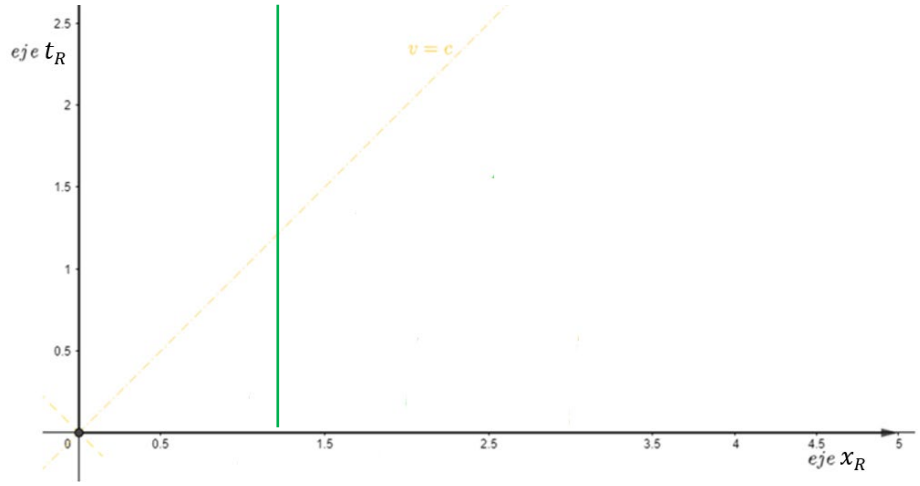
cercana al Horizonte de Sucesos, al Observador 1 que cae en caída libre y, por lo tanto, conforma un Sistema de Referencia Inercial (lo más inercial posible en Relatividad General) con todos aquellos que caen y, por lo tanto, el espaciotiempo le parece localmente plano, observará a todos los que caen con mayor velocidad que la suya (misma aceleración, pero más velocidad porque, por ejemplo, traían una velocidad inicial mayor), en línea recta.



Pero, además, podemos añadir una conclusión adicional: a determinada distancia del agujero negro, nada podrá escapar a sucumbir al Horizonte de Sucesos ya que, aunque imaginemos un cuerpo que se dirige hacia la 'derecha' nunca podrá escapar a la intersección con la línea del Horizonte de Sucesos porque, como sabemos, nada puede viajar a una velocidad mayor que la de la luz y, por lo tanto no podrá hacer menos de 45º con el eje horizontal y, por lo tanto, al hacer más de 45º con el eje horizontal, en algún momento acabará interseccionando con la línea del Horizonte de Sucesos y, por lo tanto, cayendo al Agujero Negro:



Y una vez comprobado que estos Observadores que caen 'juntos' (comóviles) perciben las cosas de una manera parecida a ésta:



Resulta necesario que en su caída, pasado algún tiempo tras haber cruzado el Horizonte de Sucesos, alcancen el centro mismo del Agujero negro o, lo que es lo mismo, $\hat{r} = 0$: la Singularidad, la Sustancia de Spinoza.

Vamos a ver ese proceso de acercamiento a la Singularidad y qué definimos como una Singularidad.

Recordemos la métrica que tenemos para ese espaciotiempo entorno a un agujero negro:

$$d\hat{s}^2 = -f_{(\hat{r})}d\hat{t}^2 + {f_{(\hat{r})}}^{-1}d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 d\Omega^2$$

Que, si trabajamos exclusivamente en direcciones radiales, sabemos que podemos reducir a:

$$d\hat{s}^2 = -f_{(\hat{r})}d\hat{t}^2 + {f_{(\hat{r})}}^{-1}d\hat{r}^2$$

Donde:

$$f_{(\hat{r})} = 1 - \frac{1}{\hat{r}}$$

En esta métrica, para cualquier valor de $\hat{r} > 1$ nos mantendrá un coeficiente para el tiempo ($e_0 \cdot e_0$) negativo tal y como debe ser para las métricas ortogonales espaciotemporales que hemos manejado desde el primer momento de nuestro estudio.

Sin embargo, si $\hat{r} \leq 1$, la métrica empieza (como hemos ya hemos anticipado) a presentar comportamientos extraños ya que el coeficiente de la parte temporal se volverá cero o positiva, es decir, será de tipo espacial. El tiempo o desaparece o se convertiría en espacio (misma naturaleza + que el espacio). Es más, en el siguiente coeficiente el espacio, al convertirse en negativo, se transformaría en tiempo… algo raro pasa ahí, efectivamente.

Es decir, dentro del Horizonte de Sucesos, para una $\hat{r}$ comprendida en un intervalo de valores: $(0,1)$, las cosas empiezan a ser muy muy extrañas para nuestra intuición: el espacio se convierte en tiempo (el espacio se vuelve negativo) y el tiempo se transforma en espacio (se vuelve positivo). Por ello, como las dimensiones van a cambiar de signo, para facilitar nuestros desarrollos, vamos a intercambiar el orden de las dimensiones en nuestra métrica:

$$d\hat{s}^2 = {f_{(\hat{r})}}^{-1}d\hat{r}^2 - f_{(\hat{r})}d\hat{t}^2$$

$$d\hat{s}^2 = \frac{1}{1-\frac{1}{\hat{r}}}d\hat{r}^2 - \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)d\hat{t}^2$$

Que podemos escribir como:

$$d\hat{s}^2 = \frac{1}{1-\frac{1}{\hat{r}}}d\hat{r}^2 + \left(\frac{1}{\hat{r}}-1\right)d\hat{t}^2$$

Y como truco matemático que después facilitará las cosas compensa ahora multiplicar (arriba y abajo) por -1 en la componente de la dimensión $d\hat{r}^2$, es decir:

$$d\hat{s}^2 = \frac{-1}{-\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)}d\hat{r}^2 + \left(\frac{1}{\hat{r}}-1\right)d\hat{t}^2$$

$$d\hat{s}^2 = \frac{-1}{\frac{1}{\hat{r}}-1}d\hat{r}^2 + \left(\frac{1}{\hat{r}}-1\right)d\hat{t}^2$$

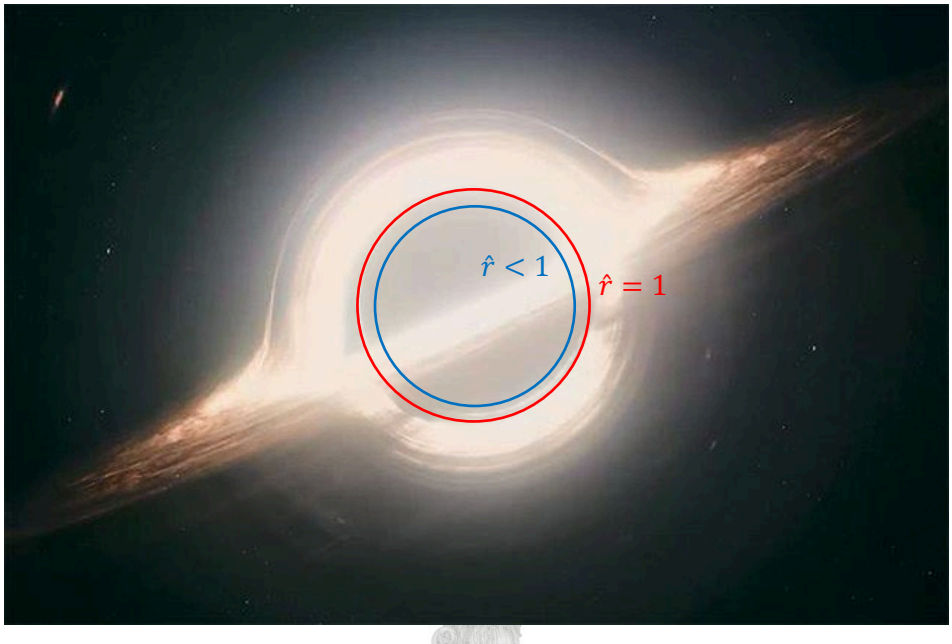
Efectivamente, en el rango $0 < \hat{r} < 1$, esta métrica tendrá un primer coeficiente negativo y un segundo coeficiente positivo. Es decir, no hemos hecho absolutamente nada. Sólo hemos puesto las cosas de un modo que nos va a ser más cómodo.

Para acomodarlo aún más, convengamos ahora que:

$$q_{(\hat{r})} = \frac{1}{\hat{r}} - 1$$

$$d\hat{s}^2 = \frac{-1}{q_{(\hat{r})}}d\hat{r}^2 + \left(q_{(\hat{r})}\right)d\hat{t}^2$$

Y ahora, una vez redefinido el escenario algebraico, trabajemos, del mismo modo en que hicimos antes por fuera del Horizonte de Sucesos, en una zona cercana al mismo pero, esta vez, por dentro, es decir:



Para ello, tal y como hicimos para 'la parte de fuera', usamos, de nuevo, el Polinomio de Taylor para realizar una aproximación a la definición que tenemos para $q_{(\hat{r})}$ cerca del valor $\hat{r}$ =1. Así:

$$q_{(\hat{r})} \approx q_{(1)} + q'_{(1)}(\hat{r} - 1)$$

Puesto que:

$$q'_{(\hat{r})} = -\frac{1}{\hat{r}^2}$$

Nos queda que, la aproximación en $\hat{r}$ =1 [413]es:

$$q_{(\hat{r})} \approx q_{(1)} + q'_{(1)}(\hat{r} - 1)$$

$$q_{(\hat{r})} \approx \frac{1}{1} - 1 + \left(-\frac{1}{1^2}\right)(\hat{r} - 1)$$

$$q_{(\hat{r})} \approx 0 + (-1)(\hat{r} - 1)$$

$$q_{(\hat{r})} \approx -(\hat{r} - 1)$$

$$q_{(\hat{r})} \approx 1 - \hat{r}$$

Apliquemos, ahora, a nuestra 'métrica interna' para obtener una aproximación:

$$d\hat{s}^2 = \frac{-1}{q_{(\hat{r})}} d\hat{r}^2 + \left(q_{(\hat{r})}\right) d\hat{t}^2$$

$$d\hat{s}^2 \approx -\frac{1}{1 - \hat{r}} d\hat{r}^2 + (1 - \hat{r}) d\hat{t}^2$$

Pero, claro, estamos diciendo que el espacio se 'ha convertido en tiempo' y el tiempo 'se ha convertido en espacio' y aun así estamos usando $\hat{r}$ de radio para algo que parece ser tiempo y $\hat{t}$ para algo que parece ser espacio. Esto nos liaría. Cambiemos la nomenclatura para no liarnos. Así partiendo de esto:

$$d\hat{s}^2 \approx -\frac{1}{1 - \hat{r}} d\hat{r}^2 + (1 - \hat{r}) d\hat{t}^2$$

Llamemos, por ejemplo, a la parte marcada en color azul:

$$\frac{1}{1 - \hat{r}} d\hat{r}^2 \rightarrow d\hat{K}^2 \quad [414]$$

Es decir que:

$$d\hat{K}^2 = \frac{1}{1 - \hat{r}} d\hat{r}^2$$

[413] Recordemos el Polinomio de Taylor: se evalúa sólo dentro de las funciones original y derivadas no en, por ejemplo, la parte $(\hat{r} - 1)$.

[414] K de Kronos. No confundir con la kappa que hemos usado para definir la aceleración de la "Surface Gravity".

Si despejamos el cuadrado:

$$d\hat{K} = \pm\sqrt{\frac{1}{1-\hat{r}}d\hat{r}^2}$$

$$d\hat{K} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\hat{r}}}\,d\hat{r}$$

Y ahora, si para hallar la relación exacta entre $\hat{K}$ y $\hat{r}$, integramos en ambos lados:

$$\int d\hat{K} = \pm\int_1^{\hat{r}} \frac{1}{\sqrt{1-\hat{r}}}\,d\hat{r}$$ [415]

Para que tengamos una integración directa multiplicamos por -2 arriba y abajo[416]:

$$\hat{K} = \pm(-2)\int_1^{\hat{r}} \frac{1}{(-2)\sqrt{1-\hat{r}}}\,d\hat{r}$$

$$\hat{K} = \pm(-2)\int_1^{\hat{r}} \frac{-1}{2\sqrt{1-\hat{r}}}\,d\hat{r}$$

$$\hat{K} = \pm(-2)\cdot\left|\sqrt{1-\hat{r}}\right|_1^{\hat{r}}$$

$$\hat{K} = \pm(-2)\cdot\left[\left(\sqrt{1-\hat{r}}\right)-\left(\sqrt{1-1}\right)\right]$$

$$\hat{K} = \pm\left(-2\sqrt{1-\hat{r}}\right)$$

¿Qué valor necesitamos para $\hat{K}$? ¿Qué signo tomamos del $\pm$?

Recordemos que $\hat{K}$ es una especie de tiempo y que tenemos una métrica tal que:

$$d\hat{s}^2 \approx -d\hat{K}^2 + (1-\hat{r})d\hat{t}^2$$

Y el tiempo debe seguir avanzando mientras que el radio decrece, es decir, mientras que el observador que cae se acerca más y más al centro del Agujero Negro, de la Singularidad. Es decir, tenemos que seguir manteniendo el signo negativo del coeficiente temporal de la métrica y, para ello, $\hat{K}$ debe ser positivo para que el coeficiente siga siendo negativo, es decir que nos quedamos con:

$$\hat{K} = -\left(-2\sqrt{1-\hat{r}}\right)$$

$$\hat{K} = 2\sqrt{1-\hat{r}}$$

Y como queremos expresar la métrica en términos de $\hat{K}$, despejemos:

---

[415] Integraríamos entre $\hat{r} = 1$ (la parte de fuera) y el radio interno $\hat{r}$ que hemos aproximado mediante el Polinomio de Taylor.

[416] Véase apéndice I. Acerca del Cálculo Diferencial e Integral.

$$\frac{\hat{K}}{2} = \sqrt{1 - \hat{r}}$$

$$\frac{\hat{K}^2}{4} = 1 - \hat{r}$$

Que ahora podemos sustituir en nuestra métrica:

$$d\hat{s}^2 \approx -d\hat{K}^2 + (1 - \hat{r})d\hat{t}^2$$

$$d\hat{s}^2 \approx -d\hat{K}^2 + \frac{\hat{K}^2}{4}d\hat{t}^2$$

Y ahora, tal y como hicimos cuando estudiábamos los aledaños del Horizonte de Sucesos por fuera, convenimos que:

$$\frac{d\hat{t}}{2} \equiv d\hat{G}$$ [417]

De manera que:

$$\frac{d\hat{t}^2}{4} \equiv d\hat{G}^2$$

De manera que la 'métrica interna' quedaría como:

$$d\hat{s}^2 \approx -d\hat{K}^2 + \frac{\hat{K}^2}{4}d\hat{t}^2$$

$$d\hat{s}^2 \approx -d\hat{K}^2 + \hat{K}^2 d\hat{G}^2$$

Esto se parece al opuesto que teníamos por fuera para un espacio de Rindler. Recordemos que era:

$$d\hat{s}^2 \approx -\hat{\rho}^2 d\hat{\eta}^2 + d\hat{\rho}^2$$

Y ahora tenemos algo parecido, aunque, parece, con los signos cambiados y las variables permutadas:

$$d\hat{s}^2 \approx -d\hat{K}^2 + \hat{K}^2 d\hat{G}^2$$

Efectivamente, se parece… pero no nos hagamos ilusiones: no es Rindler. No tiene la estructura de Rindler: esos cambios de signos y esas variables permutadas impiden que esto sea Rindler. Es algo nuevo, digamos un 'modelo interno'.

Si antes, trabajando en la parte externa, pudimos convertir las coordenadas de Rindler en las coordenadas de Minkowski… puesto que hay ciertos paralelismos, ¿podríamos intentar hacer algo parecido, con un algoritmo parecido (en todo caso, invertido) para hacer lo mismo?

[417] $\hat{G}$ de Gaia, por la Tierra, por el espacio.

Antes hicimos:

$$t_{Rindler} = \hat{\rho}\, sinh\, \hat{\eta}$$

$$x_{Rindler} = \hat{\rho}\, cosh\, \hat{\eta}$$

Donde $\hat{\rho}$ era tiempo y $\hat{\eta}$ era tiempo…. ¿y si ahora, que parece que estamos justo en la inversa hacemos?

$$t_{interno} = \hat{K}\, cosh\, \hat{G}$$

$$x_{interno} = \hat{K}\, sinh\, \hat{G}$$

Donde hemos invertido todo espacio $\hat{\rho}$ por tiempo $\hat{K}$, el tiempo $\hat{\eta}$ por espacio $\hat{G}$ y los senos hiperbólicos por cosenos hiperbólicos y viceversa.

¿Nos llevaría esta transformación de coordenadas a Minkowski? Comprobémoslo.

Como hicimos anteriormente, derivemos parcialmente ambas dimensiones:

$$dt_{interno} = cosh\, \hat{G}\, d\hat{K} + \hat{K}\, sinh\, \hat{G}\, d\hat{G}$$

$$dx_{interno} = sinh\, \hat{G}\, d\hat{K} + \hat{K}\, cosh\, \hat{G}\, d\hat{G}$$

Para ver si esto nos lleva a Minkowski, tal y como hicimos para la parte 'externa', elevemos ambas expresiones al cuadrado y después cambiemos el signo a la dimensión temporal y sumémosla a la dimensión espacial:

$$(dt_{interno})^2 = cosh^2\, \hat{G}\, d\hat{K}^2 + \hat{K}^2\, sinh^2\, \hat{G}\, d\hat{G}^2 + 2\, cosh\, \hat{G}\, d\hat{K}\hat{K}\, sinh\, \hat{G}\, d\hat{G}$$

$$(dx_{interno})^2 = sinh^2\, \hat{G}\, d\hat{K}^2 + \hat{K}^2\, cosh^2\, \hat{G}\, d\hat{G}^2 + 2\, sinh\, \hat{G}\, d\hat{K}\hat{K}\, cosh\, \hat{G}\, d\hat{G}$$

Hagamos el cambio de signo y la suma:

$$-(dt_{interno})^2 = -\, cosh^2\, \hat{G}\, d\hat{K}^2 - \hat{K}^2\, sinh^2\, \hat{G}\, d\hat{G}^2 - 2\, cosh\, \hat{G}\, d\hat{K}\hat{K}\, sinh\, \hat{G}\, d\hat{G}$$
$$(dx_{interno})^2 = sinh^2\, \hat{G}\, d\hat{K}^2 + \hat{K}^2\, cosh^2\, \hat{G}\, d\hat{G}^2 + 2\, sinh\, \hat{G}\, d\hat{K}\hat{K}\, cosh\, \hat{G}\, d\hat{G}$$

$$-(dt_{interno})^2 + (dx_{interno})^2 = \left(sinh^2\, \hat{G} - cosh^2\, \hat{G}\right)d\hat{K}^2 + \hat{K}^2(cosh^2\hat{G} - sinh^2\, \hat{G})d\hat{G}^2$$

Que, por identidad trigonométrica hiperbólica es:

$$-(dt_{interno})^2 + (dx_{interno})^2 = (-1)d\hat{K}^2 + \hat{K}^2(+1)d\hat{G}^2$$

$$-(dt_{interno})^2 + (dx_{interno})^2 = -d\hat{K}^2 + \hat{K}^2 d\hat{G}^2$$

Que es justo lo que esperaríamos encontrar: la métrica del modelo interno. Es decir, que el cambio de coordenadas que proponemos para transformar en Minkowski para la 'métrica del modelo interno' que proponemos es perfectamente válido. Con este cambio de coordenadas…

$$t_{interno} = \hat{K}\, cosh\, \hat{G}$$

$$x_{interno} = \hat{K}\, sinh\, \hat{G}$$

… aproximaríamos la métrica del modelo interno a la métrica de Minkowski. Como el espacio que el observador se ha desplazado hacia adentro es minúsculo, el espacio le parece perfectamente (y aproximadamente) plano.

Pongámoslo en función de unas coordenadas que nos son más inteligibles: $\hat{r}$ y $\hat{t}$. Para ello recordemos que dijimos que:

$$\widehat{K} = 2\sqrt{1-\hat{r}}$$

$$\widehat{G} = \frac{\hat{t}}{2}$$

Así:

$$t_{interno} = \widehat{K}\,cosh\,\widehat{G} \rightarrow 2\sqrt{1-\hat{r}}\,cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$x_{interno} = \widehat{K}\,sinh\,\widehat{G} \rightarrow 2\sqrt{1-\hat{r}}\,sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

Pero cuidado, esto que hemos hecho para que nos sea más inteligible, puede liarnos más. Recordemos que estamos dentro del agujero negro, más allá del Horizonte de Sucesos, y que por lo tanto las cosas se han invertido, es decir, aquí $\hat{r}$ es tiempo y $\hat{t}$ es espacio. Ojo con esto.

Ya tenemos la métrica que emplearía un Observador que ha caído (y sigue cayendo) ya dentro del agujero negro. Cerca del Horizonte de Sucesos, pero ya por dentro.

Ahora tratemos de poner ahí, en esa zona, a un Observador Estático… pero… estático ¿respecto a qué? ¿Tiempo o espacio? Pues ya sabemos, de antes, para ser estático debe permanecer en una localización espacial fija, constante pero… dentro del agujero negro, el espacio es tiempo luego el Observador Estático deberá permanecer en un $\hat{t}$ (que aquí dentro es espacio) constante dentro del agujero negro.

Así, si dividimos las dimensiones[418]:

$$\frac{t_{interno} = 2\sqrt{1-\hat{r}}\,cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)}{x_{interno} = 2\sqrt{1-\hat{r}}\,sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)}$$

$$\frac{cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)}{sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)}$$

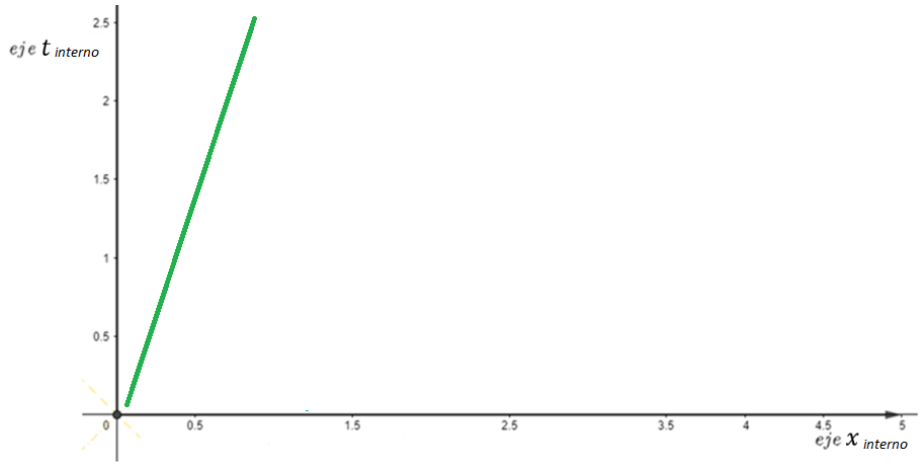
$$\frac{1}{tanh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)} = \#$$

[418] Recordar que esto, esta división, es 'cruzar' la diagonal: $t_{interno} = x_{interno}$. Véase en el caso de la aproximación exterior.

Y como $\hat{t}$, hemos dicho, debe ser constante, esta expresión debe arrojar un resultado escalar constante: #. Así, podremos decir que:

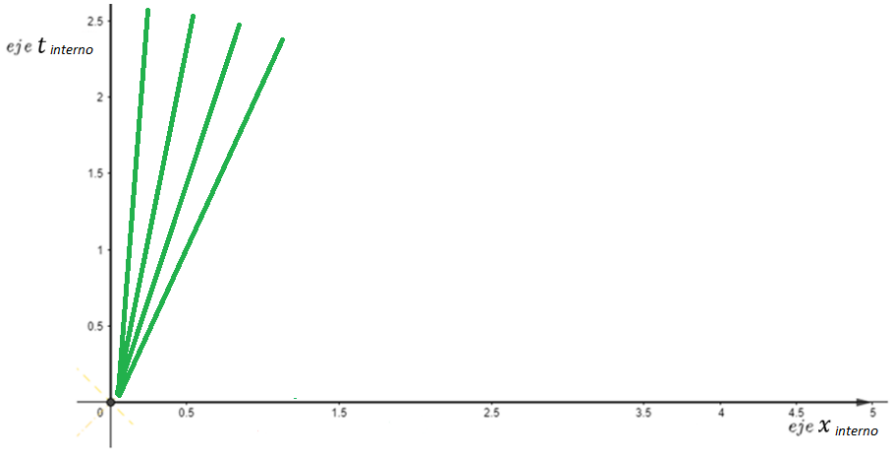
$$t_{interno} = \# \cdot x_{interno}$$

Esto implica que el observador que cae libremente verá al Observador Estático de un modo similar a lo representado en este diagrama (# es una relación lineal):



Es decir, que el observador que cae libremente ve al Observador Estático como a un Observador Inercial, es decir, sin aceleración, con velocidad constante (no en vano, como hemos dicho, lo representa gráficamente como una línea recta). Es decir, al que cae, no le parece que el otro esté acelerando de alguna manera… ¡Qué cosa más extraña!

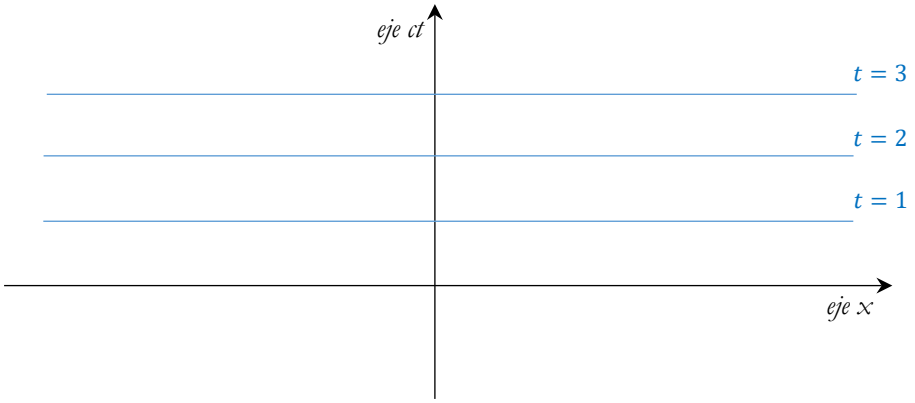
Es decir, que el observador que cae observará a cualquier Observador Estático[419] como no acelerado y, por lo tanto, lo representará con líneas rectas:



Forcemos ahora a que suceda lo contrario, es decir, que lo que mantenga fijo el Observador Estático sea el tiempo ($\hat{r}$ dentro del Agujero Negro). Que el Observador Estático pueda tener algún tipo de aceleración que le permita 'congelar' su tiempo, es decir, dentro del Agujero Negro, $\hat{r}$ y, después, nos preguntaremos acerca de cómo ve el Observador que cae al Observador Estático.

[419] Está estático en el espacio, es decir, dentro del Agujero Negro ha congelado ¡$\hat{t}$! Sí, es rarísimo todo.

Recordemos que en el espaciotiempo de Minkowski, las líneas que definían lapsos de tiempo fijo, 'detenido', se representarían así:



¿Cómo se verían, en cambio, en el Sistema de Referencia del Observador que cae y que ya está dentro del Agujero Negro?

En primer lugar, retomemos la definición que tiene de sus ejes de referencia:

$$t_{interno} = 2\sqrt{1-\hat{r}}\,cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$x_{interno} = 2\sqrt{1-\hat{r}}\,sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

Fijemos, al azar, un valor para congelar en el tiempo (¡$\hat{r}$!) al Observador Estático, por ejemplo:

$$\hat{r} = \frac{1}{2}$$

Así, las expresiones quedarían como:

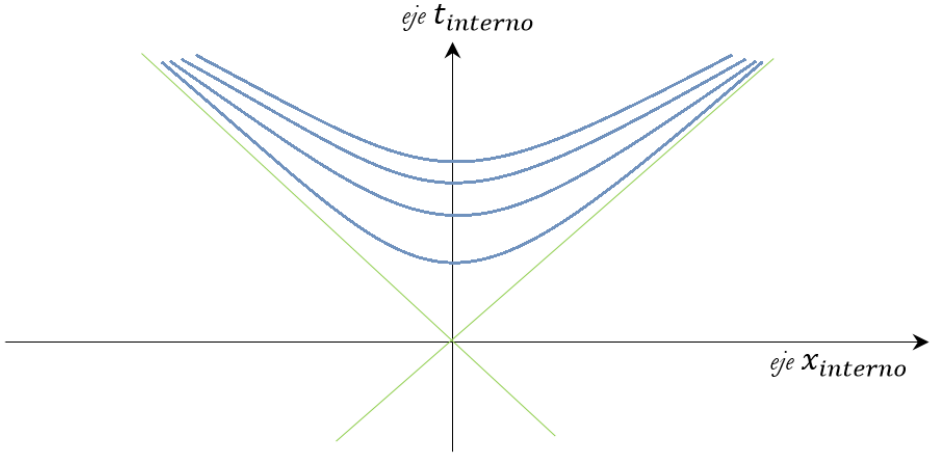
$$t_{interno} = 2\sqrt{1-\frac{1}{2}}\,cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$t_{interno} = \frac{2}{\sqrt{2}}cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$x_{interno} = 2\sqrt{1-\frac{1}{2}}\,sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

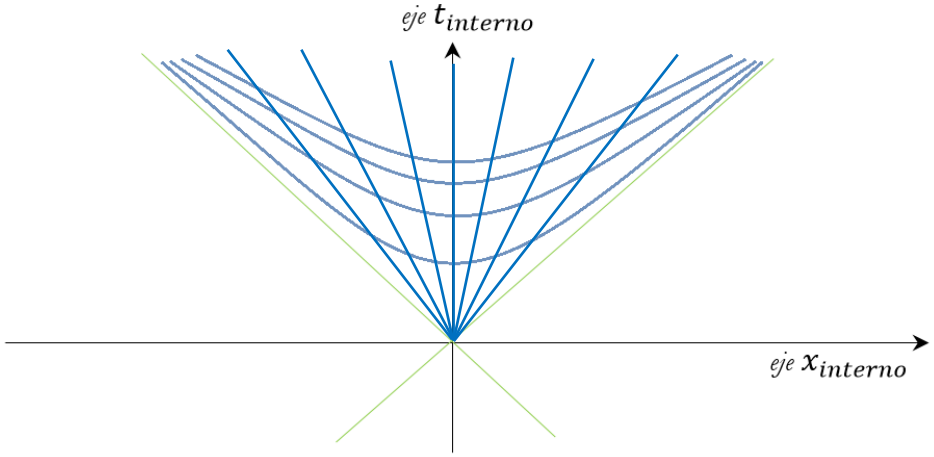
$$x_{interno} = \frac{2}{\sqrt{2}}sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

Esto, representado gráficamente, nos va a dar algo parecido a Rindler (con hipérbolas), pero con inversión en los ejes, es decir, algo así (vamos a poner más de una línea, no sólo la que corresponde a $\hat{r} = \frac{1}{2}$:



A lo largo de esas líneas, el tiempo dentro del Agujero Negro ($\hat{r}$) permanece constante y, además, si nos fijamos, mientras más 'avanzados' estemos en cualquiera de los ejes, menor es la distancia entre las líneas. Si en Minkowski la distancia entre segmentos temporales era la misma en todo el eje, aquí se va reduciendo… algo así como que los segundos son cada vez más 'cortos' (o largos, según se mire).

Con todo esto hemos visto un nuevo sistema de coordenadas para tiempo y espacio constantes dentro del agujero negro. Un sistema que nos presenta una 'cuadrícula' similar a ésta:



Donde las asíntotas son las diagonales y se corresponden con el Horizonte de Sucesos y, como sabemos, nada va a poder cruzarlo, en esta ocasión, hacia fuera. Demostrémoslo.

Sabemos que el Horizonte de Sucesos se corresponde con el radio de Schwarzschild y que en las unidades adimensionales que manejamos se corresponde con:

$$\hat{r} = 1$$

En ese caso:

$$t_{interno} = 2\sqrt{1-1}\cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \rightarrow 0$$

$$x_{interno} = 2\sqrt{1-1}\, sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \to 0$$

Y de hecho, para valores muy muy cercanos a 1, aunque por debajo de 1, la curva que se dibujara será una hipérbola que prácticamente coincida con la forma de las asíntotas, incluido el vértice[420]. En definitiva: las asíntotas son el Horizonte de Sucesos, más allá de lo que nada puede escapar, pues para valores $\hat{r} > 1$ directamente obtenemos raíces negativas y, ni siquiera, podemos trazar ejes de coordenadas.

Pero, ¿y si $\hat{r} = 0$? La cosa parece que funciona sin problemas, ¿no?

No vayamos tan rápido. Recordemos que estamos trabajando con un sistema de referencia definido para una zona diferencialmente cercana al Horizonte de Sucesos. Trabajamos en una especia de espera hueca con un grosor de superficie determinado dentro de la cual estamos realizando nuestros cálculos. Para irnos a la parte interna de la esfera hueca, para ir a la Singularidad en que $\hat{r} = 0$, tendríamos que hacer un cambio de sistema de referencia.

Para extender, digamos, la superficie gruesa de la esfera interna que estamos usando para estudiar el interior de un Agujero Negro de Schawarzschild y así acercarnos a rellenar la parte 'hueca' de la esfera experimental hasta llegar a la singularidad vamos a estudiar el modelo que desarrollaron ***Kruskal***[421] y ***Szekeres***[422] para extender la métrica de Schwarzschild no sólo para investigar la parte externa lejana al Horizonte de Sucesos, la parte externa cercana al Horizonte de Sucesos, el mismo Horizonte de Sucesos y la parte interna cercana al Horizonte de sucesos, sino que consiguieron extenderla hasta acercarse a la misma Singularidad. Veamos cómo consiguieron acercarse a la Singularidad.

´Lo que en definitiva hicieron es hacer un cambio de coordenadas en las que el cero dejara de ser un problema. Algo más o menos como hizo Newton al desarrollar el cálculo diferencial: evitar el colapso de las ecuaciones por alguna indeterminación.

Lo que hicieron, en definitiva, es buscar un cambio de coordenadas que les permitiera estudiar las cercanías de la singularidad. Recordemos que hemos hecho ya una adaptación:

$$\hat{G} = \frac{\hat{t}}{2}$$

$$\hat{K} = 2\sqrt{1-\hat{r}}$$

Kruskal y Szekeres adoptaron la misma para $\hat{G} = \frac{\hat{t}}{2}$ (la parte espacial, sí espacial, recordemos que estamos dentro de un Agujero Negro y los papeles se han invertido), pero introdujeron un cambio para la parte temporal. En vez de usar un '2' supusieron una función desconocida, por ejemplo $h_{(\hat{r})}$, que les permitiera trabajar más cerca de la singularidad:

$$\hat{K} = \sqrt{1-\hat{r}}\, h_{(\hat{r})}$$

[420] El típico dibujo que un ordenador trazaría justo encima de las asíntotas pero que si se le hace muchas veces zoom veríamos que en el vértice finalmente no hay un pico sino una ligera curva.

[421] Meter nota.

[422] Meter nota.

Buscaron, en definitiva, una proporcionalidad ($\propto$) que permitirá aplicar la métrica que se tenía para el límite interno del Horizonte de Sucesos y aplicarlo más profundamente:

$$d\hat{s}^2 \propto -d\widehat{K}^2 + \widehat{K}^2 d\hat{G}^2$$

Es decir: había que encontrar un factor de proporcionalidad que permitiera extender el uso de la métrica.

Para trabajar en dicha línea, usemos la premisa propuesta:

$$\hat{G} = \frac{\hat{t}}{2}$$

$$\widehat{K} = \sqrt{1-\hat{r}} \cdot h_{(\hat{r})}$$

Derivemos, respecto a $\hat{r}$, $\widehat{K}$:

$$d\widehat{K} = \left(\sqrt{1-\hat{r}} \cdot h_{(\hat{r})}\right) d\hat{r}$$

$$d\widehat{K} = \left(\frac{-1}{2\sqrt{1-\hat{r}}} h_{(\hat{r})} + \sqrt{1-\hat{r}} h'_{(\hat{r})}\right) d\hat{r}$$

$$d\widehat{K} = \left(\frac{-h_{(\hat{r})} + 2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}}{2\sqrt{1-\hat{r}}}\right) d\hat{r}$$

Como hemos hecho ya antes en varias ocasiones, elevamos al cuadrado:

$$d\widehat{K}^2 = \left(\frac{-h_{(\hat{r})} + 2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}}{2\sqrt{1-\hat{r}}}\right)^2 d\hat{r}^2$$

$$d\widehat{K}^2 = \left(\frac{\left(-h_{(\hat{r})}\right)^2 + \left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2 - 4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)}{4(1-\hat{r})}\right) d\hat{r}^2$$

Que es un ladrillo bastante desagradable.

El caso es que queremos acercarnos mucho a algo cuyo origen, antes de aproximar por Taylor o hacer convenciones $\widehat{K}$, $\hat{G}$, … era esto (ya dentro del agujero negro, es decir, habiendo ya invertido los papeles de tiempo y espacio)[423]:

$$d\hat{s}^2 = -\frac{1}{\frac{1}{\hat{r}} - 1} d\hat{r}^2 + \left(\frac{1}{\hat{r}} - 1\right) d\hat{t}^2$$

Para ello sería muy interesante encontrar algo que se parezca a $\left(\frac{1}{1-\hat{r}} d\hat{r}^2\right)$. Para ello hagamos algo de magia algebraica. dividamos, en nuestro expresión 'monstruo', arriba y abajo, por $\hat{r}$, es decir:

[423] Véase página 652 de esta misma sección. Marcamos en color verde un coeficiente que va a sernos importante identificar en breve.

$$d\hat{K}^2 = \left(\frac{\left(\frac{1}{\hat{r}}\right) \cdot \left(-h_{(\hat{r})}\right)^2 + \left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2 - 4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)}{\left(\frac{1}{\hat{r}}\right) \cdot 4(1-\hat{r})} \right) d\hat{r}^2$$

Esto se puede expresar como:

$$d\hat{K}^2 = \frac{1}{4\hat{r}} \left(\frac{\left(-h_{(\hat{r})}\right)^2 + \left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2 - 4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)}{\left(\frac{1}{\hat{r}}\right) \cdot (1-\hat{r})} \right) d\hat{r}^2$$

$$d\hat{K}^2 = \frac{1}{4\hat{r}} \left(\frac{\left(-h_{(\hat{r})}\right)^2 + \left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2 - 4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)}{\left(\frac{1}{\hat{r}} - 1\right)} \right) d\hat{r}^2$$

$$d\hat{K}^2 = \frac{1}{4\hat{r}} \left(\left(-h_{(\hat{r})}\right)^2 + \left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2 - 4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right) \right) \frac{d\hat{r}^2}{\left(\frac{1}{\hat{r}} - 1\right)}$$

Y ojo a lo que hemos resaltado en color verde: justo lo que andábamos buscando.

Si ahora despejamos ese factor:

$$\frac{d\hat{r}^2}{\left(\frac{1}{\hat{r}} - 1\right)} = \frac{4\hat{r}d\hat{K}^2}{\left(-h_{(\hat{r})}\right)^2 + \left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2 - 4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)}$$

Así, la métrica interna que antes era:

$$d\hat{s}^2 = -\frac{1}{\frac{1}{\hat{r}} - 1} d\hat{r}^2 + \left(\frac{1}{\hat{r}} - 1\right) d\hat{t}^2$$

Ahora la podemos expresar como:

$$d\hat{s}^2 = -\left(\frac{4\hat{r}}{\left(-h_{(\hat{r})}\right)^2 + \left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2 - 4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)} \right) d\hat{K}^2 + \left(\frac{1}{\hat{r}} - 1\right) d\hat{t}^2$$

Por otro lado, como dijimos que:

$$\hat{G} = \frac{\hat{t}}{2} \rightarrow d\hat{G}^2 = \frac{dt^2}{4}$$

Luego podemos hacer:

$$d\hat{s}^2 = -\left(\frac{4\hat{r}}{\left(-h_{(\hat{r})}\right)^2 + \left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2 - 4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)} \right) d\hat{K}^2 + 4\left(\frac{1}{\hat{r}} - 1\right) \frac{d\hat{t}^2}{4}$$

Y entonces expresar como:

$$d\hat{s}^2 = -\left(\frac{4\hat{r}}{\left(-h_{(\hat{r})}\right)^2 + \left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2 - 4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)}\right)d\hat{K}^2 + 4\left(\frac{1}{\hat{r}} - 1\right)d\hat{G}^2$$

Recordemos ahora que estamos buscando una proporcionalidad a esto:

$$d\hat{s}^2 \propto -d\hat{K}^2 + \hat{K}^2 d\hat{G}^2$$

Es decir, estamos suponiendo algún ***Factor proporcional*** que necesitamos encontrar para:

$$d\hat{s}^2 = Factor \cdot \left[-d\hat{K}^2 + \hat{K}^2 d\hat{G}^2\right]$$

Para ello, para encontrar este ***Factor de proporcionalidad***, tenemos que seguir haciendo transformaciones algebraicas simples, tediosas, pero simples. Sacamos el ladrillaco como factor común:

$$d\hat{s}^2 = \left(\frac{4\hat{r}}{\left(-h_{(\hat{r})}\right)^2 + \left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2 - 4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)}\right) \left[(-d\hat{K}^2) + \left(\frac{\left(-h_{(\hat{r})}\right)^2 + \left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2 - 4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)}{\hat{r}}\right)\left(\frac{1}{\hat{r}} - 1\right)d\hat{G}^2\right]$$

Para que la equivalencia que buscamos sea correcta necesitamos que lo que hemos marcado en color verde sea $\hat{K}^2$. ¿Cuál era la $\hat{K}$ que presuponían Kruskal y Szekeres?

$$\hat{K} = \sqrt{1-\hat{r}}\, h_{(\hat{r})}$$

Luego:

$$\hat{K}^2 = (1-\hat{r})\left(h_{(\hat{r})}\right)^2$$

Y, como decimos, lo nos interesa es que todo el mogollón…:

$$\left(\frac{\left(-h_{(\hat{r})}\right)^2 + \left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2 - 4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)}{\hat{r}}\right)\left(\frac{1}{\hat{r}} - 1\right)$$

… sea $\hat{K}^2$. Es decir, que:

$$\left(\frac{\left(-h_{(\hat{r})}\right)^2 + \left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2 - 4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)}{\hat{r}}\right)\left(\frac{1}{\hat{r}} - 1\right) = (1-\hat{r})\left(h_{(\hat{r})}\right)^2$$

Y, por lo tanto, necesitamos una $h_{(\hat{r})}$ que permita que se cumpla esta identidad.

Para ello sigamos haciendo transformaciones algebraicas. Despejemos el mogollón:

$$\left(-h_{(\hat{r})}\right)^2 + \left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2 - 4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right) = \hat{r}\frac{(1-\hat{r})\left(h_{(\hat{r})}\right)^2}{\left(\frac{1}{\hat{r}} - 1\right)}$$

Multipliquemos el término de la derecha por $\hat{r}$ arriba y abajo:

$$\left(-h_{(\hat{r})}\right)^2+\left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2-4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)=\hat{r}\,\frac{\hat{r}(1-\hat{r})\left(h_{(\hat{r})}\right)^2}{\hat{r}\left(\frac{1}{\hat{r}}-1\right)}$$

$$\left(-h_{(\hat{r})}\right)^2+\left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2-4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)=\hat{r}\,\frac{(\hat{r}-\hat{r}^2)}{(1-\hat{r})}\left(h_{(\hat{r})}\right)^2$$

Saco arriba (en el término derecho) $\hat{r}$ como factor común:

$$\left(-h_{(\hat{r})}\right)^2+\left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2-4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)=\hat{r}^2\,\frac{(1-\hat{r})}{(1-\hat{r})}\left(h_{(\hat{r})}\right)^2$$

$$\left(-h_{(\hat{r})}\right)^2+\left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2-4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)=\hat{r}^2\left(h_{(\hat{r})}\right)^2$$

Es decir, necesitamos una $h_{(\hat{r})}$ que permita que se cumpla esta igualdad.

De entrada podemos suponer que $h_{(\hat{r})}$ no es igual a cero porque, si fuera así, tendríamos problemas con la expresión de la hipótesis inicial:

$$\widehat{K}=\sqrt{1-\hat{r}}\,h_{(\hat{r})}$$

Partiendo pues de esa pista, podemos pensar que es posible usar $h_{(\hat{r})}$ como denominador sin caer en una indeterminación. Dicho esto, podemos proponer dividir toda la expresión por $\left(h_{(\hat{r})}\right)^2$:

$$\frac{\left(-h_{(\hat{r})}\right)^2+\left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2-4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)}{\left(h_{(\hat{r})}\right)^2}=\frac{\hat{r}^2\left(h_{(\hat{r})}\right)^2}{\left(h_{(\hat{r})}\right)^2}$$

$$1+\frac{4(1-\hat{r})^2\left(h'_{(\hat{r})}\right)^2-4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)}{\left(h_{(\hat{r})}\right)^2}=\hat{r}^2$$

$$1+4(1-\hat{r})^2\left(\frac{h'_{(\hat{r})}}{h_{(\hat{r})}}\right)^2-4(1-\hat{r})\left(\frac{h'_{(\hat{r})}}{h_{(\hat{r})}}\right)=\hat{r}^2$$

Para resolver esto, llamemos momentáneamente x a $\frac{h'_{(\hat{r})}}{h_{(\hat{r})}}$. Así podemos escribir:

$$1+4(1-\hat{r})^2x^2-4(1-\hat{r})x=\hat{r}^2$$

Es decir, que tenemos que elegir una x que permita que se cumpla la identidad que se propone… Desarrollemos:

$$1+4x^2(1+\hat{r}^2-2\hat{r})-4x(1-\hat{r})=\hat{r}^2$$

$$1+4x^2+4x^2\hat{r}^2-8x^2\hat{r}-4x+4x\hat{r}=\hat{r}^2$$

Obviamente, podría no existir ninguna x que cumpla esto. Pero lo cierto es que en el horizonte de sucesos hemos visto que la cosa medio funciona… ¿por qué aguantamos un

poco más a ver si hay una cierta proporcionalidad? Sigamos confiando en nuestra hipótesis (que, de hecho, es lo que hicieron).

$$1 + 4x^2 + 4x^2\hat{r}^2 - 8x^2\hat{r} - 4x + 4x\hat{r} = \hat{r}^2$$

Fijémonos en nuestra expresión y centremos nuestra atención en los elementos que tienen algún $\hat{r}^2$. Hemos marcado en color rojo los únicos elementos que contienen un $\hat{r}^2$.

Podríamos suponer que $4x^2$ debería ser igual a 1 para equipararlo a $\hat{r}^2$ [424] . Así supondríamos:

$$4x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

Sustituyámoslo (probemos primero con la solución positiva):

$$1 + 4x^2 + 4x^2\hat{r}^2 - 8x^2\hat{r} - 4x + 4x\hat{r} = \hat{r}^2$$

$$1 + 4\frac{1}{4} + 4\frac{1}{4}\hat{r}^2 - 8\frac{1}{4}\hat{r} - 4\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2}\hat{r} = \hat{r}^2$$

$$1 + 1 + \hat{r}^2 - 2\hat{r} - 2 + 2\hat{r} = \hat{r}^2$$

Chanáááááán, ha funcionado a la primera (con el valor negativo no nos hubiera valido):

$$\hat{r}^2 = \hat{r}^2$$

Es decir que necesariamente:

$$\frac{h'_{(\hat{r})}}{h_{(\hat{r})}} = \frac{1}{2}$$

Esto es muy fácil de resolver porque obviamente, debe pasar algo así como que:

$$h'_{(\hat{r})} = \frac{1}{2}h_{(\hat{r})}$$

Para que:

$$\frac{\frac{1}{2}h_{(\hat{r})}}{h_{(\hat{r})}} = \frac{1}{2}$$

¿Qué función se queda igual se derive o se integre? Simple: la función e.

Así, necesariamente:

$$h_{(\hat{r})} = e^{\hat{r}/2}$$

Ya que si derivamos $h_{(\hat{r})}$ en función de $\hat{r}$ tendríamos que:

$$h'_{(\hat{r})} = \frac{1}{2}e^{\hat{r}/2}$$

[424] ¿Qué sucede con el resto de la expresión? A mí no me convence mucho este paso… Mirar en las ecuaciones de segundo grado a ver si este tipo de paso es legítimo.

Así, nuestra expresión ladrillo tocho final es:

$$\left(-h_{(\hat{r})}\right)^2 + \left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2 - 4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right) = \hat{r}^2\left(h_{(\hat{r})}\right)^2$$

$$\left(-h_{(\hat{r})}\right)^2 + \left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2 - 4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right) = \hat{r}^2\left(e^{\hat{r}/2}\right)^2$$

$$\left(-h_{(\hat{r})}\right)^2 + \left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2 - 4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right) = \hat{r}^2 e^{\hat{r}}$$

Y nuestra métrica proporcional que lanzábamos como hipótesis:

$$d\hat{s}^2 = \left(\frac{4\hat{r}}{\left(-h_{(\hat{r})}\right)^2 + \left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2 - 4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)}\right) \left[(-d\hat{K}^2) + \left(\frac{\left(-h_{(\hat{r})}\right)^2 + \left(2(1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)^2 - 4\left(h_{(\hat{r})}\right)\left((1-\hat{r})h'_{(\hat{r})}\right)}{\hat{r}}\right)\left(\frac{1}{\hat{r}} - 1\right)d\hat{G}^2\right]$$

Queda como:

$$d\hat{s}^2 = \frac{4\hat{r}}{\hat{r}^2 e^{\hat{r}}} \cdot \left[-d\hat{K}^2 + \hat{K}^2 d\hat{G}^2\right]$$

$$d\hat{s}^2 = \frac{4}{\hat{r}\, e^{\hat{r}}} \cdot \left[-d\hat{K}^2 + \hat{K}^2 d\hat{G}^2\right]$$

Que sería la métrica que podemos usar, esta vez sí, cerca ya de la propia Singularidad. Y esto, además, no es aproximado, sino exacto para todo el Agujero Negro excepto, quizás, justo, justo, justo para la Singularidad donde $\hat{r} = 0$ que es un 'lugar' que siempre escapa a nuestra comprensión.

Así, si quisiéramos pasar a coordenadas de Minkowski tan sólo tendríamos que hacer lo mismo que hemos hecho en ocasiones anteriores: transformar las coordenadas:

$$\hat{K} = \sqrt{1-\hat{r}}\, h_{(\hat{r})} \rightarrow \sqrt{1-\hat{r}}\, e^{\hat{r}/2}$$

$$\hat{G} = \frac{\hat{t}}{2}$$

Según el 'modelo interno' que ya hemos definimos (que era un poco como la inversa de Rindler[425]):

$$t_{Black\ Hole} = \sqrt{1-\hat{r}}\, e^{\hat{r}/2} \cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$x_{Black\ Hole} = \sqrt{1-\hat{r}}\, e^{\hat{r}/2} \sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

[425] Véase página 657 de esta misma sección.

Y con dicho cambio de coordenadas, podríamos expresar la métrica como:

$$d\hat{s}^2 = \frac{4}{\hat{r}\, e^{\hat{r}}} \cdot [-(dt_{Black\ Hole})^2 + (dx_{Black\ Hole})^2] \qquad ^{426}$$

Que es exacto y aplicable, como hemos dicho, a todo el interior del Agujero Negro a excepción de la Vltima Thule pues es obvio que en $\hat{r} = 0$ tenemos una indeterminación, al contrario de las que resolvió Newton para su Cálculo, no evitable.

No conocemos la Singularidad, no podemos explicarla… pero podemos saber que, cayendo, acabaríamos por llegar a ella en algún momento ('caeríamos' a través del tiempo, claro… recordemos, todo está invertido aquí dentro). Veamos:

Puesto que podemos decir que en $\hat{r} = 0$[427]:

$$(t_{Black\ Hole})^2 - (x_{Black\ Hole})^2 = (1 - \hat{r})e^{\hat{r}}$$
$$(t_{Black\ Hole})^2 - (x_{Black\ Hole})^2 = (1 - 0)e^{0}$$
$$(t_{Black\ Hole})^2 - (x_{Black\ Hole})^2 = (1 - 0) \cdot 1$$
$$(t_{Black\ Hole})^2 - (x_{Black\ Hole})^2 = 1$$

Es decir, que la singularidad está, justo aquí:

$$(t_{Black\ Hole})^2 - (x_{Black\ Hole})^2 = 1$$

Es decir, no en un punto, sino en una línea de puntos (en realidad superficie, aunque ahora, en nuestro experimento súper-reducido hablemos de línea).

---

[426] Llamemos a la métrica así expresada como la Métrica de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal-Szekeres. Cuidado porque estamos expresando las cosas en términos de $t_{Black\ Hole}$ y $x_{Black\ Hole}$ y en cambio tenemos por ahí un $\frac{4}{\hat{r}\, e^{\hat{r}}}$ en la misma expresión. Para identificar la relación entre $t_{Black\ Hole}$ y $x_{Black\ Hole}$ y $\hat{r}$ bastaría con realizar el siguiente 'truco':

$$(t_{Black\ Hole})^2 - (x_{Black\ Hole})^2 = \left(\sqrt{1-\hat{r}}\, e^{\hat{r}/2}\, cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)\right)^2 - \left(\sqrt{1-\hat{r}}\, e^{\hat{r}/2}\, sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)\right)^2$$

Esto es:

$$(t_{Black\ Hole})^2 - (x_{Black\ Hole})^2 = (1 - \hat{r})e^{\hat{r}} \cdot \left(cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) - sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)\right)$$

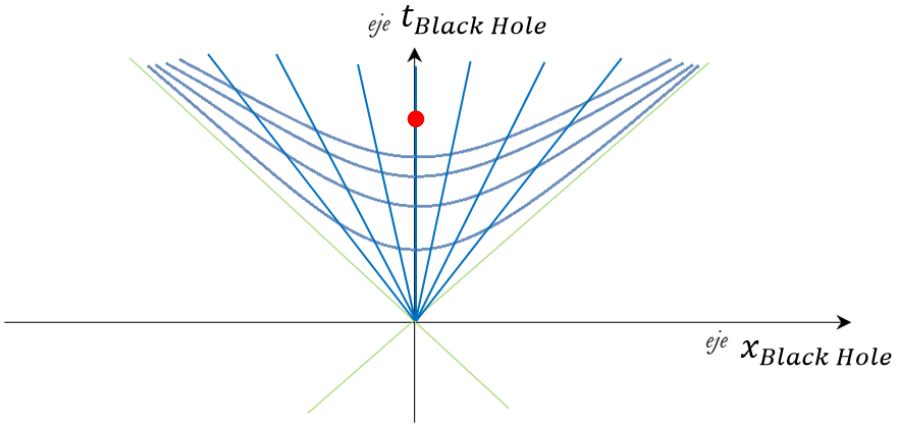
$$(t_{Black\ Hole})^2 - (x_{Black\ Hole})^2 = (1 - \hat{r})e^{\hat{r}} \cdot (1)$$

$$(t_{Black\ Hole})^2 - (x_{Black\ Hole})^2 = (1 - \hat{r})e^{\hat{r}}$$

Y con esta relación podríamos ir 'de un tipo de coordenadas al otro' cuando queramos.

[427] Véase nota 426.

Por nuestra expresión sabemos que cuando $x_{Black\ Hole} = 0$, $t_{Black\ Hole} = \pm 1$. Marquémoslo en nuestro gráfico:

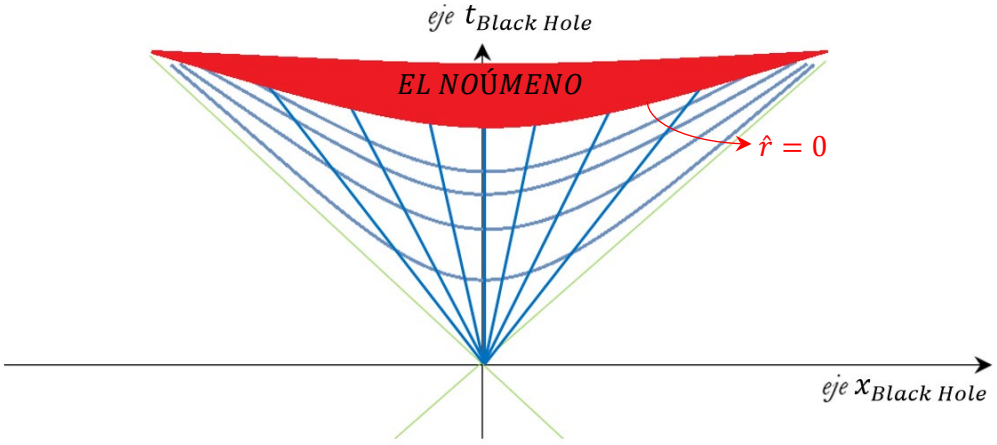


Y si despejamos $t_{Black\ Hole}$ y vemos su comportamiento según cambia $x_{Black\ Hole}$ obtenemos que:

$$(t_{Black\ Hole})^2 - (x_{Black\ Hole})^2 = 1$$

$$t_{Black\ Hole} = \sqrt{1 + (x_{Black\ Hole})^2}$$ [428]

Esto quiere decir que cuando $x_{Black\ Hole}$ crece, también lo hace $t_{Black\ Hole}$ y que cuando $x_{Black\ Hole} \to \infty\ t_{Black\ Hole} \approx x_{Black\ Hole}$:



Como nada puede ir más rápido que la velocidad de la luz, nada puede hacer una línea de más de 45º respecto a la vertical en nuestro esquema por lo que, una vez que algo cruza el Horizonte de Sucesos, jamás podrá salir y, es más, aunque permaneciera estático en el eje espacial, el tiempo, que sigue avanzando, haría que la Singularidad le acabara alcanzando, viniendo desde el futuro. Nada escapa.

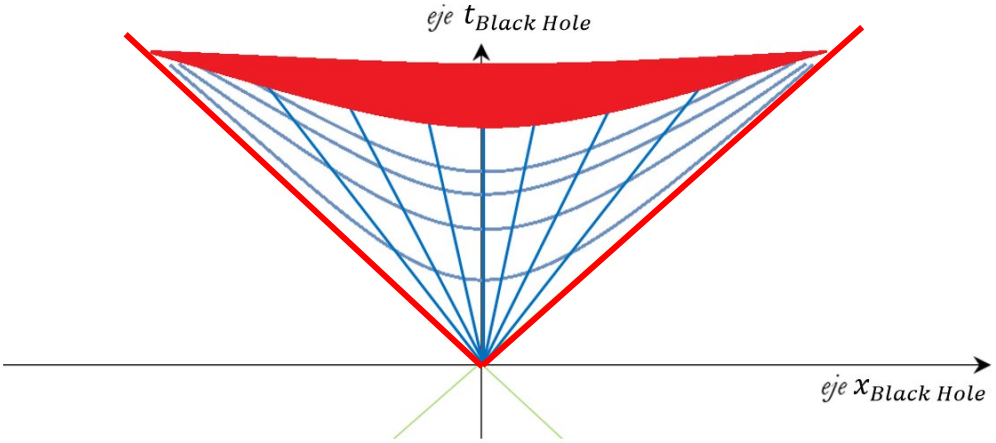
[428] Expresión que define a una hipérbola.

-2.15-

Agujero de gusano Einstein-Rosen

$\mathcal{S}$

Para empezar este capítulo, recordemos las coordenadas definidas para el interior de un agujero negro de Schwarzschild (una vez cruzado el Horizonte de Sucesos):



$$t_{Black\ Hole} = \sqrt{1-\hat{r}}\, e^{\hat{r}/2} \cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$x_{Black\ Hole} = \sqrt{1-\hat{r}}\, e^{\hat{r}/2} \sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

Para escribir un poco menos convengamos un cambio de terminología:

$$t_{Black\ Hole} = T$$

$$x_{Black\ Hole} = X$$

De manera que:

$$T = \sqrt{1-\hat{r}}\, e^{\hat{r}/2} \cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$X = \sqrt{1-\hat{r}}\, e^{\hat{r}/2} \sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

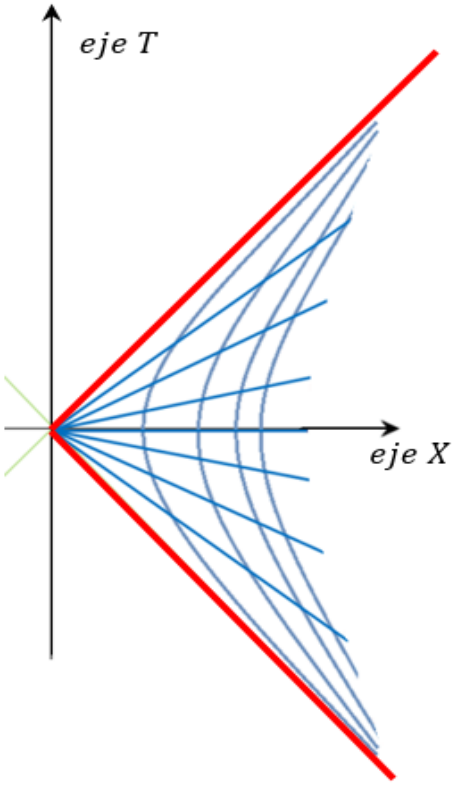
En este sistema de coordenadas, las líneas "horizontales curvas" representan líneas de tiempo constante y las líneas "oblicuas rectas" representan líneas en las que el espacio es constante.

Ahora, recordemos del capítulo anterior, que estas coordenadas que corresponden a las del interior del agujero negro, eran una especie de inversa de las coordenadas de Rindler que eran las que se aplicaban en el espacio exterior al agujero negro y curvado según la forma del Paraboloide de Flamm. Si hacemos un poco de memoria[429], recordemos que las coordenadas de Rindler eran[430]:

$$T = \sqrt{\hat{r} - 1}\, e^{\hat{r}/2} \sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$X = \sqrt{\hat{r} - 1}\, e^{\hat{r}/2} \cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

Y generaban una estructura espaciotemporal como el siguiente:

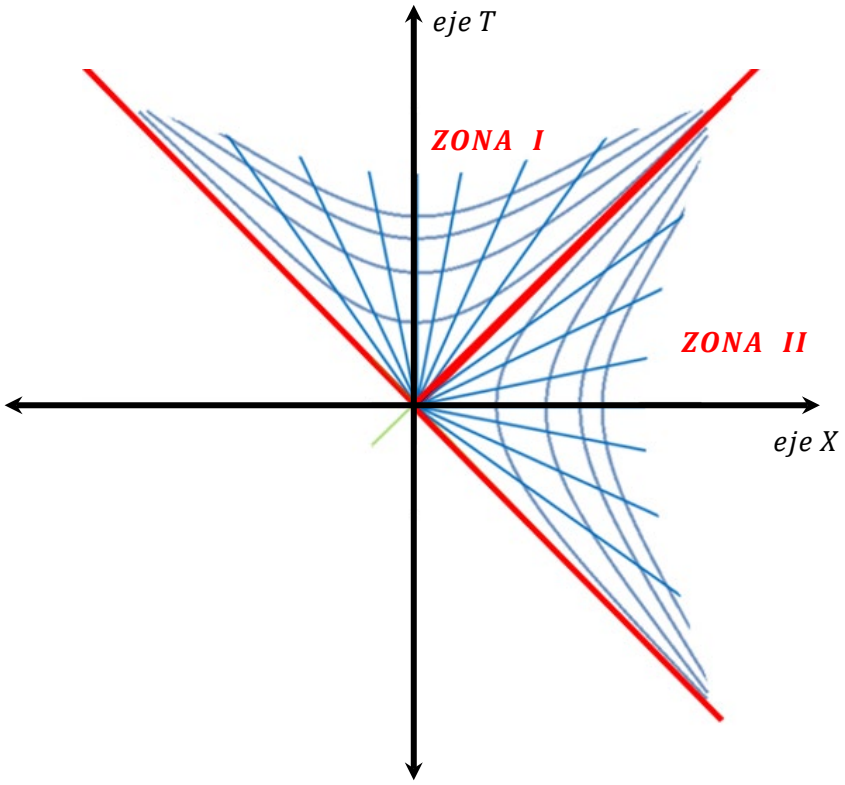


Donde las "curvas verticales" corresponden a una coordenada espacial fija y constante y las "oblicuas horizontales" corresponden a una coordenada temporal fija.

Tenemos entonces dos zonas: una zona interna al agujero negro (I) y una zona externa al agujero negro (II) que podríamos representar unidas:

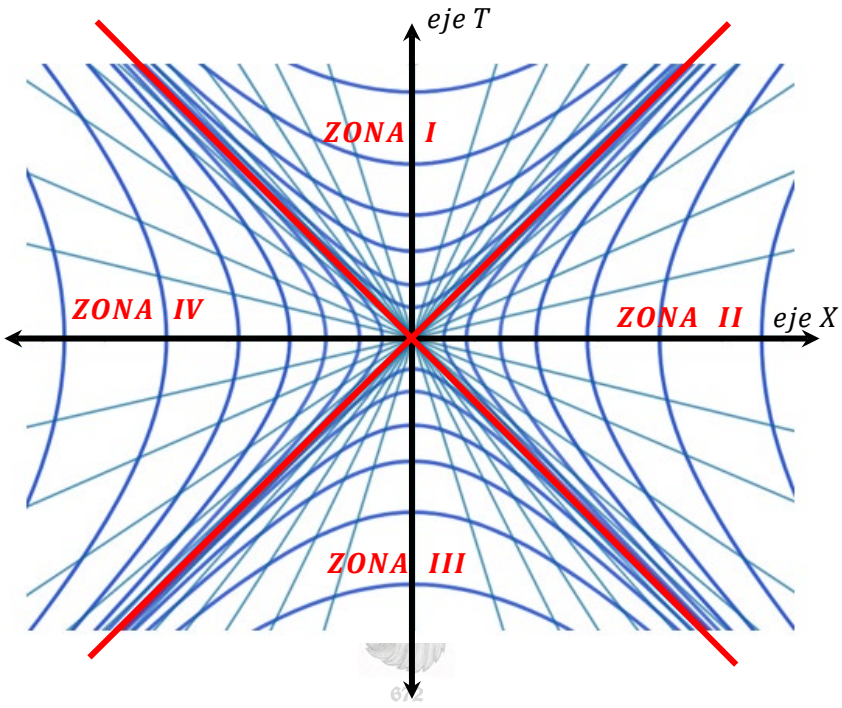
[429] Decir dónde estaba Rindler.

[430] Aprovechamos para usar la nomenclatura T, X que acabamos de redefinir.



Con esto ya tendríamos representadas las dos zonas "de existencia conocida" del Universo. La zona externa a cualquier agujero negro y la zona interna de cualquier agujero negro.

Pero ejerzamos ahora un poco de instrumentalistas. Juguemos con las expresiones y tratemos de incorporar otras dos zonas simétricas sin pararnos a pensar si son reales o si tienes, siquiera, sentido de hablar de ellas. Lo dicho, sin expectativas ni pretensiones de que sean reales. Sencillamente llevamos el instrumentalismo a su extremo y, realizando las combinaciones posibles de nuestras expresiones para las coordenadas, 'rellenemos' los cuadrantes puestos que aún están 'sin cubrir'. Es decir:



Tenemos, entonces, cuatro zonas. Dos de ellas 'reales':

- ZONA I. Interior de un agujero negro.

$$T = \sqrt{1-\hat{r}}\, e^{\hat{r}/2} \cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$
$$X = \sqrt{1-\hat{r}}\, e^{\hat{r}/2} \sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

- ZONA II. Exterior de todo agujero negro (el espacio, digamos, habitual, curvado, pero el habitual).

$$T = \sqrt{\hat{r}-1}\, e^{\hat{r}/2} \sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$
$$X = \sqrt{\hat{r}-1}\, e^{\hat{r}/2} \cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

Y otras dos, digamos, 'instrumentales' en el sentido de que surgen de 'juguetear' con las expresiones para las coordenadas. Estas zonas fueron propuestas por Kruskal y Szekeres[431] que, del mismo modo que quisieron extender la métrica de Schwarzschild al interior del agujero negro, ahora, siguiendo un camino similar, trataron de extender la métrica obtenida estas dos nuevas zonas, digamos, 'no percibidas o conocidas':

- ZONA III (el opuesto de la ZONA I).

$$T = -\sqrt{1-\hat{r}}\, e^{\hat{r}/2} \cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$
$$X = -\sqrt{1-\hat{r}}\, e^{\hat{r}/2} \sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

- ZONA IV (el opuesto de la ZONA II).

$$T = -\sqrt{\hat{r}-1}\, e^{\hat{r}/2} \sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$
$$X = -\sqrt{\hat{r}-1}\, e^{\hat{r}/2} \cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

Y, además, comprobaron que las transformaciones de coordenadas que proponían para estas zonas exóticas eran plenamente coherentes a la hora de reproducir la Métrica de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal-Szekeres. Para ello téngase en cuenta que cuando

[431] Hablar de Kruskal y Szekeres.

queramos calcular el elemento de línea con estas coordenadas tendríamos que realizar los siguientes pasos:

- Derivar T y X.
- Elevar al cuadrado el diferencial de ambas coordenadas. Momento en que cualquier signo negativo se convertirá en positivo.
- Realizar la operación $-dT^2 + dX^2$ cambiando, como siempre, el signo de dT.

(OBSERVACIÓN. Más adelante lo haremos cuando los resultados puedan sernos más definitivos)

De manera que, efectivamente, estaríamos en el mismo escenario que en las Zonas I y II.

Profundicemos un poco más en las zonas para comprobar qué naturaleza tienen esas Zonas instrumentales (III y IV) que pudieran pertenecer a un universo paralelo o a una mera entelequia. Para empezar, por ejemplo, veamos el comportamiento de todas las zonas (las reales y las instrumentales), al realizar $-T^2 + X^2$:

- Zona I. Interior de un agujero negro.

$$T = \sqrt{1-\hat{r}}\, e^{\hat{r}/2} \cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \rightarrow T^2 = (1-\hat{r})\, e^{\hat{r}} \cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$X = \sqrt{1-\hat{r}}\, e^{\hat{r}/2} \sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \rightarrow X^2 = (1-\hat{r})\, e^{\hat{r}} \sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

Ahora un detalle importante: recordemos que la Zona I es el interior del agujero negro por lo que el tiempo es espacio y el espacio es tiempo, es decir que lo que debemos hacer no es $-T^2 + X^2$ sino $T^2 - X^2$:

$$T^2 \rightarrow (1-\hat{r})\, e^{\hat{r}} \cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$-X^2 \rightarrow -(1-\hat{r})\, e^{\hat{r}} \sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$\frac{}{(1-\hat{r})e^{\hat{r}}\left[\cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)\right]}$$

$$(1-\hat{r})e^{\hat{r}}[1]$$

$$T^2 - X^2 = (1-\hat{r})e^{\hat{r}}$$

Ahora, si multiplicamos por -1 en ambos lados de nuestra expresión tenemos que:

$$(-1)\cdot T^2 - X^2 = (1-\hat{r})e^{\hat{r}} \cdot (-1)$$

$$-T^2 + X^2 = -(1-\hat{r})e^{\hat{r}}$$

$$-T^2 + X^2 = (\hat{r}-1)e^{\hat{r}}$$

- Zona II. Exterior de agujeros negros. Espacio normal del universo.

$$T = \sqrt{\hat{r}-1}\, e^{\hat{r}/2} \sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \rightarrow T^2 = (\hat{r}-1)\, e^{\hat{r}} \sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$X = \sqrt{\hat{r}-1}\, e^{\hat{r}/2} \cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \rightarrow X^2 = (\hat{r}-1)\, e^{\hat{r}} \cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$-T^2 \to -(\hat{r}-1)\, e^{\hat{r}}\, sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$X^2 \to (\hat{r}-1)\, e^{\hat{r}} cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$\frac{}{(\hat{r}-1)e^{\hat{r}}\left[cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) - sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)\right]}$$

$$(\hat{r}-1)e^{\hat{r}}[1]$$

$$(\hat{r}-1)e^{\hat{r}}$$

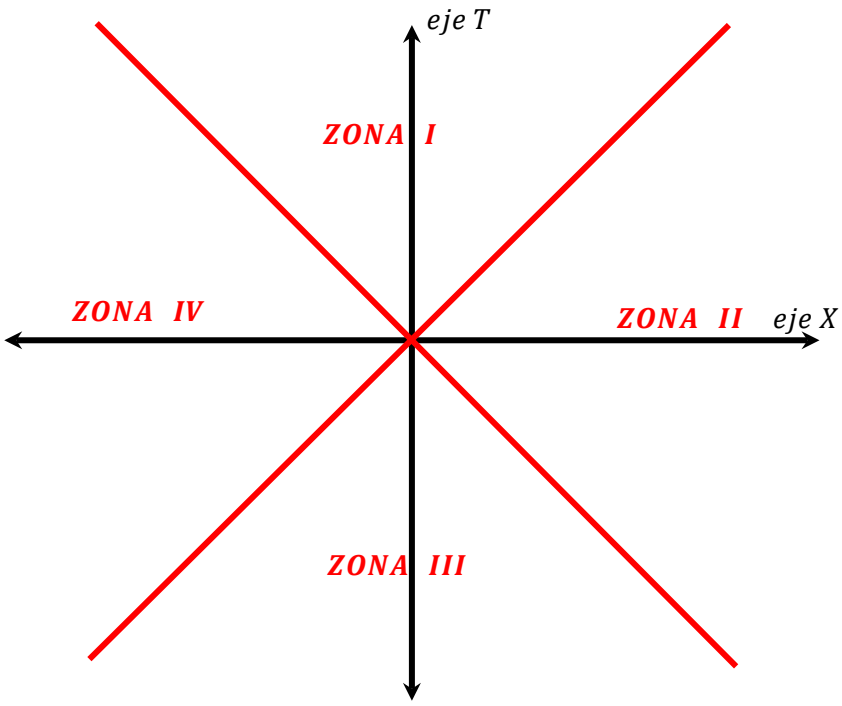
$$-T^2 + X^2 = (\hat{r}-1)e^{\hat{r}}$$

Que es exactamente la misma situación que en la Zona I.

Esto quiere decir que la ecuación[432]:

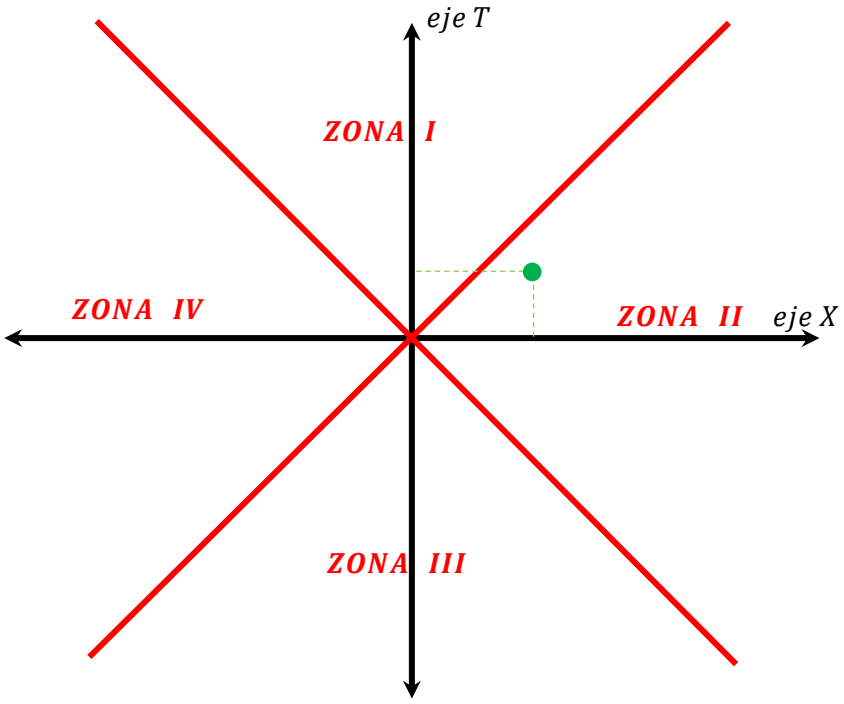
$$-T^2 + X^2 = (\hat{r}-1)e^{\hat{r}}$$

… nos define la $\hat{r}$ para ambas zonas y, por simetría, a las otras dos, es decir, para todo el espaciotiempo de Kruskal-Szekeres. Veámoslo gráficamente en un esquema como el siguiente:



[432] O la alternativa: $T^2 - X^2 = (\hat{r}-1)e^{\hat{r}}$.

Supongamos un punto, por ejemplo, $X = 2, T = 1$:



Si comprobamos en nuestra expresión común para las Zonas I y II (las reales), obtendríamos una $\hat{r}$ que pertenece a dicho área (en concreto a la Zona II donde el radio $\hat{r}$ debe ser mayor al radio de Schwarzschild $(= 1)$ y, por lo tanto, más acá, hacia fuera, del Horizonte de Sucesos):

$$-T^2 + X^2 = (\hat{r} - 1)e^{\hat{r}}$$

$$-1^2 + 2^2 = (\hat{r} - 1)e^{\hat{r}}$$

$$3 = (\hat{r} - 1)e^{\hat{r}}$$

$$\frac{3}{(\hat{r} - 1)} = e^{\hat{r}}$$

$$\ln\left(\frac{3}{(\hat{r} - 1)}\right) = \hat{r}$$

$$\hat{r} \cong 1.6$$ [433]

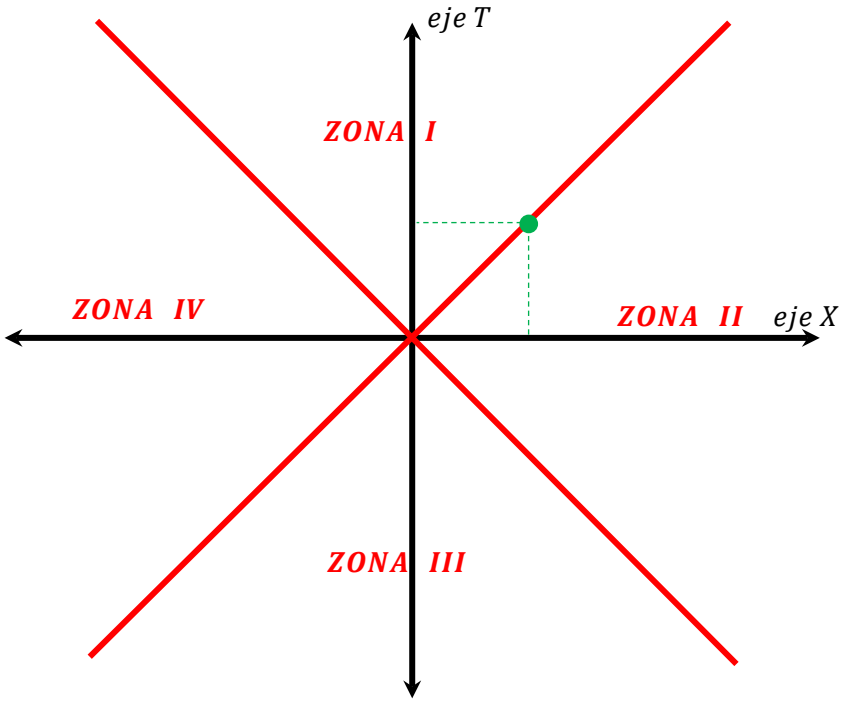
Es decir, que efectivamente, $\hat{r} > 1$ (radio de Schwarzschild). Y además, dicho valor, es perfectamente sustituible en la expresión para esa Zona II:

$$T = \sqrt{\hat{r} - 1}\, e^{\hat{r}/2} \sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \rightarrow \sqrt{(1.6) - 1}\, e^{(1.6)/2} \sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \rightarrow \text{solución posible}$$

$$X = \sqrt{\hat{r} - 1}\, e^{\hat{r}/2} \cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \rightarrow \sqrt{(1.6) - 1}\, e^{(1.6)/2} \cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \rightarrow \text{solución posible}$$

[433] Calculamos con Wolfram Alpha Mathematica.

Imaginemos que proponemos un punto, justo, en el Horizonte de Sucesos, es decir, en la diagonal. Podremos esperar que el radio $\hat{r}$ debe ser justamente igual a 1, es decir, al radio de Schwarzschild.



$$-T^2 + X^2 = (\hat{r} - 1)e^{\hat{r}}$$

$$-2^2 + 2^2 = (\hat{r} - 1)e^{\hat{r}}$$

$$0 = (\hat{r} - 1)e^{\hat{r}}$$

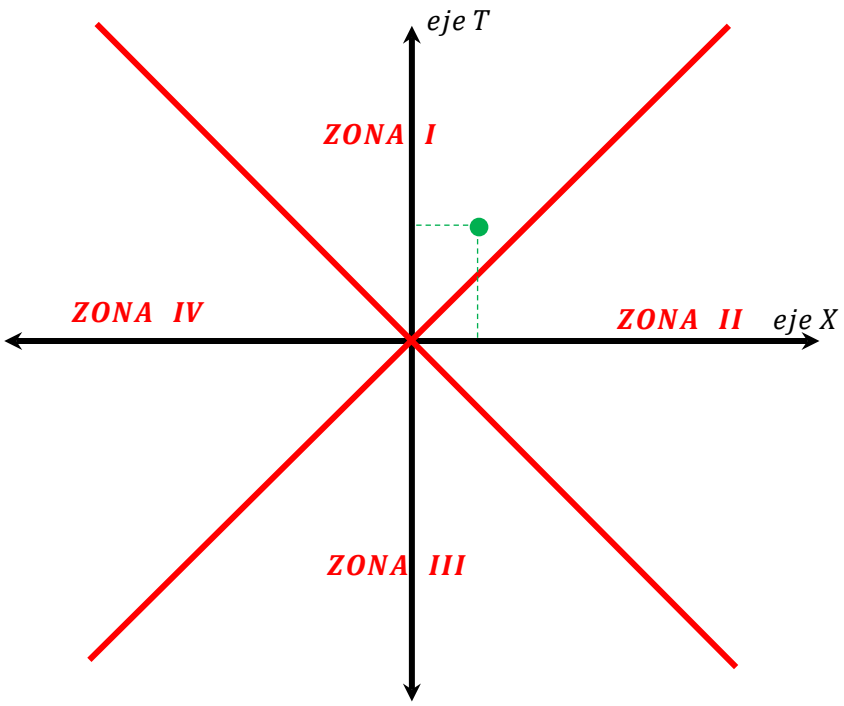
$$(\hat{r} - 1)e^{\hat{r}} = 0$$

$$\hat{r}e^{\hat{r}} - e^{\hat{r}} = 0$$

$$\hat{r}e^{\hat{r}} = e^{\hat{r}}$$

$$\hat{r} = \frac{e^{\hat{r}}}{e^{\hat{r}}} = 1$$

Y, para cualquier punto que entra en la Zona I el $\hat{r}$ que aporte dicho punto será menor de 1, ya que ha sobrepasado, hacia dentro, el radio de Schwarzschild. Por ejemplo, supongamos el punto $X = 1, T = 2$:



$$-T^2 + X^2 = (\hat{r} - 1)e^{\hat{r}}$$

$$-2^2 + 1^2 = (\hat{r} - 1)e^{\hat{r}}$$

$$-3 = (\hat{r} - 1)e^{\hat{r}}$$

$$\frac{-3}{(\hat{r} - 1)} = e^{\hat{r}}$$

$$\ln\left(\frac{-3}{(\hat{r} - 1)}\right) = \hat{r}$$

$$\hat{r} \cong 0.7$$

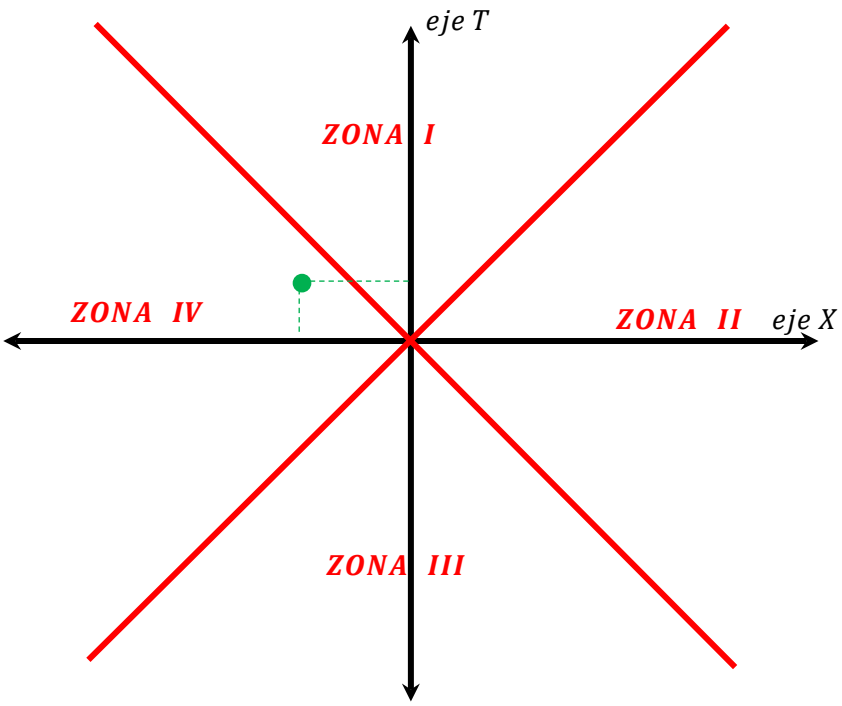
Es decir, ciertamente, menor al radio de Schwarzschild ($\hat{r} < 1$). Y solución que es perfectamente abordable desde las expresiones para la Zona I:

$$T = \sqrt{1 - \hat{r}}\, e^{\hat{r}/2} \cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \rightarrow \sqrt{1 - (0.7)}\, e^{(0.7)/2} \cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \rightarrow \text{solución posible}$$

$$X = \sqrt{1 - \hat{r}}\, e^{\hat{r}/2} \sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \rightarrow \sqrt{1 - (0.7)}\, e^{(0.7)/2} \sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \rightarrow \text{solución posible}$$

Es decir, que dadas unas determinadas coordenadas T y X podemos encontrar el radio (distancia desde el centro) a la que se encuentra el objeto respecto a la singularidad.

¿Sucederá lo mismo para las 'Zonas instrumentales III-IV'? Pues seguro que sí. Veámoslo. Supongamos el punto $X = -2, T = 1$:



Sustituyamos en nuestra expresión para calcular el radio $\hat{r}$ en el que se encuentra el cuerpo que orbita en el espaciotiempo de Kruskal-Szekeres:

$$-T^2 + X^2 = (\hat{r} - 1)e^{\hat{r}}$$

$$-1^2 + (-2)^2 = (\hat{r} - 1)e^{\hat{r}}$$

$$3 = (\hat{r} - 1)e^{\hat{r}}$$

$$\frac{3}{(\hat{r} - 1)} = e^{\hat{r}}$$

$$\ln\left(\frac{3}{(\hat{r} - 1)}\right) = \hat{r}$$

$$\hat{r} \cong 1.6$$

Es decir, de nuevo más acá (hacia nosotros… bueno, en este caso, hacia 'ellos', los habitantes de ese supuesto universo instrumental paralelo) del radio de Schwarzschild.

Pero, ¿no esperaría uno es este radio tuviera un sentido negativo? Pues, efectivamente, lo tiene, lo que pasa es que está en un espacio en que la coordenada X corre en sentido negativo. Es decir, es un radio positivo en un eje que corre en sentido negativo. Algo así como que para los habitantes del universo paralelo no hay nada raro pues ellos viven con normalidad esta expresión:

$$T = -\sqrt{\hat{r} - 1}\, e^{\hat{r}/2} \sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$X = -\sqrt{\hat{r} - 1}\, e^{\hat{r}/2} \cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

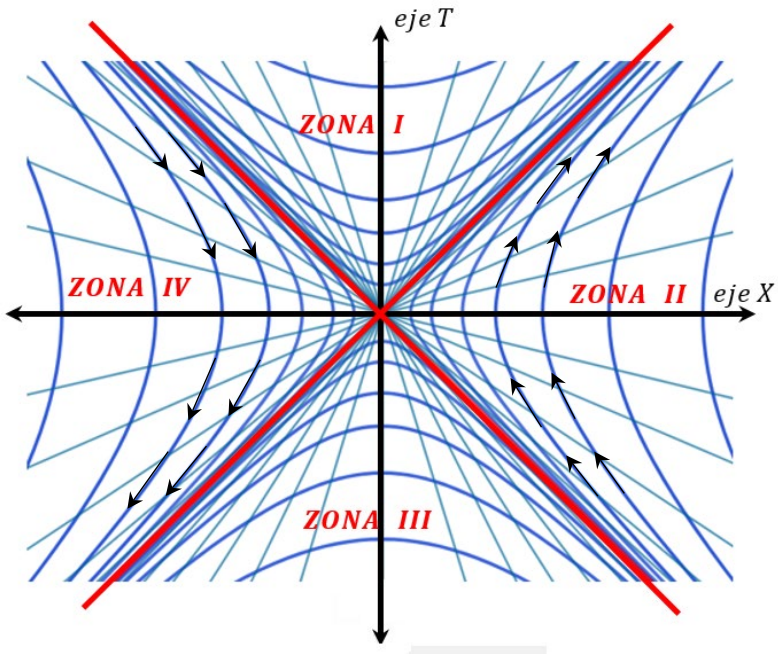
Es decir, es lo mismo que la Zona II, pero su opuesto. Digamos que en ese universo instrumental paralelo las cosas discurren en sentido contrario… ¡También el tiempo! Veamos qué le sucede al tiempo (al tiempo general de ese universo, no el tiempo propio de ningún objeto). Despejemos el tiempo con el valor que tenemos para el punto y radio propuestos pero en las expresiones definitorias de la Zona IV:

$$T = -\sqrt{\hat{r} - 1}\, e^{\hat{r}/2} \sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$1 = -\sqrt{(1.6) - 1}\, e^{(1.6)/2} \sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$\hat{t} \cong (-1.1)$$

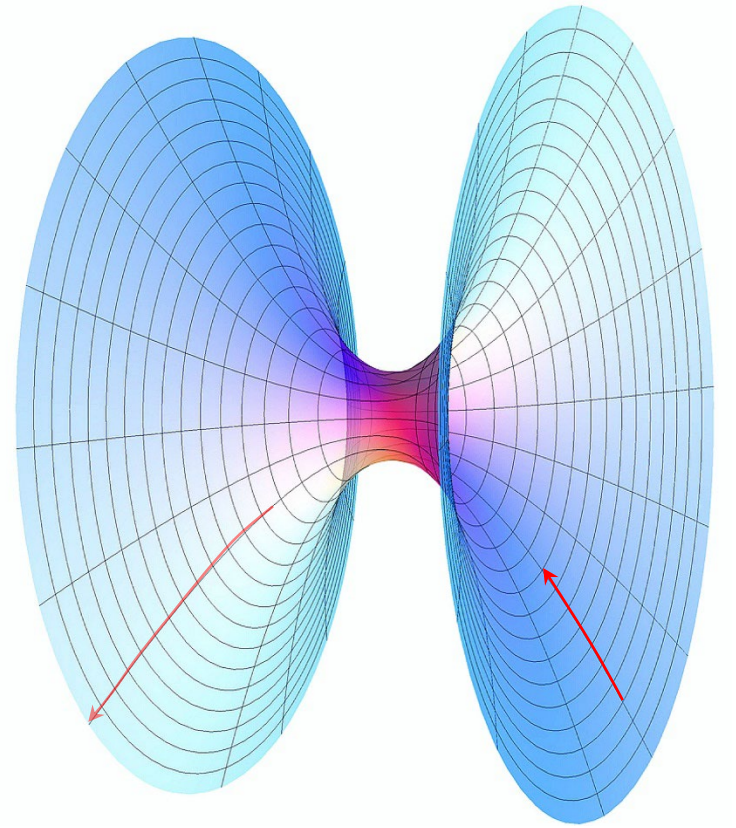
Es decir, un tiempo ¡negativo! (coordenado, insistimos, no es el tiempo propio de ningún observador; el tiempo propio de cualquier observador le saldrá positivo). Esto vendría a decir que para un observador estático que esté fuera de un agujero negro mirando lo que pasa en todo el espaciotiempo de Kruskal-Szekeres, vería que el tiempo en la derecha (Zona II) crecería hacia arriba mientras que en la izquierda (Zona IV) crecería hacia abajo. Algo así:



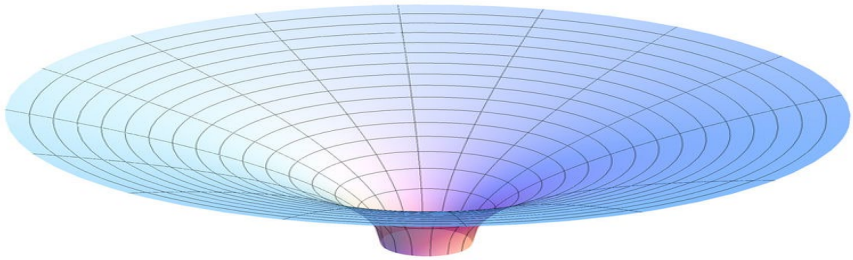
¿Existe este universo paralelo? Pues de momento no tenemos ni la menor idea. Las matemáticas dicen que es posible… pero también dicen que es posible dividir infinitamente algo y en la realidad nos hemos topado con la constante de Plank. Es decir, las matemáticas y la realidad no tienen por qué ser especularmente idénticas. Por eso decimos 'Universo Instrumental'.

Pero esta hipótesis de Universo Paralelo, antes de que Kruskal y Szekeres, extendieran la métrica de Schwarzschild a este espaciotiempo completo de cuatro zonas, fue emitida

bastante antes por Einstein y Rosen[434] y la posibilidad de 'viajar' de uno al otro (de la Zona II a la Zona IV) se conoció como 'Puente de Einstein-Rosen'.



Para hablar de esto recordemos cómo se curvaba el espaciotiempo según nos acercábamos a un agujero negro y cómo dicha curvatura se correspondía con el Paraboloide de Flamm:



Que en coordenadas cilíndricas, y dentro de un espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$, lo hemos definido[435] como:

[434] Nathan Rosen est un physicien (né le 22 mars 1909 à Brooklyn - mort le 26 juillet 1995 à Haïfa) qui collabora en 1935 avec Albert Einstein et Boris Podolsky sur l'interprétation de la mécanique quantique. Ils écrivent tous trois en 1935 le fameux article « La description de la réalité physique par la mécanique quantique peut-elle être considérée comme complète ? », dit du "paradoxe EPR".

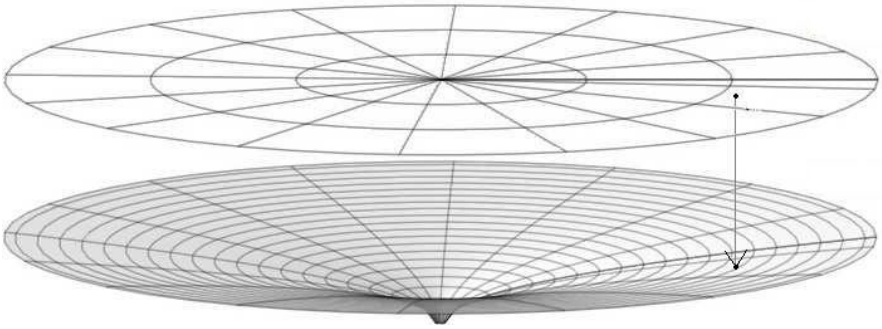
[435] Véase página 538.

$$r = a + \frac{z^2}{4a}$$

Donde a es el radio de Schwarzschild $\left(a = \frac{2GM}{c^2}\right)$ y que en nuestro caso adimensional es igual a 1, por lo que la definición nos queda como:

$$r = 1 + \frac{z^2}{4}$$

De manera que al inducir una métrica $\mathbb{R}^3$ (ojo, recordemos, quedándonos sólo con un plano ecuatorial en que $\theta = \frac{\pi}{2}$) $dx^2 + dy^2 + dz^2$ sobre un Paraboloide de Flamm:



Nos quedaba (en coordenadas cilíndricas) algo que se parecía mucho a la métrica de Schwarzschild[436]:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

Téngase en cuenta ahora que no tiene sentido estar hablando de una especie de espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ dentro del cual está una superficie que es el Paraboloide de Flamm. Las cosas no son así. Es complejo de imaginar. No tiene ningún sentido pensar nada de esto:

$$r = 1 + \frac{z^2}{4}$$

… como la dimensión z de un espacio euclídeo. Sería absurdo. Hemos usado instrumentalmente la visualización de un espacio con forma curva dentro de un espacio plano y hemos proyectado (inducido) la métrica plana en el espacio curvado… pero el espacio es, justamente, ese espacio curvado, por lo que no tiene sentido seguir pensando que la dimensión z es una especie de 'altura' en el espacio 3d. Es mucho más útil pensar esa z como una función f determinada:

$$r = 1 + \frac{f^2}{4}$$

… que deforma de un modo u otro un espacio que ya está definido, en coordenadas cilíndricas, por la Métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2 \theta d\varphi^2$$

[436] Véase página 537.

Que en unidades adimensionales es:

$$ds^2 = -\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)dt^2 + \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1} dr^2 + \hat{r}^2 d\theta^2 + \hat{r}^2 sin^2\theta d\varphi^2$$

Ahora, para 'deformar' esta métrica con nuestra expresión de la forma del Paraboloide de Flamm en la que $\hat{r}$ está en función de f y no de una z que no tiene sentido usar, es decir, para transformar la dimensión $\hat{r}$ de la forma de Flamm procederemos a hacerlas converger y transformar la coordenada $\hat{r}$ en f haciendo lo siguiente. Sabemos que:

$$\hat{r} = 1 + \frac{f^2}{4}$$

Luego:

$$dr = \frac{f}{2} df$$

$$2dr = f df$$

Elevamos al cuadrado para ir acercándolo a la dimensión cilíndrica dr^2:

$$4dr^2 = f^2 df^2$$

$$dr^2 = \frac{f^2 df^2}{4}$$

Y, ahora, sustituyendo en la métrica:

$$ds^2 = -\left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)dt^2 + \left(1-\frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1} dr^2 + \hat{r}^2 d\theta^2 + \hat{r}^2 sin^2\theta d\varphi^2$$

$$ds^2 = -\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{f^2}{4}\right)}\right)dt^2 + \left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{f^2}{4}\right)}\right)^{-1} \frac{f^2}{4} df^2 + \left(1+\frac{f^2}{4}\right)^2 d\theta^2 + \left(1+\frac{f^2}{4}\right)^2 sin^2\theta d\varphi^2$$

Obtenemos que:

$$ds^2 = -\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{f^2}{4}\right)}\right)dt^2 + \left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{f^2}{4}\right)}\right)^{-1} \frac{f^2}{4} df^2 + \left(1+\frac{f^2}{4}\right)^2 (d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$

Un ladrillo que podemos simplificar un poco:

$$-\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{f^2}{4}\right)}\right) = -\left(\frac{1+\frac{f^2}{4}-1}{\left(1+\frac{f^2}{4}\right)}\right) = -\left(\frac{\frac{f^2}{4}}{\left(1+\frac{f^2}{4}\right)}\right) = -\left(\frac{f^2}{4+f^2}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{f^2}{4}\right)}\right)^{-1} = \left(\frac{4+f^2}{f^2}\right)$$

De manera que la métrica con la coordenada $\hat{r}$ transformada en f queda así:

$$ds^2 = -\left(\frac{f^2}{4+f^2}\right)dt^2 + \left(\frac{4+f^2}{f^2}\right)\frac{f^2}{4}df^2 + \left(1+\frac{f^2}{4}\right)^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$

$$ds^2 = -\left(\frac{f^2}{4+f^2}\right)dt^2 + \left(\frac{4+f^2}{4}\right)df^2 + \left(1+\frac{f^2}{4}\right)^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$

Que es la métrica que publicaron Einstein y Rosen en 1935.

Según la transformación de coordenadas $\hat{r} \to f$ que hemos realizado:

$$\hat{r} = 1 + \frac{f^2}{4}$$

Es obvio que para cualquier valor de f que va desde $-\infty$ a $+\infty$, los valores que podrá adoptar $\hat{r}$ estarán comprendidos en el intervalo:

$$\hat{r} = [1, +\infty)$$

Si habiendo hecho esta transformación, volvemos a usar la definición de coordenadas de Kruskal-Szekeres (usamos el de la Zona II… el universo espaciotemporal tal y como lo conocemos fuera de un agujero negro):

$$T = \sqrt{\hat{r}-1}\, e^{\hat{r}/2} \sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$X = \sqrt{\hat{r}-1}\, e^{\hat{r}/2} \cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

Y recordamos que estas coordenadas hacían que la métrica resultara tener esta forma:

$$d\hat{s}^2 = \frac{4}{\hat{r}\, e^{\hat{r}}} \cdot [-(dT)^2 + (dX)^2] + \hat{r}^2 d\Omega^2$$

Que si lo constreñimos a un plano en que θ y φ son fijos y 'felices', entonces nos queda:

$$d\hat{s}^2 = \frac{4}{\hat{r}\, e^{\hat{r}}} \cdot [-(dT)^2 + (dX)^2]$$

Y ahora sustituimos con la redefinición de coordenadas que hemos hecho:

$$\hat{r} = 1 + \frac{f^2}{4}$$

Podemos sustituir en las coordenadas de Kruskal de manera que nos quede:

$$T = \sqrt{\frac{f^2}{4}}\, e^{1+\frac{f^2}{4}/2} \sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \to \frac{f}{2} \cdot\ e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot \sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$X = \sqrt{\frac{f^2}{4}}\, e^{1+\frac{f^2}{4}/2} \cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \to \frac{f}{2} \cdot\ e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot \cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \quad [437]$$

Y podemos redefinir la métrica de Kruskal con el cambio de variable $\hat{r} \to f$. Empecemos:

$$d\hat{s}^2 = \frac{4}{\hat{r}} e^{-\hat{r}} \cdot [-(dT)^2 + (dX)^2] + \hat{r}^2 d\Omega^2$$

$$d\hat{s}^2 = \frac{4}{\hat{r}} e^{-\hat{r}} \cdot [-(dT)^2 + (dX)^2] \quad [438]$$

En primer lugar sustituyamos $\hat{r}$ por la nueva expresión en función de f:

$$d\hat{s}^2 = \frac{4}{\left(1+\frac{f^2}{4}\right)} e^{-\left(1+\frac{f^2}{4}\right)} \cdot [-(dT)^2 + (dX)^2] + \left(1+\frac{f^2}{4}\right)^2 d\Omega^2$$

$$d\hat{s}^2 = \frac{4}{\left(1+\frac{f^2}{4}\right)} e^{-\left(1+\frac{f^2}{4}\right)} \cdot [-(dT)^2 + (dX)^2]$$

[437] Aprovechemos para calcular algunas expresiones que nos serán útiles más adelante:

$$T^2 = \frac{f^2}{4} \cdot\ e^{1+\frac{f^2}{4}} \cdot \sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$X^2 = \frac{f^2}{4} \cdot\ e^{1+\frac{f^2}{4}} \cdot \cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$X^2 - T^2 = \frac{f^2}{4} \cdot\ e^{1+\frac{f^2}{4}} \cdot \left[\cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)\right]$$

$$X^2 - T^2 = \frac{f^2}{4} \cdot\ e^{1+\frac{f^2}{4}}$$

[438] Como sabemos, en el caso de θ y φ fijos y 'felices'

Comprobemos si esto es así. Para ello empecemos por calcular dT y dX.

Empecemos por dT:

$$T = \frac{f}{2} \cdot \; e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

Observamos que está en función de dos variables: $f, \hat{t}$, luego tendremos que hacer la derivada parcial de la función:

$$dT_{(f,\hat{t})} = \frac{f}{2} \cdot \; e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

a) En rojo el término que se está derivando: $\frac{\partial T_{(f,\hat{t})}}{\partial f}$

$$\frac{\partial T_{(f,\hat{t})}}{\partial f} = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) + \frac{f}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \frac{f}{4} \cdot sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) + \frac{f}{2} \cdot \; e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot 0$$

$$\frac{\partial T_{(f,\hat{t})}}{\partial f} = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) + \frac{f}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \frac{f}{4} \cdot sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$\frac{\partial T_{(f,\hat{t})}}{\partial f} = \frac{1}{2} \cdot sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)\left[e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} + e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \frac{f^2}{4}\right]$$

$$\frac{\partial T_{(f,\hat{t})}}{\partial f} = \frac{1}{2} \cdot sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \cdot \left[1 + \frac{f^2}{4}\right] \cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}}$$

$$\frac{\partial T_{(f,\hat{t})}}{\partial f} = \frac{1}{2} \cdot sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \cdot \left[\frac{4 + f^2}{4}\right] \cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}}$$

$$\frac{\partial T_{(f,\hat{t})}}{\partial f} = \frac{1}{8} \cdot sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \cdot (4 + f^2) \cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}}$$

b) En rojo el término que se está derivando: $\frac{\partial T_{(f,\hat{t})}}{\partial \hat{t}}$

$$\frac{\partial T_{(f,\hat{t})}}{\partial \hat{t}} = 0 \cdot \; e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) + \frac{f}{2} \cdot \; 0 \cdot sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) + \frac{f}{2} \cdot \; e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial T_{(f,\hat{t})}}{\partial \hat{t}} = \frac{f}{4} \cdot \; e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$dT_{(f,\hat{t})} = \left[\frac{1}{8} \cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \cdot (4 + f^2) \cdot\right] df + \left[\frac{f}{4} \cdot \; e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)\right] d\hat{t}$$

$$dT_{(f,\hat{t})} = \left[\frac{1}{8} \cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \cdot (4 + f^2) \cdot\right] df + \left[\frac{2}{2}\frac{f}{4} \cdot \; e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)\right] d\hat{t}$$

$$dT_{(f,\hat{t})} = \left[\frac{1}{8}\cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}}\cdot sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)\cdot(4+f^2)\cdot\right]df + \left[\frac{2f}{8}\cdot\ e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}}\cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)\right]d\hat{t}$$

$$dT_{(f,\hat{t})} = \frac{1}{8}\cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}}\left[\left((4+f^2)\,sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)df\right) + \left(2f\,cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)d\hat{t}\right)\right]$$

Sigamos por dX:

$$X = \frac{f}{2}\cdot\ e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}}\cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

a) En rojo el término que se está derivando: $\frac{\partial X_{(f,\hat{t})}}{\partial f}$

$$\frac{\partial X_{(f,\hat{t})}}{\partial f} = \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}}\cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) + \frac{f}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}}\frac{f}{4}\cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) + \frac{f}{2}\cdot\ e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}}\cdot 0$$

$$\frac{\partial T_{(f,\hat{t})}}{\partial f} = \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}}\cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) + \frac{f}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}}\frac{f}{4}\cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$\frac{\partial T_{(f,\hat{t})}}{\partial f} = \frac{1}{2}\cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)\left[e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} + e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}}\frac{f^2}{4}\right]$$

$$\frac{\partial T_{(f,\hat{t})}}{\partial f} = \frac{1}{2}\cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)\cdot\left[1+\frac{f^2}{4}\right]\cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}}$$

$$\frac{\partial T_{(f,\hat{t})}}{\partial f} = \frac{1}{2}\cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)\cdot\left[\frac{4+f^2}{4}\right]\cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}}$$

$$\frac{\partial T_{(f,\hat{t})}}{\partial f} = \frac{1}{8}\cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)\cdot(4+f^2)\cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}}$$

b) En rojo el término que se está derivando: $\frac{\partial X_{(f,\hat{t})}}{\partial \hat{t}}$

$$\frac{\partial X_{(f,\hat{t})}}{\partial \hat{t}} = 0\cdot\ e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}}\cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) + \frac{f}{2}\cdot\ 0\cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) + \frac{f}{2}\cdot\ e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}}\cdot sin\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial T_{(f,\hat{t})}}{\partial \hat{t}} = \frac{f}{4}\cdot\ e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}}\cdot sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$dX_{(f,\hat{t})} = \frac{1}{8}\cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}}\left[\left((4+f^2)\,cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)df\right) + \left(2f\,sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)d\hat{t}\right)\right]$$

Ahora elevemos al cuadrado:

$$dT_{(f,\hat{t})} = \frac{1}{8} \cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \left[\left((4+f^2)\, sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) df \right) + \left(2f\, cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) d\hat{t} \right) \right]$$

$$dT^2{}_{(f,\hat{t})} = \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \right)^2 \cdot \left[\left((4+f^2)\, sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) df \right) + \left(2f\, cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) d\hat{t} \right) \right]^2$$

$$dT^2{}_{(f,\hat{t})} = \frac{1}{64} \cdot e^{1+\frac{f^2}{4}} \cdot \left[\left((4+f^2)\, sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) df \right) + \left(2f\, cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) d\hat{t} \right) \right]^2$$

$$\left[\left((4+f^2)\, sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) df \right) + \left(2f\, cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) d\hat{t} \right) \right]^2 =$$

$$= (4+f^2)^2\, sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) df^2 + \left(4f^2\, cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) d\hat{t}^2 \right) + 2\left((4+f^2)\, sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) 2f\, cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) df d\hat{t} \right)$$

$$dT^2{}_{(f,\hat{t})} = \frac{1}{64} \cdot e^{1+\frac{f^2}{4}} \cdot \left[(4+f^2)^2\, sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) df^2 + \left(4f^2\, cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) d\hat{t}^2 \right) + 4f\left((4+f^2)\, sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) df d\hat{t} \right) \right]$$

$$dX_{(f,\hat{t})} = \frac{1}{8} \cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \left[\left((4+f^2)\, cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) df \right) + \left(2f\, sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) d\hat{t} \right) \right]$$

$$dX_{(f,\hat{t})} = \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \right)^2 \cdot \left[\left((4+f^2)\, cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) df \right) + \left(2f\, sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) d\hat{t} \right) \right]^2$$

$$dX_{(f,\hat{t})} = \frac{1}{64} \cdot e^{1+\frac{f^2}{4}} \cdot \left[\left((4+f^2)\, cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) df \right) + \left(2f\, sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) d\hat{t} \right) \right]^2$$

$$dX^2{}_{(f,\hat{t})} = \frac{1}{64} \cdot e^{1+\frac{f^2}{4}} \cdot \left[(4+f^2)^2\, cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) df^2 + \left(4f^2\, sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) d\hat{t}^2 \right) + 4f\left((4+f^2)\, cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) df d\hat{t} \right) \right]$$

Y ahora hacemos $-(dT)^2 + (dX)^2$:

$$-\left\{ \frac{1}{64} \cdot e^{1+\frac{f^2}{4}} \cdot \left[(4+f^2)^2\, sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) df^2 + \left(4f^2\, cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) d\hat{t}^2 \right) + 4f\left((4+f^2)\, sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) df d\hat{t} \right) \right] \right\}$$

$$\frac{1}{64} \cdot e^{1+\frac{f^2}{4}} \cdot \left[(4+f^2)^2\, cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) df^2 + \left(4f^2\, sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) d\hat{t}^2 \right) + 4f\left((4+f^2)\, cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) df d\hat{t} \right) \right]$$

$$\frac{1}{64}\cdot e^{1+\frac{f^2}{4}}\cdot\left[-(4+f^2)^2\,sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)df^2-\left(4f^2\,cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)d\hat{t}^2\right)-4f\left((4+f^2)\,sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)df d\hat{t}\right)\right]$$

$$\frac{1}{64}\cdot e^{1+\frac{f^2}{4}}\cdot\left[(4+f^2)^2\,cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)df^2+\left(4f^2\,sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)d\hat{t}^2\right)+4f\left((4+f^2)\,cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)df d\hat{t}\right)\right]$$

¿?

$$-dT^2=\frac{1}{64}\cdot e^{1+\frac{f^2}{4}}\cdot\left[-(4+f^2)^2\,sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)df^2-\left(4f^2\,cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)d\hat{t}^2\right)\right]$$

$$dX^2=\frac{1}{64}\cdot e^{1+\frac{f^2}{4}}\cdot\left[(4+f^2)^2\,cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)df^2+\left(4f^2\,sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)d\hat{t}^2\right)\right]$$

$$\frac{1}{64}\cdot e^{1+\frac{f^2}{4}}\left\{\left[\left((4+f^2)^2\,cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)-(4+f^2)^2\,sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)\right)df^2\right]+\left[\left(4f^2\,sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)-4f^2\,cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)\right)d\hat{t}^2\right]\right\}$$

Es decir que:

$$\frac{-dT^2+dX^2}{\frac{1}{64}\cdot e^{1+\frac{f^2}{4}}}=\left[\left((4+f^2)^2\,cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)-(4+f^2)^2\,sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)\right)df^2\right]+\left[\left(4f^2\,sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)-4f^2\,cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)\right)d\hat{t}^2\right]$$

$$\frac{-dT^2+dX^2}{\frac{1}{64}\cdot e^{1+\frac{f^2}{4}}}=\left[(4+f^2)^2\left(cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)-sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)\right)df^2\right]+\left[4f^2\left(sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)-cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)\right)d\hat{t}^2\right]$$

$$\frac{-dT^2+dX^2}{\frac{1}{64}\cdot e^{1+\frac{f^2}{4}}}=[(4+f^2)^2(+1)df^2]+[4f^2(-1)d\hat{t}^2]$$

$$\frac{-dT^2+dX^2}{\frac{1}{64}\cdot e^{1+\frac{f^2}{4}}}=(4+f^2)^2df^2-4f^2d\hat{t}^2$$

$$-dT^2+dX^2=\frac{1}{64}\cdot e^{1+\frac{f^2}{4}}\cdot[(4+f^2)^2df^2-4f^2d\hat{t}^2]$$

$$-dT^2+dX^2=\frac{1}{64}\cdot e^{1+\frac{f^2}{4}}\cdot\left[(4+f^2)^2df^2-\left(\frac{1}{(4+f^2)}\right)4f^2d\hat{t}^2\right]$$

$$-dT^2+dX^2=\frac{1}{64}\cdot e^{1+\frac{f^2}{4}}\cdot(4+f^2)\cdot\left[(4+f^2)df^2-\left(\frac{1}{(4+f^2)}\right)4f^2d\hat{t}^2\right]$$

$$-dT^2+dX^2=\frac{1}{64}\cdot e^{1+\frac{f^2}{4}}\cdot(4+f^2)\cdot\left[\frac{4}{4}(4+f^2)df^2-\left(\frac{1}{(4+f^2)}\right)4f^2d\hat{t}^2\right]$$

$$-dT^2+dX^2=\frac{1}{64}\cdot e^{1+\frac{f^2}{4}}\cdot(4+f^2)\cdot 4\cdot\left[\frac{(4+f^2)}{4}df^2-\frac{f^2}{(4+f^2)}d\hat{t}^2\right]$$

$$-dT^2 + dX^2 = \frac{1}{16} \cdot e^{\,1+\frac{f^2}{4}} \cdot (4+f^2) \cdot \left[\frac{(4+f^2)}{4} df^2 - \frac{f^2}{(4+f^2)} d\hat{t}^2\right]$$

Ahora:

$$ds^2 = -(lo\ que\ sea\ d\hat{t}^2) + (lo\ que\ sea\ df^2)$$

Es decir:

$$\boldsymbol{ds^2 = -\frac{f^2}{(4+f^2)} d\hat{t}^2 + \frac{(4+f^2)}{4} df^2}$$

Por lo que podemos decir:

$$-dT^2 + dX^2 = \frac{1}{16} \cdot e^{\,1+\frac{f^2}{4}} \cdot (4+f^2) \cdot [ds^2]$$

Luego:

$$ds^2 = \frac{16}{(4+f^2)} e^{-\left(1+\frac{f^2}{4}\right)} \cdot [-dT^2 + dX^2]$$

$$ds^2 = \frac{1/4}{1/4} \cdot \frac{16}{(4+f^2)} e^{-\left(1+\frac{f^2}{4}\right)} \cdot [-dT^2 + dX^2]$$

$$ds^2 = \frac{4}{\left(1+\frac{f^2}{4}\right)} e^{-\left(1+\frac{f^2}{4}\right)} \cdot [-dT^2 + dX^2]$$

Que es la misma que ya habíamos propuesto:

$$d\hat{s}^2 = \frac{4}{\left(1+\frac{f^2}{4}\right)} e^{-\left(1+\frac{f^2}{4}\right)} \cdot [-(dT)^2 + (dX)^2]$$ [439]

Una vez comprobado que el cambio de coordenadas es coherente con la métrica, sigamos con nuestro estudio. Recordemos que tenemos esto:

$$T = \frac{f}{2} \cdot\ e^{\,\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$X = \frac{f}{2} \cdot\ e^{\,\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

$$X^2 - T^2 = \frac{f^2}{4} \cdot\ e^{\,1+\frac{f^2}{4}} \cdot \left[cosh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) - sinh^2\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)\right]$$

$$X^2 - T^2 = \frac{f^2}{4} \cdot\ e^{\,1+\frac{f^2}{4}}$$

[439] Recordemos, la versión reducida de theta y phi felizmente fijas.

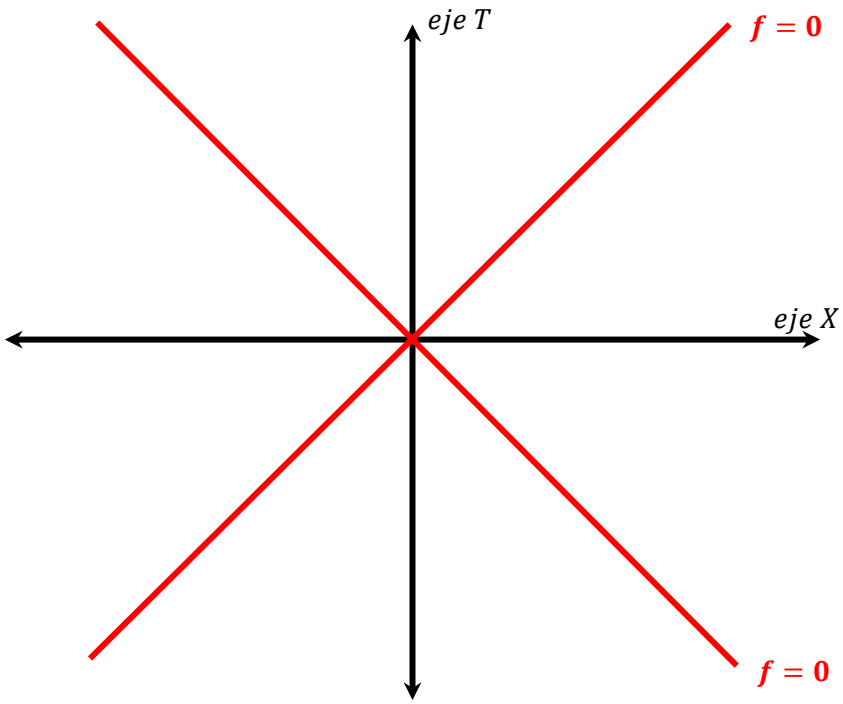
En un esquema espacio temporal como el que usamos para abordar la extensiones métricas de Kruskal, ¿qué zonas cubren estas coordenadas? Para ello, antes de proceder a usar el esquema observemos algo en esta expresión:

$$X^2 - T^2 = \frac{f^2}{4} \cdot e^{1+\frac{f^2}{4}}$$

Resulta que cuando $f = 0$ sucede que:

$$X = \pm T$$

Es decir, las diagonales. Por ello, podemos afirmar que cuando $f = 0, \hat{r} = 1$ y, por lo tanto, estaríamos en el Horizonte de Sucesos.



La pregunta ahora es, ¿qué 'zonas' cubrirían nuestras expresiones para diferentes valores de f?

$$T = \frac{f}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot \sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$
$$X = \frac{f}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot \cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

Veámoslo. Supongamos valores positivos: $f > 0$:

Veamos el siguiente caso:

- $f = 1$

$$T = \frac{f}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \rightarrow \frac{\left(e^{\frac{5}{8}}\right)}{2} sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \cong 0.93 \cdot sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

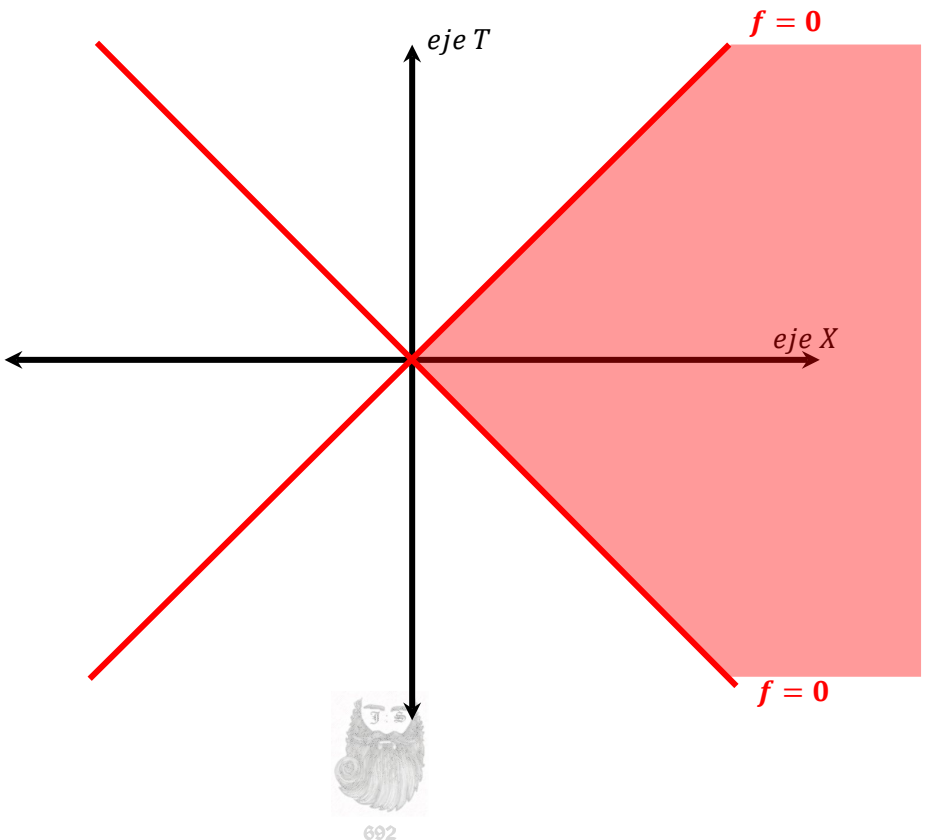
$$X = \frac{f}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \rightarrow \frac{\left(e^{\frac{5}{8}}\right)}{2} \cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \cong 0.93 \cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

Y ahora, atendiendo a las propiedades del $sinh$ y el $cosh$ vemos que:

- $sinh \rightarrow \begin{cases} valores\ negativos\ de\ \hat{t}\ arrojan\ resultados\ negativos \\ valores\ positivos\ de\ \hat{t}\ arrojan\ valores\ postivos \end{cases}$, es decir, en el eje temporal se podrán encontrar valores para la coordenada tanto positivos como negativos.

- $cosh \rightarrow \begin{cases} valores\ negativos\ de\ \hat{t}\ arrojan\ resultados\ positivos \\ valores\ positivos\ de\ \hat{t}\ arrojan\ valores\ postivos \end{cases}$, es decir que en el eje espacial sólo se producirán resultados positivos.

Esto, unido a que en $f = 0$ ya estaríamos en el Horizonte de Sucesos, nos lleva a colegir que el área que cubre ésta definición de coordenadas para valores positivos de f es:



Veamos ahora un caso en que $f < 0$, por ejemplo:

- $f = -1$

$$T = \frac{f}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \rightarrow \frac{\left(e^{\frac{5}{8}}\right)}{-2} sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \cong -0.93 \cdot sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

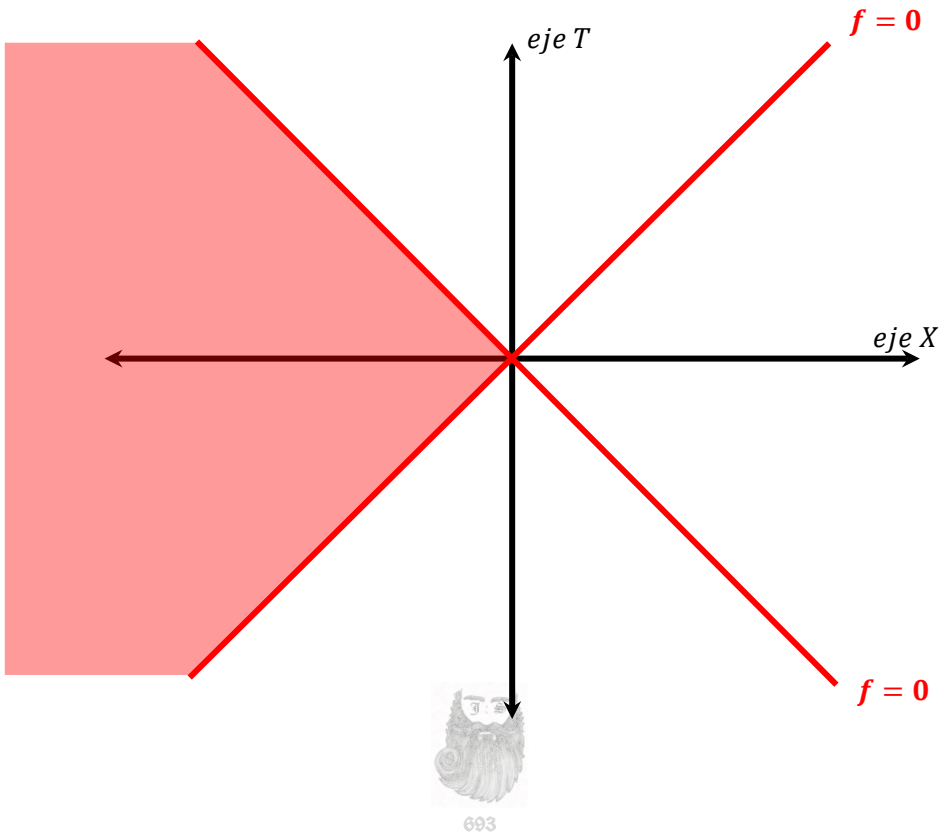
$$X = \frac{f}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \rightarrow \frac{\left(e^{\frac{-5}{8}}\right)}{-2} \cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right) \cong -0.93 \cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

Y ahora, atendiendo a las propiedades del $sinh$ y el $cosh$ vemos que:

- $sinh \rightarrow \begin{cases} valores\ negativos\ de\ \hat{t}\ arrojan\ resultados\ negativos \\ valores\ positivos\ de\ \hat{t}\ arrojan\ valores\ postivos \end{cases}$, es decir, en el eje temporal se podrán encontrar valores para la coordenada (T) tanto positivos como negativos.

- $cosh \rightarrow \begin{cases} valores\ negativos\ de\ \hat{t}\ arrojan\ resultados\ positivos \\ valores\ positivos\ de\ \hat{t}\ arrojan\ valores\ postivos \end{cases}$, es decir que en el eje espacial (X) sólo se producirán resultados negativos (pues recordemos que el $cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$ está antecedido de un -0.93)

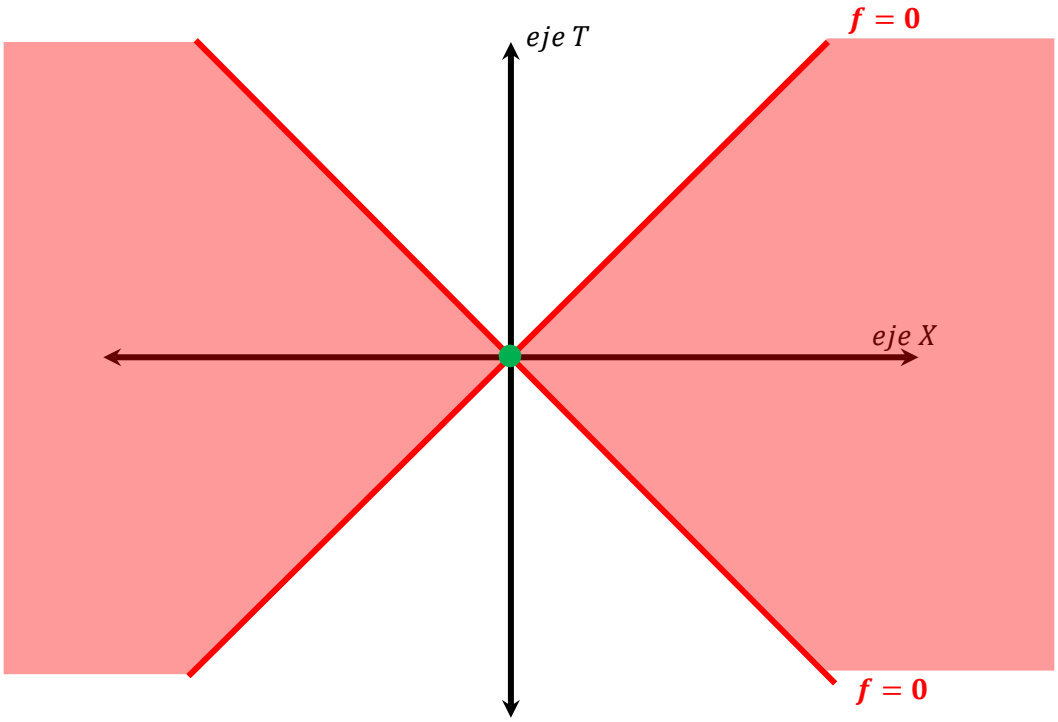
Esto, unido a que en $f = 0$ ya estaríamos en el Horizonte de Sucesos, nos lleva a colegir que el área que cubre ésta definición de coordenadas para valores negativos de f es:



Es decir, que con esta definición de coordenadas en función de f:

$$T = \frac{f}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$
$$X = \frac{f}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

Cubrimos estas zonas[440]:



Claro, aún quedan dos zonas por cubrir aunque a todas luces podemos anticipar que son inalcanzables desde cualquier valor de f según nuestra definición de coordenadas pues, recordemos, que todo viene de:

$$\hat{r} = 1 + \frac{f^2}{4}$$

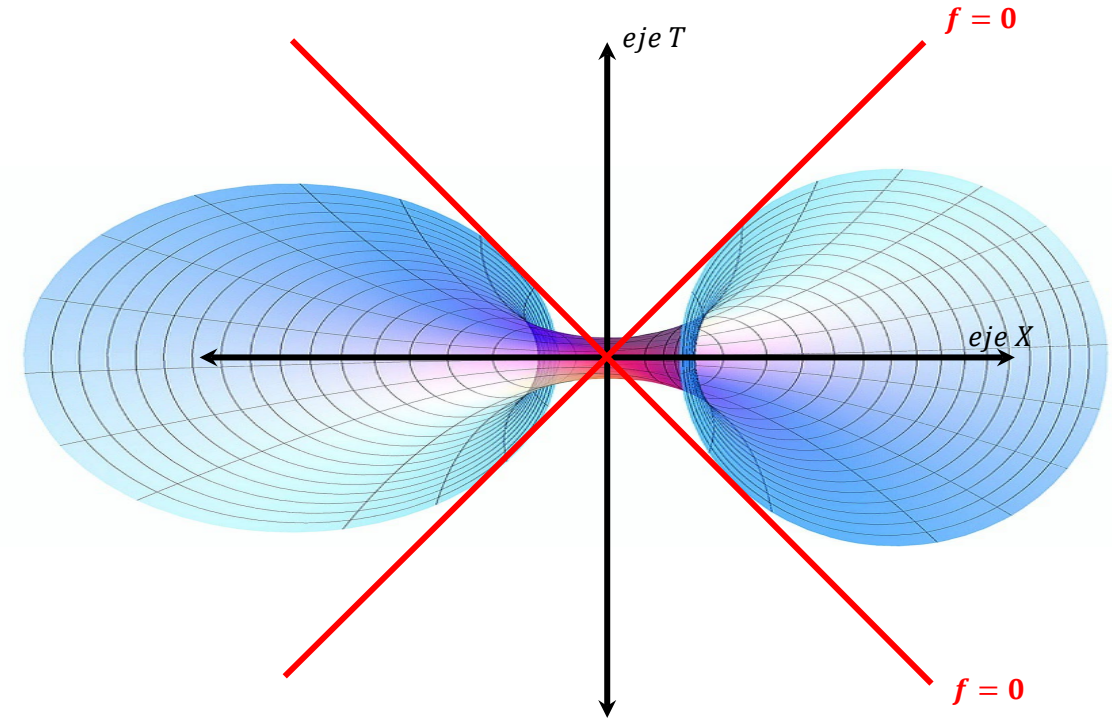
Dónde podemos observar que, en ningún caso vamos a obtener un valor de $\hat{r}$ que esté comprendido entre 0 y 1. Es decir, que según nuestra definición de coordenadas:

$$T = \frac{f}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot sinh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$
$$X = \frac{f}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}+\frac{f^2}{8}} \cdot cosh\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)$$

… podríamos estar… o 'ir' (aunque esto es imposible hasta el momento pues ni siquiera sabemos que haya Universo alternativo), de un Universo a otro pero, nunca, entrar en el

[440] El origen de coordenadas marcada con un punto verde corresponde, obviamente a un valor de $f = 0$.

agujero negro. El concepto de 'puente entre universos' o espacios diferentes de un mismo universo empieza a aparecer ante nuestros ojos. Empezaría a existir la posibilidad 'matemática' de conectar los dos universos.



Aunque ya en Kruskal-Szekeres vimos que en realidad es imposible pasar de la Zona II a la Zona IV porque, para ello, un observador tendría que ir a la velocidad de la luz.

Sin embargo, analicemos el escenario bajo la métrica definida por Einstein y Rosen.

$$ds^2 = -\frac{f^2}{(4+f^2)}d\hat{t}^2 + \frac{(4+f^2)}{4}df^2$$ [441]

Para facilitar los cálculos convengamos que:

$$F_{(f)} = \frac{f^2}{(4+f^2)}$$

$$G_{(f)} = \frac{(4+f^2)}{4}$$

Así:

$$ds^2 = -F_{(f)}d\hat{t}^2 + G_{(f)}df^2$$

[441] Véase página 690 de esta misma sección. El observador sólo se mueve en la dirección radial. Theta y Phi son felizmente constantes.

Ahora vamos a pensar acerca si podemos encontrar algún Killing[442] que nos ayude en nuestro procedimiento.

En realidad es bastante fácil de ver que hay un Killing temporal pues los coeficientes de la métrica $F_{(f)}$ y $G_{(f)}$ están exclusivamente en función de f y en ningún caso en función de $\hat{t}$. Es decir que tendremos el Killing temporal:

$$\underline{\xi} = e_0$$

Para saber que es temporal debería darnos un valor del coeficiente de la métrica, en este caso, positivo, para que, al tener la métrica puesto un signo negativo a dicho coeficiente el coeficiente final sea, efectivamente, negativo, es decir, temporal.

Para ello veamos su valor:

$$e_0 \cdot e_0 = \frac{f^2}{(4+f^2)} \cdot \frac{f^2}{(4+f^2)} = \frac{f^4}{(4+f^2)^2}$$

Donde podemos ver que, tome los valores que tome f, al sólo haber exponentes pares, siempre será positivo o, en el 'peor' de los casos, cero por lo que el Killing sería nulo. Es decir, que nos cuadra, que efectivamente, $\underline{\xi} = e_0$ es un Killing temporal.

En tal caso podremos aplicar el teorema que demostramos en su momento[443] según el cual:

$$\underline{P} \cdot \underline{\xi} = -\frac{E}{c}$$

La cuestión es que ahora, a estas alturas, estamos trabajando con unidades adimensionales por lo que tendremos que hacer alguna transformación.

$$m\underline{u} \cdot \underline{\xi} = -\frac{E}{c}$$

Dónde podremos quitar tanto la m como la c (valen 1) y, por lo tanto, a la izquierda nos quedaremos sólo con la cuadrivelocidad y en la derecha sólo con la energía:

$$\underline{u} \cdot \underline{\xi} = -E$$

Y ahora para simplificar aún más las cosas vamos a suponer una partícula/observador tan, tan lejana al cuerpo masivo que distorsiona el espacio tiempo que tiene velocidad igual a cero y por lo tanto podremos decir que su energía (energía potencial+energía cinética) es 1:

$$\underline{u} \cdot \underline{\xi} = -1$$

Desarrollemos la cuadrivelocidad:

$$(u^0 e_0 \cdot u^1 e_1) \cdot \underline{\xi} = -1$$

$$(u^0 e_0 \cdot u^1 e_1) \cdot e_0 = -1$$

[442] Recordemos: campos vectoriales en los que se mantenía constante la métrica y que nos ayudan mucho a calcular geodésicas, velocidades, etc… Decir dónde.

[443] Decir dónde.

Donde, al estar trabajando bajo una métrica ortogonal, sólo va a sobrevivir:

$$u^0 e_0 \cdot e_0 = -1$$

Es decir:

$$u^0(-F_{(f)}) = -1$$

$$u^0 = \frac{-1}{-F_{(f)}}$$

$$u^0 = \frac{1}{F_{(f)}}$$

De nuevo, haciendo un poco de memoria, tendremos que recordar que la cuadrivelocidad se definía como:

$$\underline{u} = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

Que en este caso sólo puede considerarse la coordenada temporal:

$$\frac{dx^0}{d\tau} \rightarrow \frac{dct}{d\tau}$$

Pero al estar en unidades a dimensionales, resulta que $c = 1$ y por lo tanto nos queda como:

$$\frac{d\hat{t}}{d\tau}$$

De manera que finalmente tenemos que como:

$$u^0 = \frac{1}{F_{(f)}} \quad // \quad \underline{u} = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \rightarrow \frac{dx^0}{d\tau} \rightarrow \frac{dct}{d\tau} \rightarrow \frac{d\hat{t}}{d\tau}$$

Resulta que:

$$\frac{1}{F_{(f)}} = \frac{d\hat{t}}{d\tau}$$

Que es un resultado importante que vamos a usar en breve.

Antes de hacerlo, tendremos que trabajar un poco, como hicimos en las órbitas de Schwarzschild[444], sobre el elemento de línea. En su momento vimos que, en unidades adimensionales:

$$ds^2 = -d\tau^2$$

Luego:

$$ds^2 = -F_{(f)}d\hat{t}^2 + G_{(f)}df^2$$

$$-d\tau^2 = -F_{(f)}d\hat{t}^2 + G_{(f)}df^2$$

[444] Decir dónde.

Si dividimos por $d\tau^2$ en ambos lados de la ecuación:

$$-\frac{d\tau^2}{d\tau^2} = -\frac{F_{(f)}d\hat{t}^2}{d\tau^2} + \frac{G_{(f)}df^2}{d\tau^2}$$

$$-1 = -F_{(f)}\frac{d\hat{t}^2}{d\tau^2} + G_{(f)}\frac{df^2}{d\tau^2}$$

Donde resulta que acabamos de conocer el término que hemos marcado en color rojo:

$$-1 = -F_{(f)}\left(\frac{1}{F_{(f)}}\right)^2 + G_{(f)}\left(\frac{df}{d\tau}\right)^2$$

$$-1 = -\frac{1}{F_{(f)}} + G_{(f)}\left(\frac{df}{d\tau}\right)^2$$

Y si despejamos ahora $\frac{df}{d\tau}$:

$$\frac{df}{d\tau} = \pm\sqrt{\frac{\left(-1+\frac{1}{F_{(f)}}\right)}{G_{(f)}}}$$

Donde el signo + significa que la partícula/observador se aleja hacia el infinito y el signo menos que se acerca al Agujero de Gusano. Como vamos a ir hacia el Agujero de Gusano, tomemos la vía negativa:

$$\frac{df}{d\tau} = -\sqrt{\frac{-1}{G_{(f)}} + \frac{1}{G_{(f)}F_{(f)}}}$$

Sigamos desarrollando, puesto que conocemos tanto $F_{(f)}$ como $G_{(f)}$:

$$F_{(f)} = \frac{f^2}{(4+f^2)}$$

$$G_{(f)} = \frac{(4+f^2)}{4}$$

$$\frac{df}{d\tau} = -\sqrt{\frac{-4}{(4+f^2)} + \frac{4}{f^2}}$$

$$\frac{df}{d\tau} = -2\sqrt{\frac{-1}{(4+f^2)} + \frac{1}{f^2}}$$

$$\frac{df}{d\tau} = -2\sqrt{\frac{f^2}{f^2}\frac{-1}{(4+f^2)} + \frac{(4+f^2)}{(4+f^2)}\frac{1}{f^2}}$$

$$\frac{df}{d\tau} = -2\sqrt{\frac{-f^2+4+f^2}{(4+f^2)}}$$

$$\frac{df}{d\tau} = -2\sqrt{\frac{4}{(4+f^2)f^2}}$$

$$\frac{df}{d\tau} = -\frac{4}{f}\sqrt{\frac{1}{(4+f^2)}}$$

$$\frac{df}{d\tau} = -\frac{4}{f\sqrt{(4+f^2)}}$$

Y, ahora sí, con estas dos expresiones, podremos estudiar las geodésicas, en este caso concreto, radiales. Es decir, las trayectorias de cuerpos que caen en caída libre hacia el agujero de gusano.

$$\frac{df}{d\tau} = -\frac{4}{f\sqrt{(4+f^2)}}$$

$$\frac{d\hat{t}}{d\tau} = \frac{1}{F_{(f)}}$$

Ahora, para calcular la velocidad lo obvio sería hacer la derivada, respecto del tiempo (externo), del espacio que se recorre y, recordemos, en nuestro caso la distancia (radial) la tenemos recogida en la función f, luego la velocidad debería calcularse mediante algo como:

$$\frac{df}{d\hat{t}}$$

Que podemos re-expresar, dividiendo arriba y abajo por $d\tau$) como:

$$\frac{df}{d\hat{t}} = \frac{df/d\tau}{d\hat{t}/d\tau}$$

Y ambas cosas las conocemos, luego:

$$\frac{df}{d\hat{t}} = \frac{\left(-\frac{4}{f\sqrt{(4+f^2)}}\right)}{\left(\frac{1}{F_{(f)}}\right)} = \left(-\frac{4}{f\sqrt{(4+f^2)}}\right)\cdot\left(\frac{F_{(f)}}{1}\right)$$

Y puesto que:

$$F_{(f)} = \frac{f^2}{(4+f^2)}$$

Entonces:

$$\frac{df}{d\hat{t}} = \left(-\frac{4}{f\sqrt{(4+f^2)}}\right)\cdot\left(\frac{f^2}{(4+f^2)}\right)$$

$$\frac{df}{d\hat{t}} = -\frac{4f^2}{f\sqrt{(4+f^2)}(4+f^2)}$$

$$\frac{df}{d\hat{t}} = -\frac{4f}{\sqrt{(4+f^2)}(4+f^2)}$$

Por lo que la velocidad quedaría como:

$$\frac{df}{d\hat{t}} = -\frac{4f}{\sqrt{(4+f^2)^3}} = v_{(f)}$$

Y miremos ahora una cuestión importante: estamos derivando por $d\hat{t}$ el tiempo externo, no el tiempo propio. Esto implica que es la velocidad que mide un observador externo y no la partícula que se sumerge en el agujero de gusano. Así, por ejemplo, éste observador externo podría observar una velocidad igual a cero debido a que mide una $f = 0$ y dirá que la partícula que se sumerge en el agujero de gusano está parada con velocidad cero… Esto, efectivamente, no debe sorprendernos pues, como ya sabemos, desde fuera, si observaríamos a un cuerpo caer veríamos cómo llegando al Horizonte de Sucesos su velocidad nos parecería ralentizarse hasta llegar a cero.

Sin embargo, ¿qué velocidad percibiría, para la partícula que cae, un observador estático que está justo en el horizonte de sucesos (bueno, a un diferencial hacia fuera)? Pues no tememos que, tal y como ya vimos, debería ser la velocidad de la luz. Veámoslo.

Para definir un Observador Estático y no enredarnos demasiado podemos usar un truquillo a partir del elemento de línea:

$$ds^2 = -F_{(f)}d\hat{t}^2 + G_{(f)}df^2$$

Donde:

$$d\hat{t}_{Obs.Est.} = \sqrt{F_{(f)}}d\hat{t}$$

$$df_{Obs.Est.} = \sqrt{G_{(f)}}df$$

Y, por lo tanto, su velocidad se podría definir como:

$$\frac{df_{Obs.Est.}}{d\hat{t}_{Obs.Est.}} = \frac{\sqrt{G_{(f)}}df}{\sqrt{F_{(f)}}d\hat{t}} = \sqrt{\frac{G_{(f)}}{F_{(f)}}}\frac{df}{d\hat{t}} = \sqrt{\frac{G_{(f)}}{F_{(f)}}}v_{(f)}$$

Y todo esto lo tenemos, por lo que podemos sustituir:

$$v_{(Obs.Est.)} = \sqrt{\frac{(4+f^2)}{\frac{4}{f^2}{(4+f^2)}}}\cdot\left(-\frac{4f}{\sqrt{(4+f^2)^3}}\right)$$

$$v_{(Obs.Est.)} = \sqrt{\frac{(4+f^2)}{4} \cdot \frac{(4+f^2)}{f^2}} \cdot \left(-\frac{4f}{\sqrt{(4+f^2)^3}}\right)$$

$$v_{(Obs.Est.)} = \sqrt{\frac{(4+f^2)^2}{4f^2}} \cdot \left(-\frac{4f}{\sqrt{(4+f^2)^3}}\right)$$

$$v_{(Obs.Est.)} = \frac{(4+f^2)}{2f} \cdot \left(-\frac{4f}{\sqrt{(4+f^2)^3}}\right)$$

$$v_{(Obs.Est.)} = -\frac{(4+f^2)4f}{2f\sqrt{(4+f^2)^3}}$$

$$v_{(Obs.Est.)} = -\frac{(4+f^2)2}{(4+f^2)\sqrt{(4+f^2)}}$$

$$v_{(Obs.Est.)} = \frac{2}{\sqrt{(4+f^2)}}$$ [445]

Si ahora, sustituimos el valor de f en el horizonte de sucesos que, como sabemos, es $f = 0$:

$$v_{(Obs.Est.)} = \frac{2}{\sqrt{(4+0^2)}}$$

$$v_{(Obs.Est.)} = \frac{2}{\sqrt{4}} = \frac{2}{2} = 1$$

Es decir, en nuestro entorno adimensional, 1, o lo que es lo mismo: la velocidad de la luz:

$$c = 1$$

$$v_{(Obs.Est.)} = 1 = c$$

Lo que es imposible para un cuerpo material. Al menos si está compuesto de la materia normal y corriente que hasta el momento conocemos.

[445] El signo negativo que viene de la velocidad medida por el Observador Externo es sólo una cuestión de sentido de la marcha. El Observador Externo ve que se le aleja (-) mientras que el Observador Estático en el Horizonte de Sucesos puede verlo acercarse y, por lo tanto, (+). En definitiva, que podemos quitar sin miedo el signo menos.